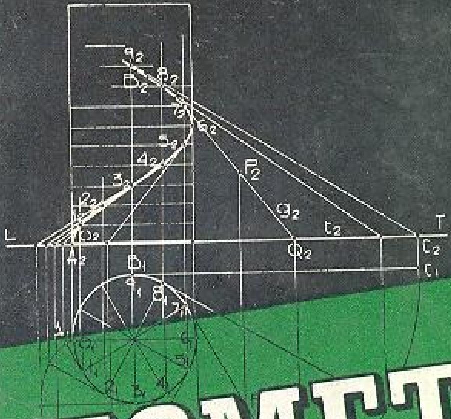
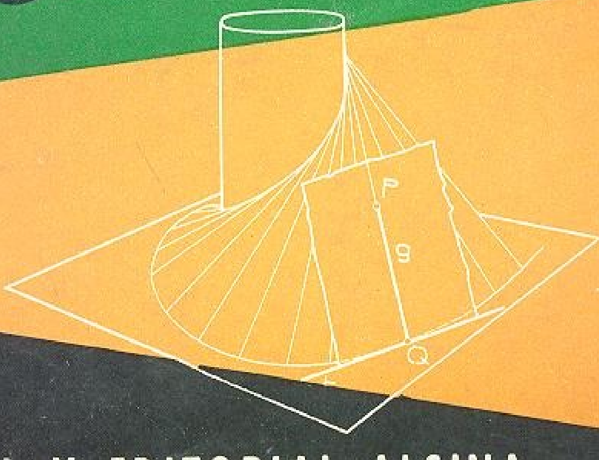
DONATO DI PIETRO



GEOMETRIA DESCRIPTIVA



LIBRERIA Y EDITORIAL ALSINA

DONATO DI PIETRO
Ingeniero Industrial de la Universidad Nacional de Buenos Aires
Profesor Normal en Ciencias

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

SEXTA EDICION

Texto Digitalizado Por: ENRIQUE LLIGUIN CASTRO

INDICE

Capítulo I: El punto. Nociones preliminares. Planos de proyección. Representación del punto. Posiciones del punto

Capítulo II: La línea recta

Capítulo III: Aplicaciones a las proyecciones de superficies y cuerpos

CAPÍTULO I

EL PUNTO

NOCIONES PRELIMINARES. PLANOS DE PROYECCION. REPRESENTACION DEL PUNTO. POSICIONES DEL PUNTO

§ 1. OBJETO DE LA GEOMETRIA DESCRIPTIVA. ORIGEN

1. — Son conocidas las dificultades con que ordinariamente se tropieza cuando se quiere representar un cuerpo sobre una hoja de papel. El dibujo obtenido, el de la figura **1**, por ejemplo, da una idea general del objeto representado, pero no su forma rigurosa ni sus medidas. El constructor de una casa o el fabricante de una máquina o de una simple herramienta necesitan, además de la idea general del trabajo que deben ejecutar, un dibujo cuya lectura permita determinar la forma precisa, la disposición de las partes y las medidas de la casa, máquina o herramienta, de modo que sea materialmente posible su exacta construcción. He ahí el objeto de la *Geometría Descriptiva*. Enseñar cómo debe confeccionarse la representación plana de un objeto de modo que aparezca o pueda deducirse su forma precisa, así como la distribución y dimensiones de sus elementos constitutivos.

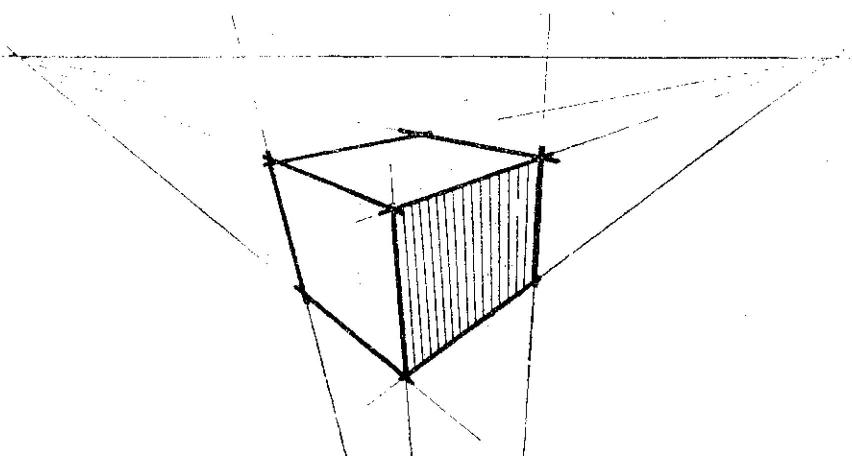


FIG. 1

La *Geometría Descriptiva* suministra las bases teóricas del dibujo técnico.

2. — Algunas reglas empíricas necesarias para la representación de los cuerpos, así como para resolver distintos problemas prácticos, eran conocidas desde la antigüedad. La construcción de los grandes templos y palacios, cuyas ruinas podemos admirar todavía, exigió, sin duda, dibujos de plantas, fachadas y perfiles, así como nociones prácticas sobre corte de piedras.

En la construcción del templo de Jehová, dispuesta por Salomón, los albañiles y los aparejadores cortaron y aparejaron la madera y la piedra para labrar la casa. En el libro de los *Reyes*, capítulo VI, se lee: *"Y la casa cuando se edificaba, la edificaban de piedras enteras como las traían; de tal manera que cuando la edificaban, ni martillos ni hachas fueron oídos en la casa, ni ningún otro instrumento de hierro"*. Las piedras eran traídas, pues, desde las canteras, perfectamente cortadas y aparejadas.

En la época del Renacimiento los conocimientos sobre representación gráfica de objetos fueron notablemente aumentados (Leonardo da Vinci y Piero della Francesca), sobre todo los referentes a perspectiva; pero recién en la Edad Moderna, Gaspar Monge (1746-1818) reunió, completó y coordinó las reglas conocidas, dando dignidad de ciencia a la *Geometría Descriptiva*.

§ 2. PROYECCION ORTOGONAL

1. — Dado un punto P del espacio y un plano π (fig. 2), llámase *proyección ortogonal del punto sobre el plano*, el pie P_1 de la

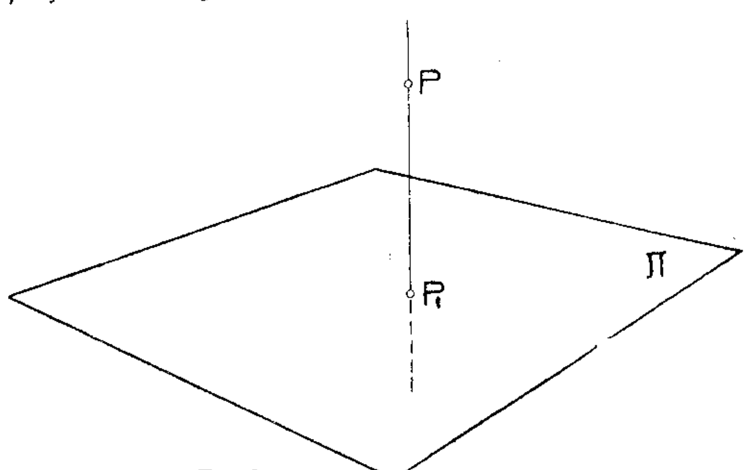


Fig. 2

perpendicular conducida desde el punto al plano. El plano π es el *plano de proyección*; la recta PP_1 es la *proyectante* del punto P.

2. — La *proyección ortogonal de una línea* l sobre un plano π es la línea l_1, formada por las proyecciones ortogonales de todos sus puntos sobre el mismo plano π (fig. 3). El conjunto de proyec-

tantes de los puntos de la línea constituye una superficie llamada *superficie cilíndrica proyectante* de la línea.

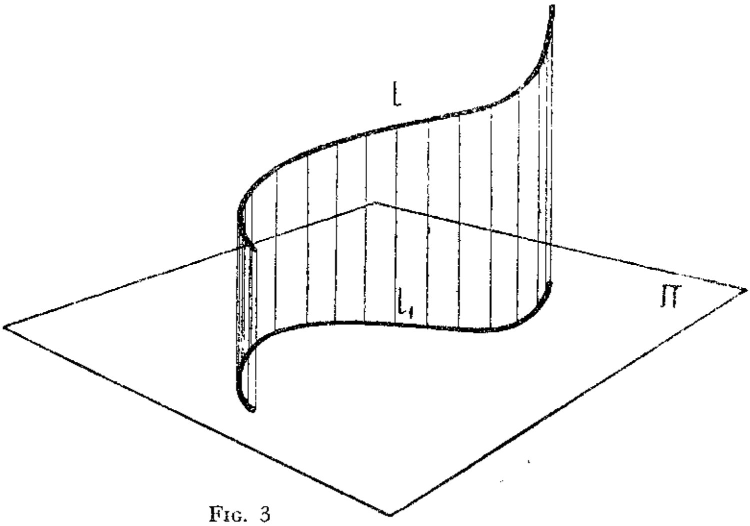


Fig. 3

3. — Si en vez de una línea cualquiera se trata de una *recta* r (fig. 4), la superficie cilíndrica proyectante se reduce a un *plano*

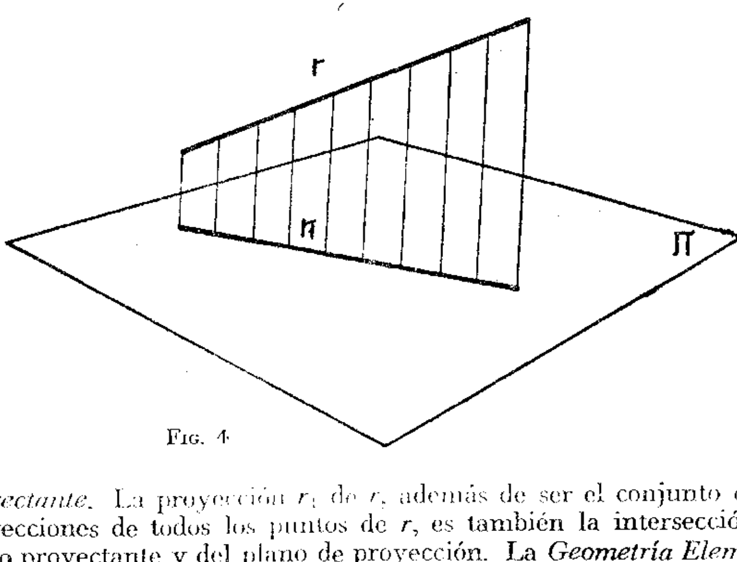


Fig. 4

proyectante. La proyección r_1 de r, además de ser el conjunto de las proyecciones de todos los puntos de r, es también la intersección del plano proyectante y del plano de proyección. La *Geometría Elemental* enseña que la intersección de dos planos es una recta, por lo que podemos afirmar que la *proyección ortogonal de una recta sobre un plano es, generalmente, una recta.* Decimos *generalmente* porque si

la recta r (fig. 5) es perpendicular al plano π, las proyecciones de sus diferentes puntos coinciden, y entonces r_1 queda reducida a un punto único.

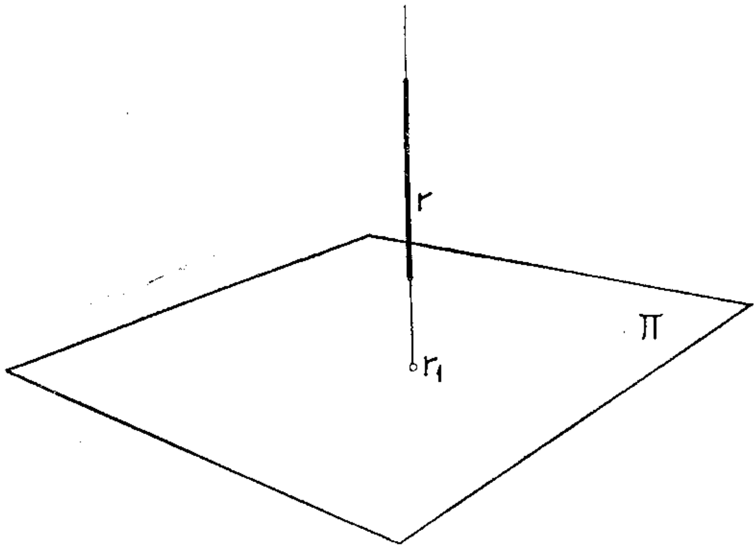


FIG. 5

4. — La *proyección ortogonal de una figura cualquiera* está formada por las proyecciones de sus líneas sobre el plano de proyección. La figura 6 da la proyección de un paralelepípedo.

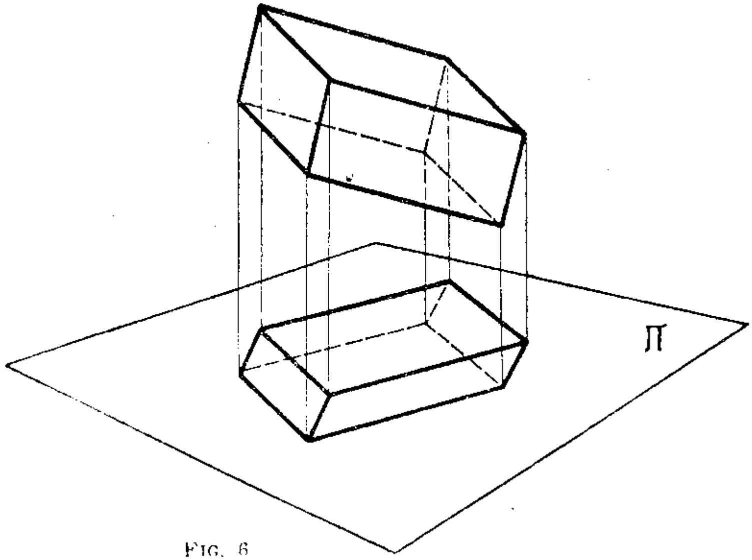


FIG. 6

§ 3. DETERMINACION DEL PUNTO

1. — Sea (fig. 7) un punto cualquiera P. Para obtener su proyección sobre el plano π_1 basta trazar desde ese punto la perpendicular al plano. El pie P_1 de la perpendicular es, como ya sabemos, la pro-

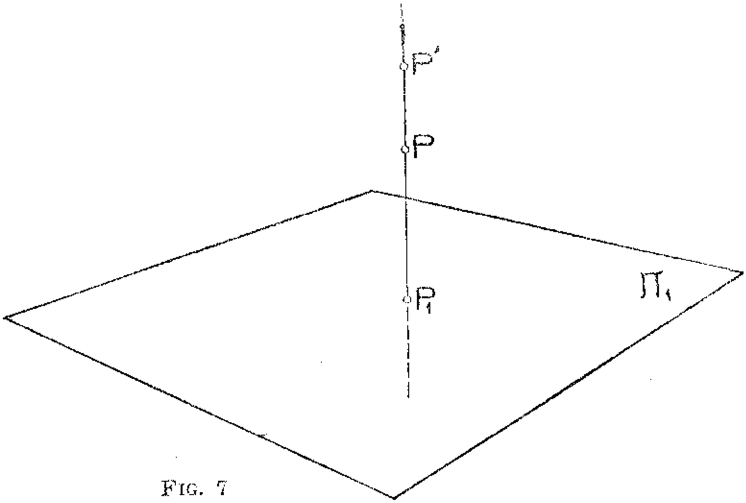


Fig. 7

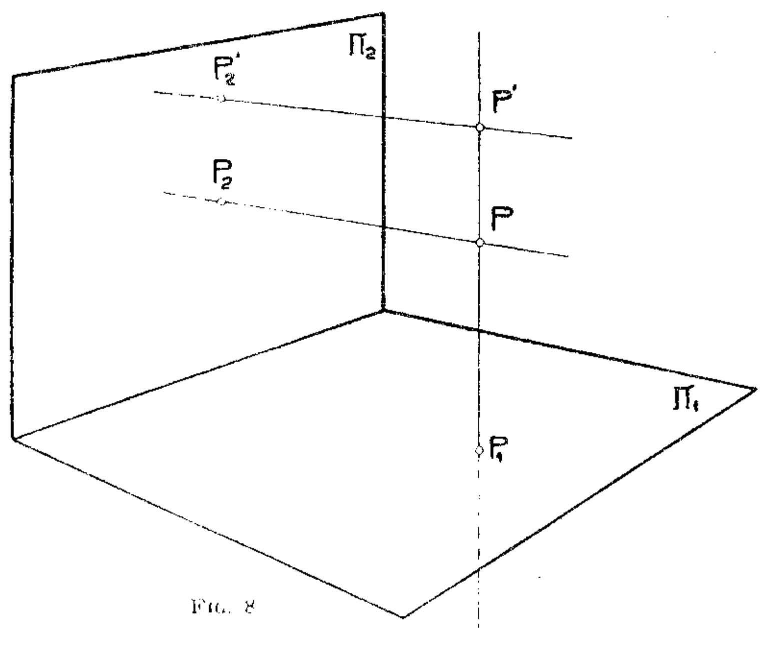


Fig. 8

yección de P sobre π. Cualquier otro punto, P' por ejemplo, situado sobre la proyectante PP_1, tiene también P_1 como proyección. Se comprende entonces que el conocimiento de P_1 no es suficiente para volver a determinar el punto P del espacio. Lo único que puede afirmarse es que se encuentra sobre la perpendicular en P_1 al plano π_1. Pero si además de P_1 conocemos también la longitud $\overline{P_1P}$, toda incertidumbre desaparece y el punto P queda perfectamente determinado.

La longitud P_1P es la *cota* del punto P.

2. — Para hacer conocer la cota de un punto la *Geometría Descriptiva* emplea dos métodos distintos:

1º Además de la proyección P_1 se da también la proyección P_2 del mismo punto P sobre otro plano perpendicular al π_1; las proyecciones de P y P' sobre éste nuevo plano ya no se confunden, entonces (fig. 8), y el punto P queda determinado por la intersección de las

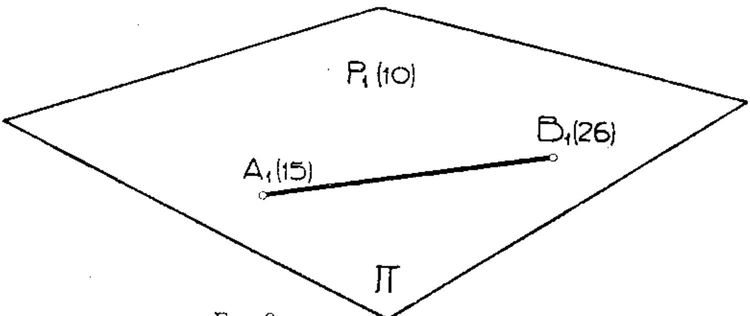


Fig. 9

proyectantes correspondientes a P_1 y P_2. Este método es el de la *doble proyección ortogonal* (*) o *método de Monge* (**).

2º Al lado de la proyección P_1 de P sobre el plano π se coloca la correspondiente cota figurada mediante un número. Así, la figura 9 da la proyección del punto P, distante 10 unidades lineales del plano π. Da también la proyección del segmento de recta AB, cuyos extremos A y B tienen como cotas 15 y 26 unidades, respectivamente. Este método es el de las *proyecciones acotadas*.

§ 4. PLANOS DE PROYECCION

1. — En el método de la doble proyección ortogonal se elige un *plano horizontal*, π_1, y otro *vertical*, π_2. Puede imaginarse, por ejemplo, que el plano horizontal sea el del piso del aula y que el vertical

---

(*) Para ciertas cuestiones empléanse a veces dos planos de proyección no ortogonales (proyección paralela oblicua).

(**) Gaspar Monge, nacido en Beaume, provincia de Borgoña, el 10 de mayo de 1746.

sea el de una de las paredes. La intersección de esos dos planos es la *línea de tierra*; es indicada generalmente mediante la escritura LT (fig. 10). La proyección de un punto sobre el plano horizontal es la *primera proyección* o *proyección horizontal* del punto. La indicare-

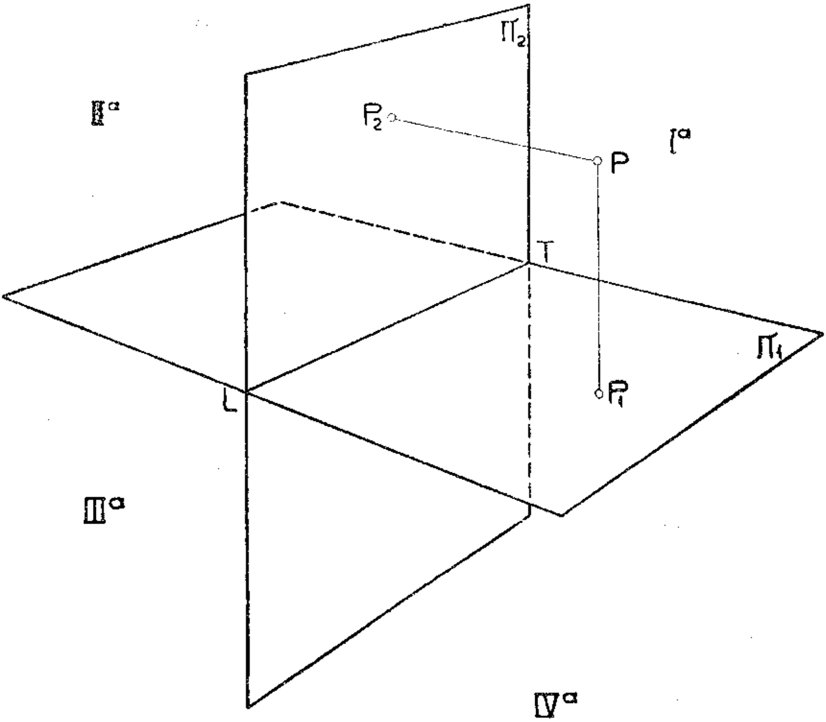


Fig. 10

mos colocando el subíndice 1 a la letra empleada para designar el punto. Así, P_1 es la proyección horizontal de P. La proyección sobre el plano vertical es la segunda proyección o proyección vertical del punto. La indicaremos agregando el subíndice 2 a la correspondiente letra del punto. Así, P_2 es la proyección vertical de P.

Para indicar que un punto P, por ejemplo, tiene como proyecciones P_1 y P_2, emplearemos la escritura $P \equiv (P_1, P_2)$. La distancia $\overline{P_1P}$ del punto P al plano horizontal es la *cota* de P; la distancia $\overline{P_2P}$ al plano vertical es su *alejamiento*.

2. Los dos planos de proyección dividen el espacio en cuatro *regiones* (diedros rectos), que se llaman, respectivamente, Iª, IIª, IIIª y IVª *región del espacio* (*).

(*) O también 1º, 2º, 3º y 4º diedro.

Se conviene en que la Iª región es la situada delante del plano vertical y encima del horizontal; la IIª, detrás del plano vertical y encima del horizontal; la IIIª, detrás del vertical y debajo del horizontal; la IVª, delante del plano vertical y debajo del horizontal.

El observador se supone situado siempre en la Iª región, teniendo el extremo L de la línea de tierra a su izquierda y el extremo T a su derecha.

§ 5. REPRESENTACION DEL PUNTO

1. — Supongamos (fig. 11) un punto P situado en la Iª región. Sus proyecciones son P_1 y P_2. Las proyectantes PP_1 y PP_2 determinan un plano que es perpendicular al plano horizontal y al vertical; las intersecciones P_oP_1 y P_oP_2 de ese plano con los de proyección son, de acuerdo con la *Geometría Elemental*, perpendiculares a la línea de tierra y perpendiculares entre sí. La figura $PP_1P_oP_2$ es, por lo tanto, un rectángulo, y se puede escribir

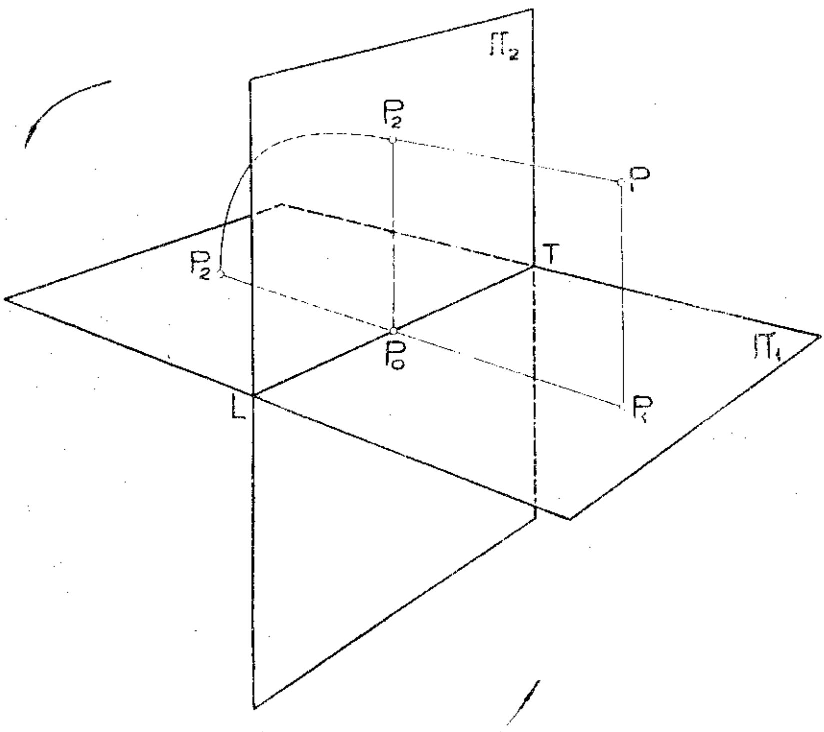


FIG. 11

$$\overline{P_1P} = \overline{P_oP_2},$$
$$\overline{P_2P} = \overline{P_oP_1}.$$

medidos estos segmentos mediante una unidad arbitraria y establecido para ellos un cierto sentido positivo.

Si entonces hacemos girar el plano vertical alrededor de LT en sentido contrario a las agujas del reloj hasta hacerlo coincidir con el horizontal, los segmentos $\overline{P_oP_2}$ y $\overline{P_oP_1}$, perpendiculares ambos a LT, quedarán uno a continuación de otro, y los *puntos* P_1 *y* P_2 *estarán sobre una misma perpendicular a la línea de tierra.* A esta perpendicular se le llama *línea de referencia.* En la figura 12 el plano vertical fué girado, *abatido* o *rebatido*, en la forma indicada, y se obtuvo un dibujo que constituye la *representación* o *figura descriptiva* del punto P.

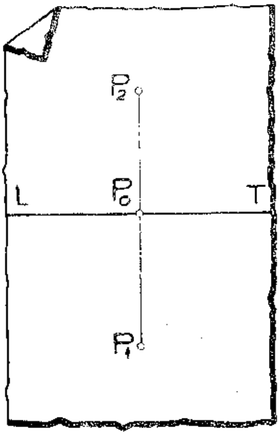


FIG. 12

Mas comúnmente se suprime el contorno de los planos, y la representación toma entonces el aspecto de la figura 13. Mediante la figura descriptiva tenemos los elementos necesarios para individualizar el punto P del espacio. Basta imaginar la perpendicular en P_1 al plano del dibujo y llevar sobre esta recta, a partir de P_1 y encima de este punto, una longitud igual a $\overline{P_oP_2}$.

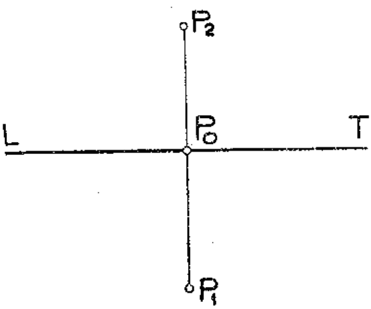


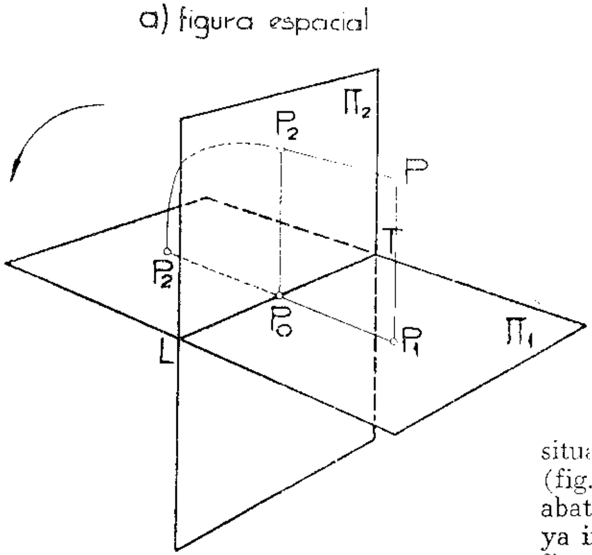
FIG. 13

2. — El punto objetivo P ha sido considerado en la Iª región, pero puede, naturalmente, estar en cualquiera de las otras tres. ¿Cómo distinguiremos en la figura descriptiva estas diferentes posiciones? Es lo que veremos en el parágrafo siguiente.

§ 6. POSICIONES DEL PUNTO

1. — El punto está situado en la Iª región (fig. 14).

Después del abatimiento se obtiene la representación que ya conocemos: la proyección vertical P_2 aparece encima de LT; la proyección horizontal P_1 aparece debajo. El segmento $\overline{P_oP_2}$ da la distancia del punto al plano π_1; el $\overline{P_oP_1}$ da la distancia al plano π_2.



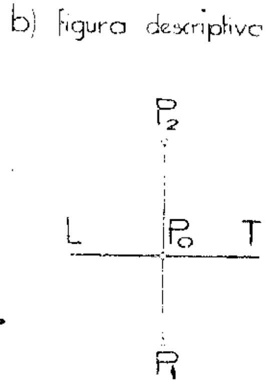
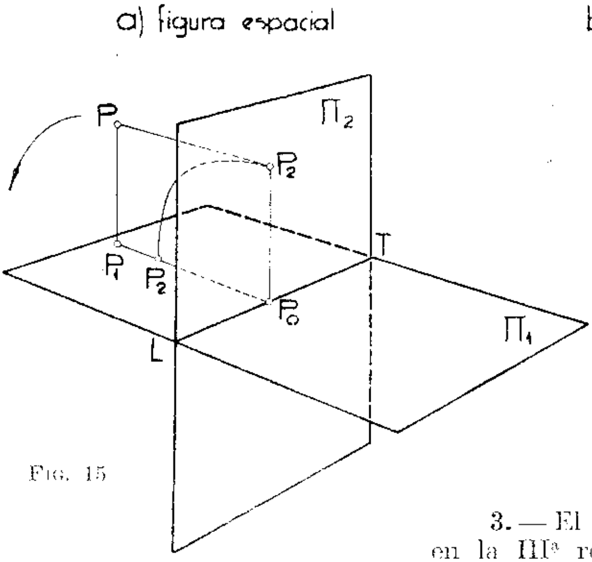


FIG. 14

2. — El punto está situado en la IIª región (fig. 15). Efectuado el abatimiento en la forma ya indicada se obtiene la figura descriptiva correspondiente.

Se ve que *las dos proyecciones se encuentran encima de la línea de tierra.*



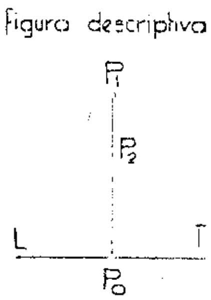


FIG. 15

3. — El punto está situado en la IIIª región (fig. 16).

Abatido el plano π_2 sobre π_1 resulta una representación caracterizada por tener P_1 encima de LT y P_2 debajo.

4. — El punto está situado en la IVª región (fig. 17). Después del abatimiento se obtiene una representación que se distingue por tener *las dos proyecciones del punto debajo de la línea de tierra.*

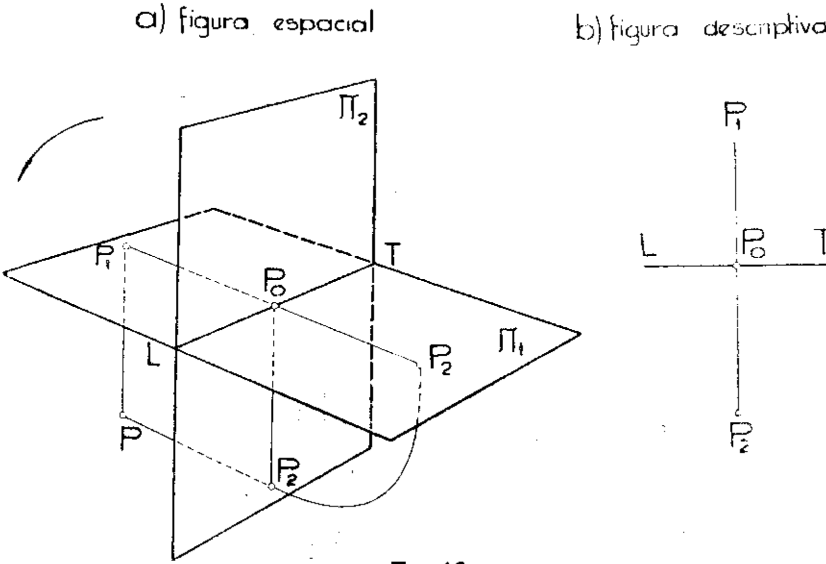


Fig. 16

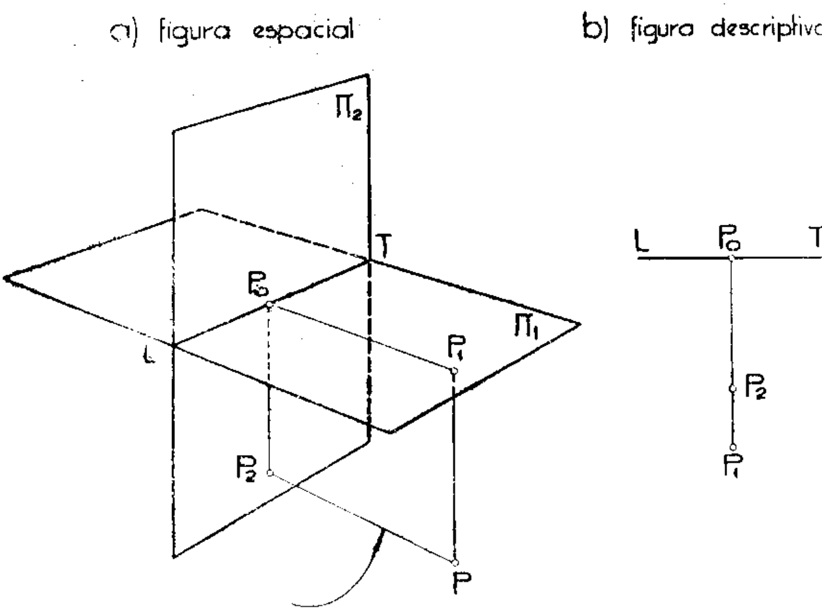


Fig. 17

5. — En las representaciones correspondientes a puntos situados en las regiones IIª y IVª la colocación relativa de las proyecciones no es necesariamente la indicada en las figuras 15 y 17. Todo depende de los valores de las cotas y de los alejamientos, aunque ambas proyecciones aparecen siempre a un mismo lado de LT y sobre una misma perpendicular a ésta. Si la cota es igual al alejamiento, las dos proyecciones se superponen, y se obtienen entonces representaciones como las de la figura 18.

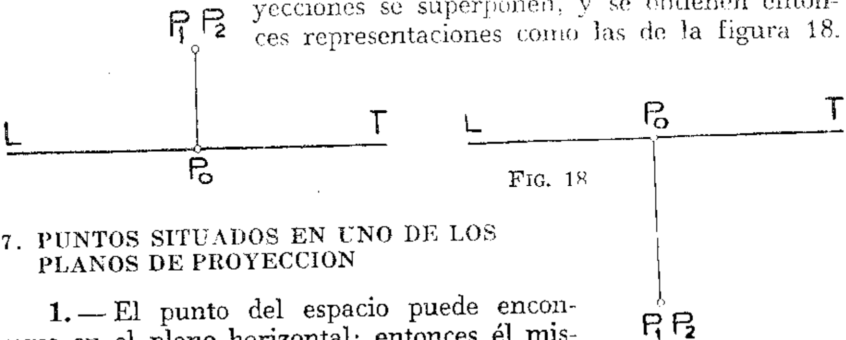


FIG. 18

§ 7. PUNTOS SITUADOS EN UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

1. — El punto del espacio puede encontrarse en el plano horizontal; entonces él mismo es su proyección horizontal. Como la cota es nula, la proyección vertical (fig. 19) se encuentra en línea de tierra.

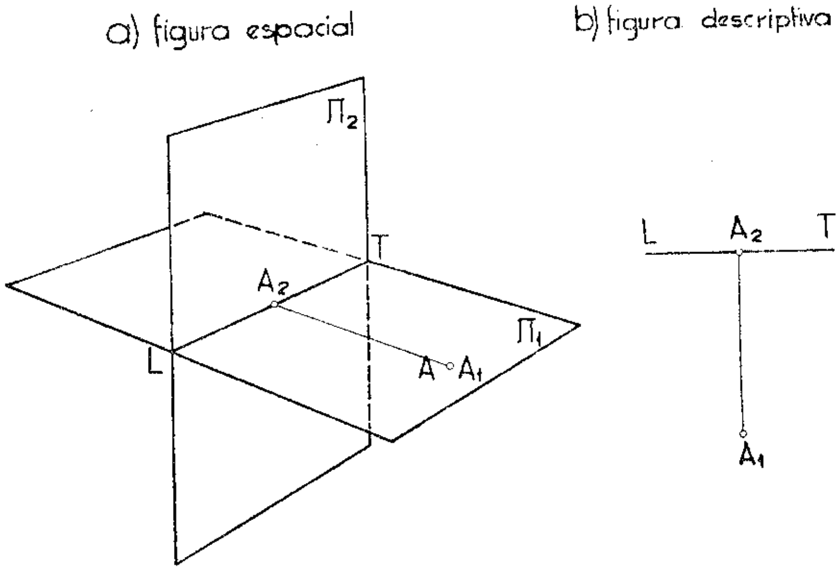


FIG. 19

2. — El punto P, considerado en el caso anterior, encuéntrase en el plano horizontal, delante del vertical; podría encontrarse detrás de este plano. Es lo que se tiene en la figura 20.

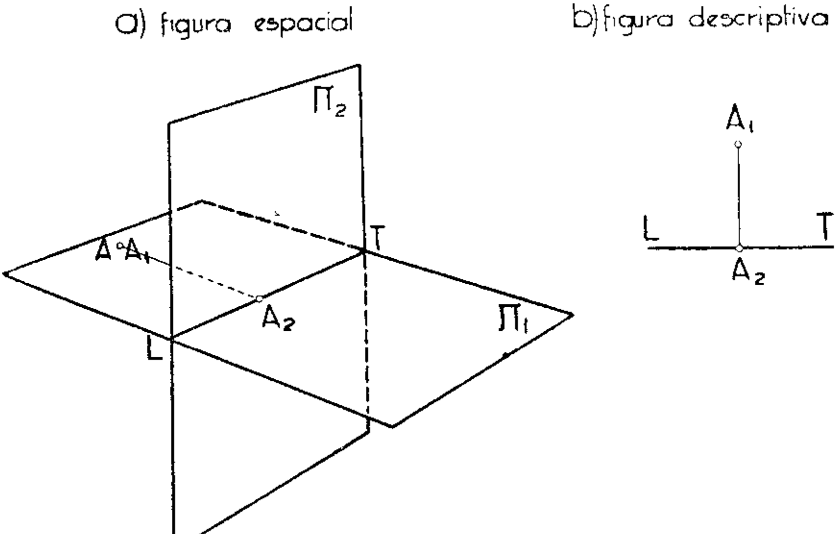


FIG. 20

3. — Si el punto del espacio está situado en el plano vertical, él mismo es su proyección vertical. Siendo nulo el alejamiento la proyección horizontal se halla en la línea de tierra. La figura 21 indica los dos casos que pueden presentarse (puntos *P* y *Q*).

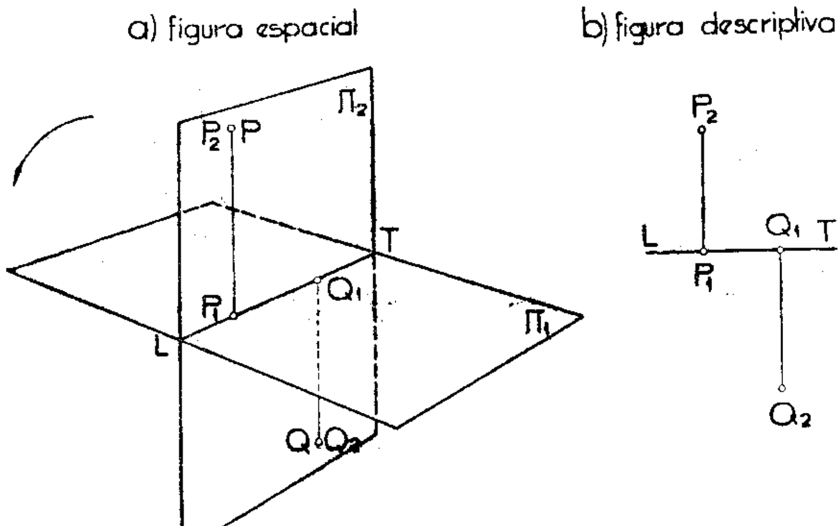


FIG. 21



FIG. 22

4. — En fin, si el punto está en la línea de tierra, él mismo se confunde con sus dos proyecciones (fig. 22).

§ 8. PUNTOS SITUADOS EN PLANOS BISECTORES

1. — Se sabe que *plano bisector* de un diedro es el plano que pasando por la arista del diedro divide a éste en dos partes iguales. Las cuatro regiones determinadas por los planos de proyección dan lugar entonces a dos planos bisectores: uno para las regiones Iª y IIIª, otro para las IIª y IVª.

2. — Un punto cualquiera P situado en el plano bisector del primer diedro (fig. 23) equidista de los dos planos de proyección,

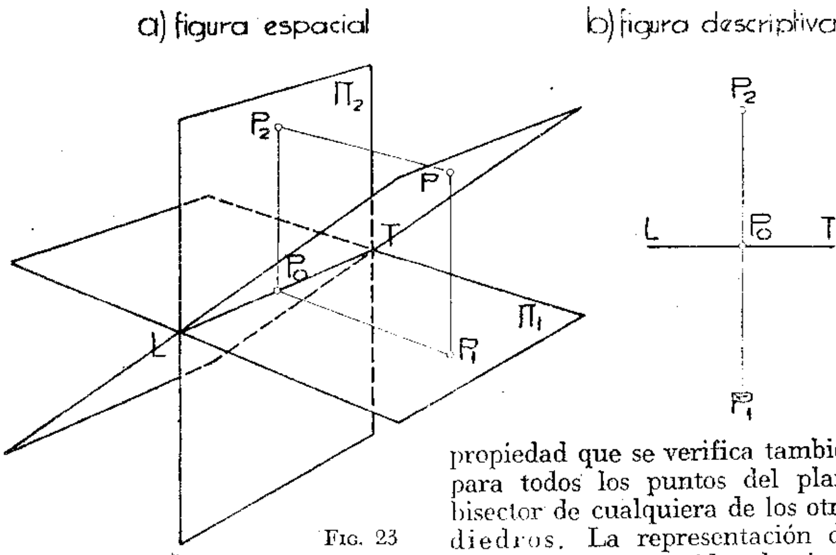


FIG. 23

propiedad que se verifica también para todos los puntos del plano bisector de cualquiera de los otros diedros. La representación del punto P antes considerado tiene, por lo tanto, P_1 y P_2 dispuestos simétricamente con respecto a LT, es decir, dispuestos de modo que

$$\overline{P_oP_1} = \overline{P_oP_2}.$$

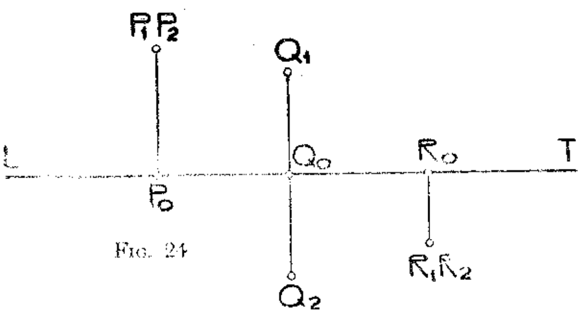


FIG. 24

3. — Para puntos situados en los planos bisectores de los diedros 2º, 3º y 4º se obtienen las representaciones de la figura 24, puntos P, Q y R, respectivamente.

§ 9. PLANO DE PERFIL

1. — Los dos planos π_1 y π_2 son suficientes, en general, para estudiar las figuras del espacio. En algunos casos resulta necesario recurrir a un tercer plano π_3, perpendicular a los dos primeros. Es el *plano de perfil* o *tercer plano de proyección* (fig. 25).

Los tres planos de proyección forman un triedro trirectangular y se cortan según tres rectas perpendiculares entre sí, que concurren en el punto *O*. Para obtener la representación puede abatirse este tercer plano sobre el plano vertical, haciéndolo girar alrededor de *OY*, o también sobre el horizontal, haciéndolo girar alrededor de *OX*.

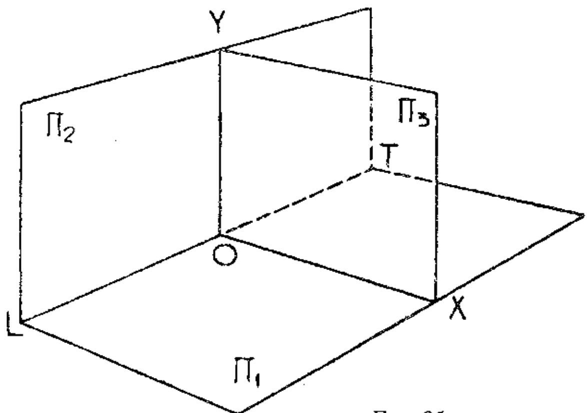


Fig. 25

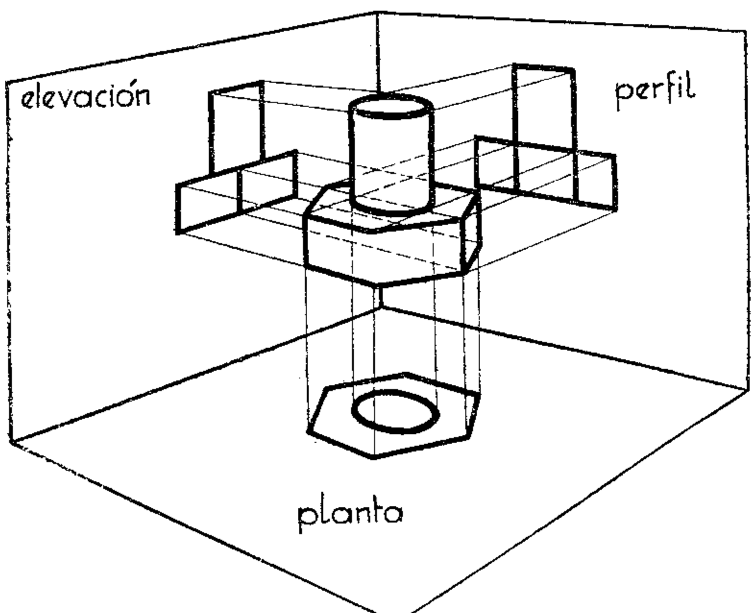


Fig. 26

2. — En los dibujos de máquinas, muebles, etc., se ejecutan: una proyección horizontal o *planta*, una proyección vertical o *elevación* y también, a menudo, una proyección de perfil o *vista de perfil* o simplemente *perfil* (fig. 26).

§ 10. PERFIL DE UN PUNTO

1. — Sea un punto P (fig. 27). Sus proyecciones horizontal y vertical son P_1 y P_2. Llevando desde P la perpendicular al plano de perfil se tiene la tercera proyección P_3 del punto. Si se abate el plano

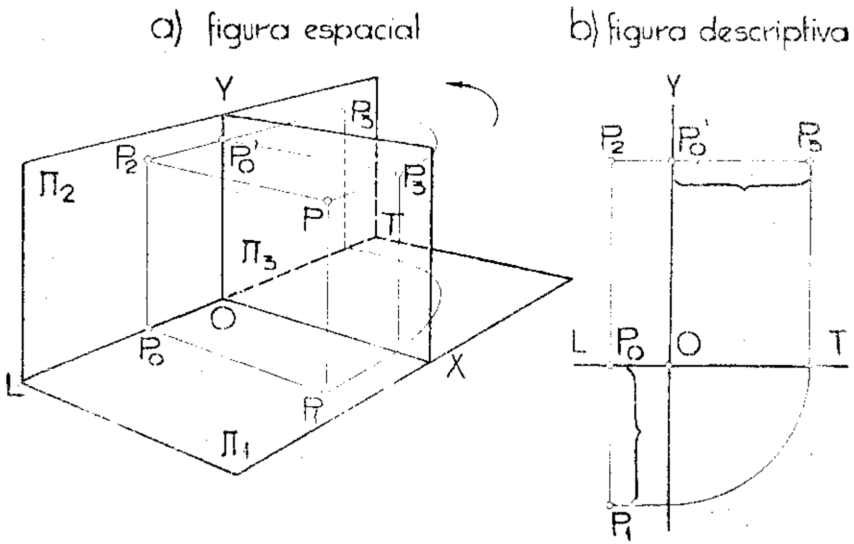


FIG. 27

π_3 sobre el π_2 haciéndolo girar alrededor de OY, que constituye una nueva línea de tierra, la proyección P_3 describe un cuarto de circunferencia. La figura descriptiva hace ver que el alejamiento $\overline{P_o P_1}$ ha sido llevado a $\overline{P_o' P_3}$ perpendicularmente a OY mediante la construcción que aparece en el gráfico.

2. — La figura 28 se refiere al abatimiento del plano de perfil sobre el horizontal.

§ 11. CONVENCIONES PARA EL DIBUJO

1. — Para que una figura descriptiva pueda ser leída es necesario dibujarla de acuerdo con ciertas convenciones admitidas en *Geometría Descriptiva*. Ellas son:

1ª Los dos planos de proyección son considerados opacos; en consecuencia, sólo son visibles las figuras situadas en la Iª región.

2ª Las proyecciones de los datos y las de los resultados se dibujan en negro mediante trazos continuos llenos (———) si se trata de partes visibles, o trazos muy pequeños (- - - - - -), o simplemente puntos, si de partes invisibles.

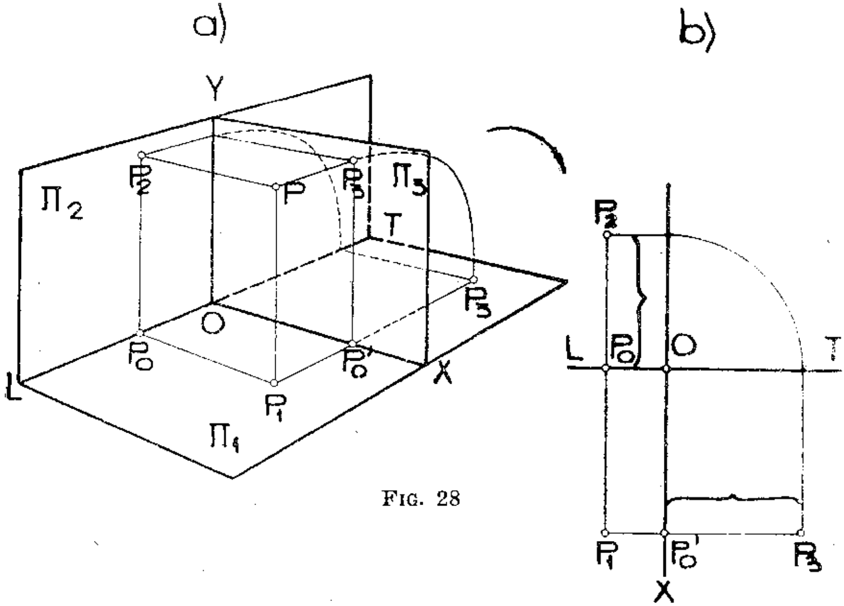


FIG. 28

3ª Las proyecciones de líneas auxiliares se dibujan en forma de pequeños trazos de igual longitud (— — — —), o bien mediante trazos continuos muy finos (———), o también llenas de color carmín.

4ª Las líneas auxiliares de cierta importancia, ejes de simetría, por ejemplo, se suelen representar mediante trazos y puntos alternados (—·—·—).

2. — A veces se conviene en distinguir las líneas dadas visibles de las líneas pedidas, también visibles, utilizando para las últimas trazos continuos más gruesos que para las primeras.

§ 12. APLICACIONES

1. — Dibujar la figura descriptiva de un punto de la Iª región situado a 25 mm del plano π_1 y a 35 mm del π_2 (*).

(*) Si se establece el sentido para las cotas y los alejamientos, no hace falta la indicación de la región del espacio. Se admite generalmente que sean positivas las cotas contadas encima de *LT*, negativas las contadas debajo. En cuanto a los alejamientos son considerados positivos contados delante de *LT*, negativos en caso contrario. Así, si un punto tiene cota negativa y alejamiento positivo, pertenece a la IVª región.

Tratándose de un punto de la primera región la proyección horizontal debe estar debajo de LT; la vertical, encima. Tomando entonces sobre la normal a la línea de tierra

$$\overline{P_oP_1} = 35 \text{ mm},$$

$$\overline{P_oP_2} = 25 \text{ mm},$$

se tiene (fig. 29) la representación pedida.

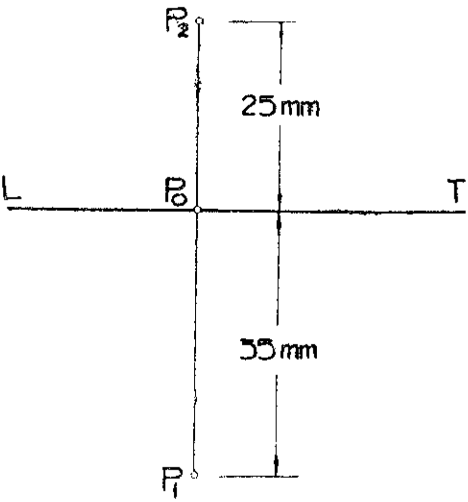


Fig. 29

2. — Leer la figura descriptiva dada en la figura 30.

Como las dos proyecciones están debajo de LT, el punto pertenece a la IVª región. Hállase, además, a 10 mm del plano π_2 y a 15 mm del plano π_1.

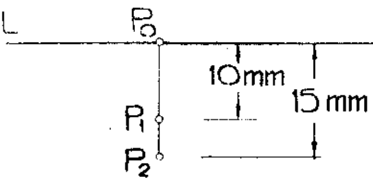


Fig. 30

3. — Dibujar la figura descriptiva de un punto del plano bisector del 3er diedro, situado a 35 mm de los planos de proyección.

Por tratarse de un punto del 3er diedro la proyección horizontal está encima de LT, la vertical, debajo. La representación pedida es entonces la de la figura 31.

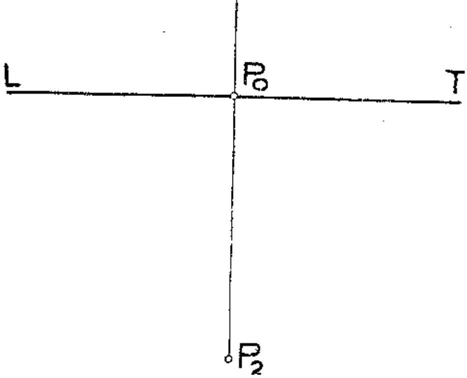


Fig. 31

4. — Se comprende que si las cotas y los alejamientos de una figura son grandes, puede emplearse en la figura descriptiva la escala gráfica que resulte más conveniente. Así, la figura 32 corresponde a un punto situado a 30 cm del plano horizontal y a 20 cm del vertical. Pertenece al 3er diedro.

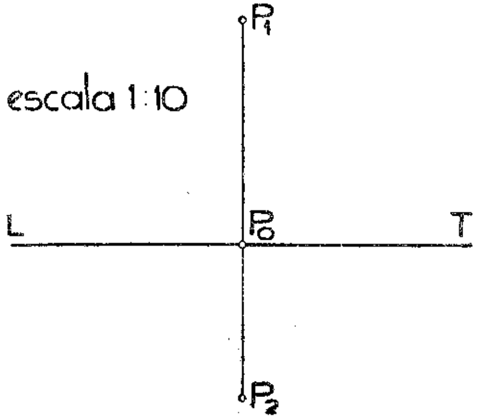


Fig. 32

EJERCICIOS

1. Representar un punto del 2º diedro sabiendo que dista 10 cm del plano horizontal y 8 cm del vertical.
2. Dar la representación de un punto del semiplano vertical superior, que está a 3 cm del plano horizontal.
3. Representar un punto de alejamiento — 5 cm y cota cero.
5. Dar la representación de un punto del plano bisector del 1er. diedro sabiendo que está a 10 cm de la línea de tierra.
6. Hallar la tercera proyección de un punto de alejamiento 3 y cota 2,5.
7. Hallar la tercera proyección de un punto de alejamiento — 2 y cota — 3.
8. Representar un punto del plano vertical, de cota — 8 cm.

Capítulo II

LA LINEA RECTA

§ 13. REPRESENTACION DE LA RECTA

1. — Vimos ya que una recta se proyecta sobre un plano bajo la forma de una recta, con la excepción indicada en la figura 3, § 2. Si entonces proyectamos una recta r (fig. 33) primero sobre el plano

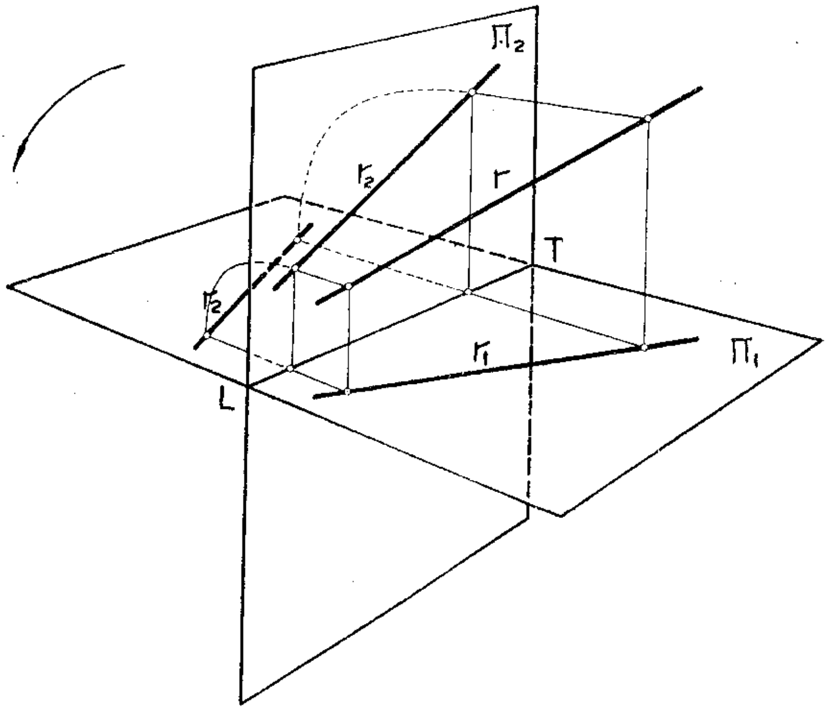


Fig. 33

horizontal y después sobre el vertical, obtenemos dos proyecciones r_1 y r_2 de la recta dada. Los planos proyectantes de r son: uno, perpendicular al plano π_1, es el *plano proyectante horizontalmente*; otro, perpendicular al plano π_2, *es el plano proyectante verticalmente*. Si después de obtener r_1 y r_2 abatimos el plano π_2 sobre el π_1 mediante la conocida rotación alrededor de LT, se tiene sobre el único plano π_1

el par de rectas r_1 y r_2 (fig. 34), que constituyen la representación de la recta objetiva. Las dos proyecciones r_1 y r_2 son suficientes, en general, para determinar la recta del espacio. En efecto, si imaginamos que el plano π_2 vuelve a su posición primitiva, conduciendo por r_1 un plano perpendicular al plano π_1 y por r_2 un plano perpendicular al π_2, la intersección de estos dos planos da la recta objetiva r (*).

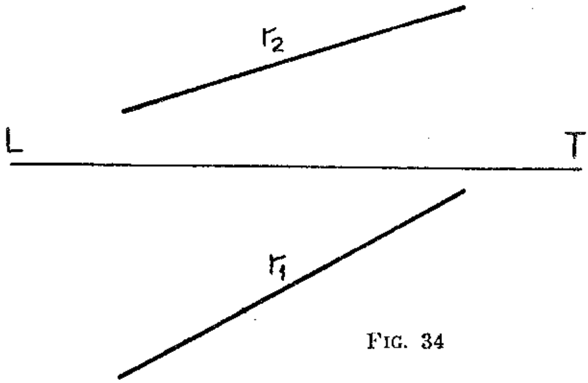


FIG. 34

La recta r_1 es la *primera proyección* o *proyección horizontal* de la recta r; la recta r_2 es su *segunda proyección* o *proyección vertical* y se escribe

$$r \equiv (r_1, r_2).$$

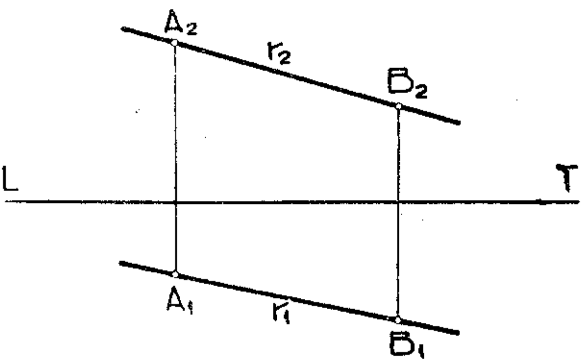


FIG. 35

2. — Como dos puntos determinan una recta, ésta es considerada conocida si se dan las proyecciones A_1, A_2 y B_1, B_2 de dos de sus puntos A y B (fig. 35). La proyección horizontal r_1 se obtiene uniendo mediante una recta A_1 y B_1; la vertical, uniendo A_2 y B_2.

3. — A la inversa, si se conocen las proyecciones r_1 y r_2 de una recta, se determinan las proyecciones P_1 y P_2 de un punto P de r (fig. 36), teniendo en cuenta que P_1 y P_2 deben encontrarse sobre r_1 y r_2, respectivamente, y sobre una misma perpendicular a LT.

(*) La recta r queda así determinada y es única. Se exceptúa el caso en que r_1 y r_2 son perpendiculares, en un mismo punto, a la línea de tierra. En este caso la recta se presenta, generalmente, mediante un par de puntos A y B.

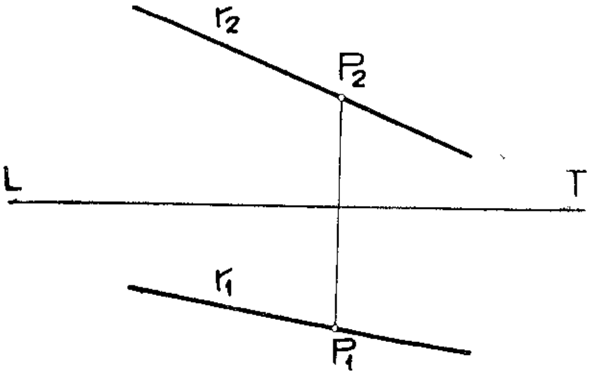


FIG. 36

4. — Es fácil demostrar que si un segmento es dividido por un punto en una relación dada, también las proyecciones del punto dividen en la misma **relación** las proyecciones del segmento.

En efecto (figura 37), si $\overline{AB}$ es el segmento y P el punto que lo divide en la relación $\frac{m}{n}$, se tiene, por el conocido teorema de Thales,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_1}},$$

y entonces, si por hipótesis

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{m}{n},$$

también

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_1}} = \frac{m}{n}.$$

Del mismo modo se demuestra que

$$\frac{\overline{A_2P_2}}{\overline{P_2B_2}} = \frac{m}{n}.$$

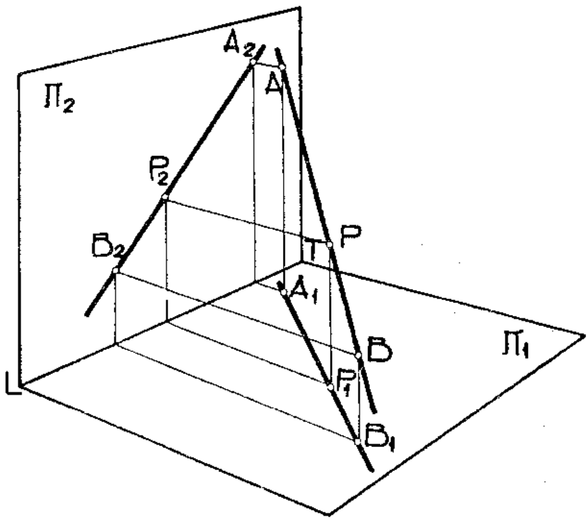


FIG. 37

En particular, las proyecciones del punto medio de un segmento dividen en dos partes iguales las proyecciones del segmento.

§ 14. TRAZAS DE UNA RECTA

1. — Se llaman *trazas* de una recta los puntos en que ésta encuentra o atraviesa los dos planos de proyección. Así (fig. 38), los puntos H y V son las trazas de la recta r. Con más precisión, H es la *traza horizontal* y V la *traza vertical*.

La traza H es un punto del plano π_1, su proyección horizontal H_1

coincide con el mismo punto H, su proyección vertical H_2 está sobre la línea de tierra.

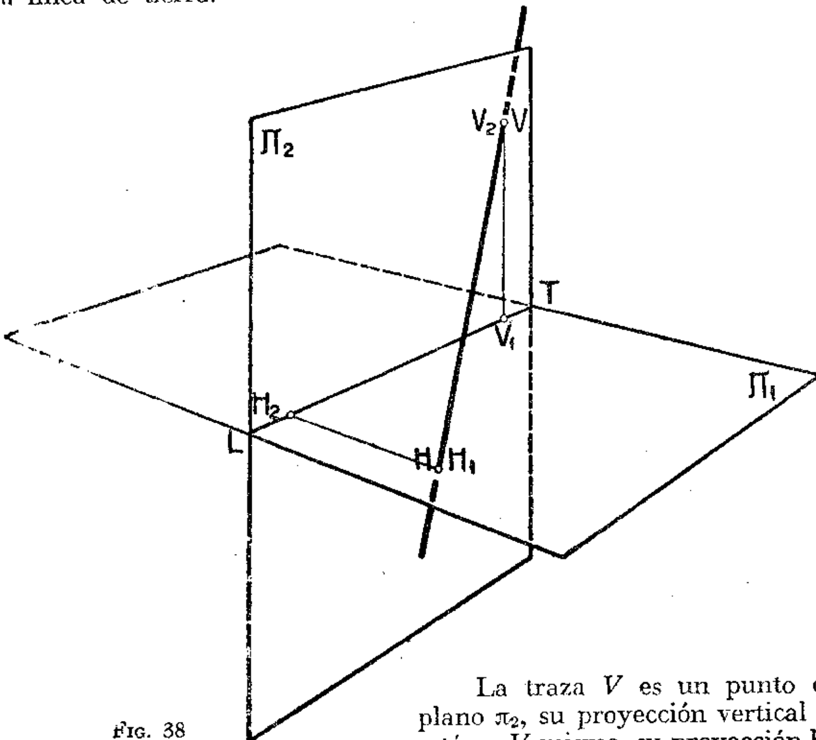


FIG. 38

La traza V es un punto del plano π_2, su proyección vertical V_2 está en V mismo, su proyección horizontal V_1 encuéntrase en la línea de tierra. La representación de las trazas es entonces la indicada en la figura 39.

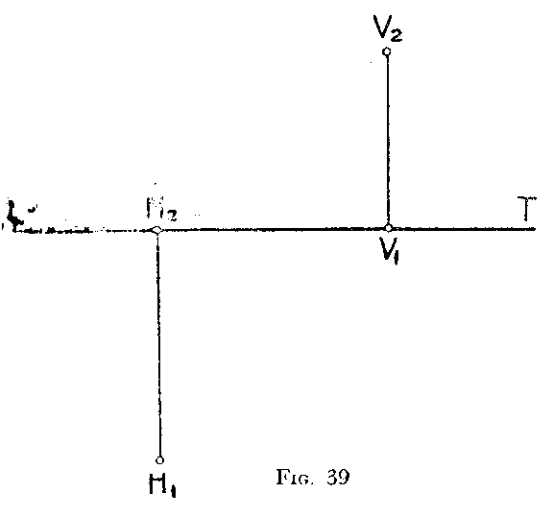


FIG. 39

2. — La representación anterior permite hallar en seguida las proyecciones r_1 y r_2 de la recta r del espacio. Basta unir las proyecciones homónimas, es decir, H_1 con V_1 y H_2 con V_2 (fig. 40).

3. — A la inversa, conocidas las dos proyecciones r_1 y r_2 de una

recta es posible determinar sus trazas. Para esto (fig. 41) se prolongan las dos proyecciones hasta encontrar la línea de tierra. El punto en que la proyección horizontal encuentra LT da V_1, proyección horizontal de la traza vertical; su proyección vertical encuéntrase

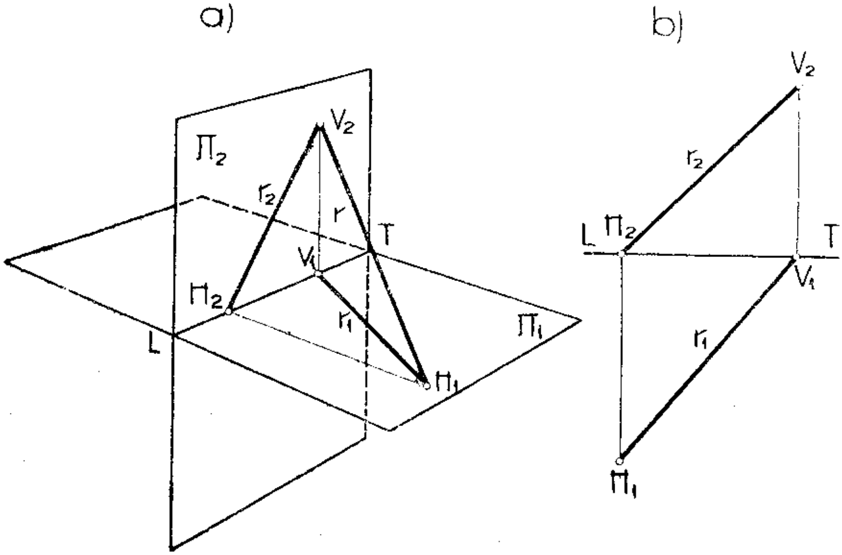


FIG. 40

en V_2 sobre la prolongación de r_2. El punto en que la proyección r_2 encuentra LT da H_2, proyección vertical de la traza horizontal; la otra proyección encuéntrase en H_1 sobre la prolongación de r_1.

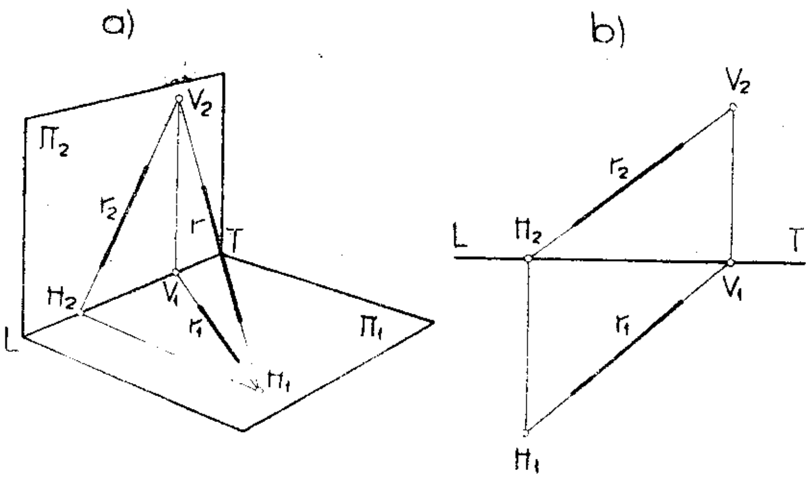


FIG. 41

4. — Según que la recta *r* no atraviese la I^a, la II^a, la III^a o la IV^a región del espacio, varía la posición de cada una de las trazas con respecto a *LT*.

La figura 42 se refiere a una recta que no atraviesa la I^a región. Ella es completamente invisible. Su traza horizontal (H_1, H_2) está en el semiplano horizontal posterior; su traza vertical, en el semiplano vertical inferior.

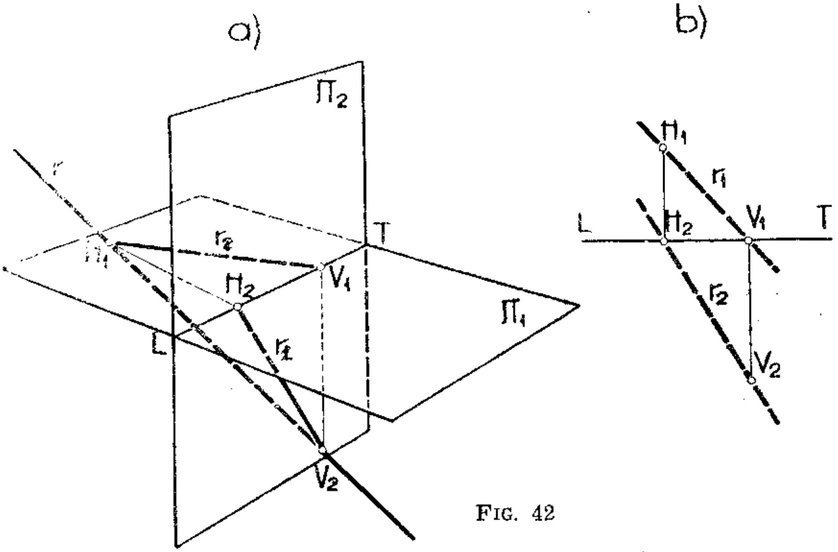


FIG. 42

La figura 43 se refiere, en cambio, a una recta que no atraviesa

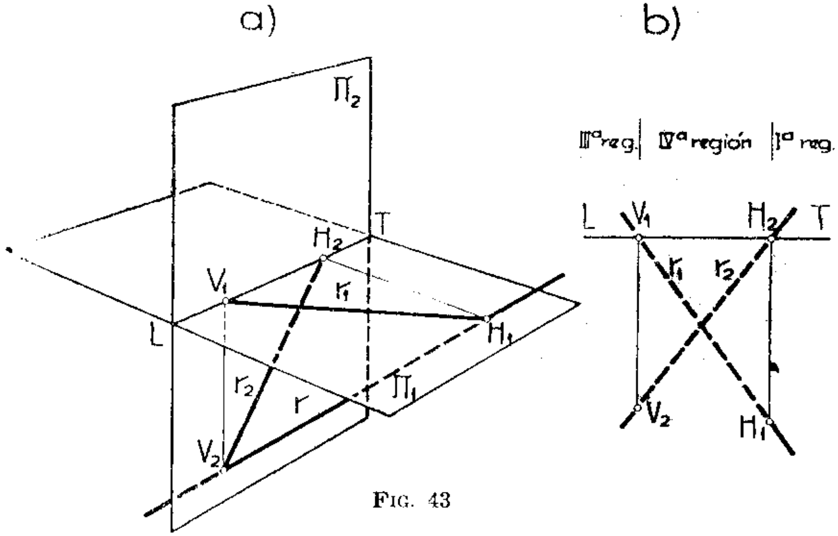


FIG. 43

la IIª región. Seguida desde la Iª región se ve que encuentra el plano horizontal en H_1, a una distancia $\overline{H_2H_1}$ del plano vertical; penetra luego en la IVª región, atravesando el plano vertical en V_2, a una distancia $\overline{V_1V_2}$ del plano horizontal. Continúa después en la IIIª región.

En la figura 44 se considera una recta que no atraviesa la IIIª región.

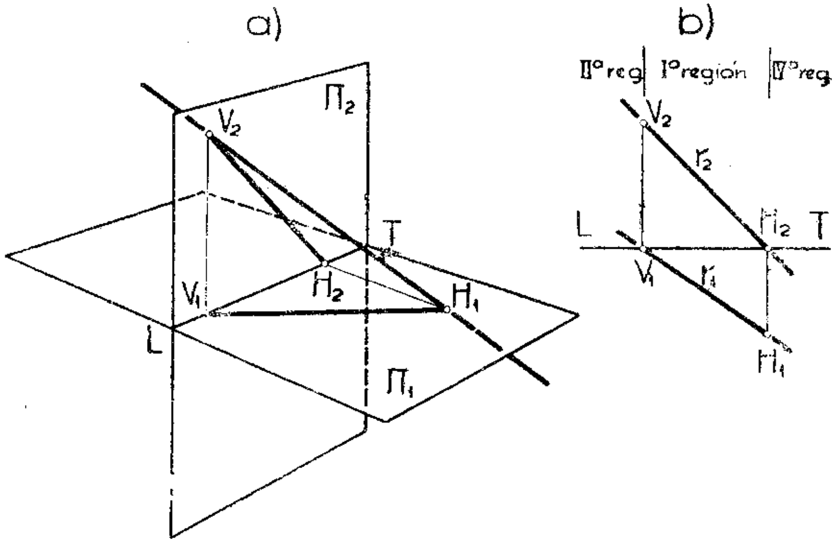


Fig. 44

La claridad de la figura y su analogía con los casos anteriores nos exime de la necesidad de mayores explicaciones.

En la figura 45 seguiremos el recorrido de una recta (r_1, r_2) a través de las regiones que atraviesa utilizando solamente la figura descriptiva.

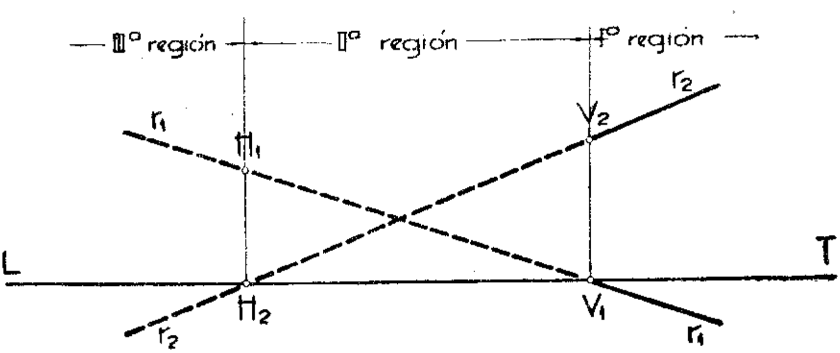


Fig. 45

Siguiéndola de derecha a izquierda se ve que la recta empieza en la Iª región, pues tiene la proyección vertical r_2 encima de LT y la horizontal r_1 debajo. Atraviesa el plano vertical en V_2 (traza vertical a una distancia $\overline{V_1V_2}$ del plano horizontal); penetra en la IIª región (invisible), donde las dos proyecciones r_1 y r_2 están encima de LT, volviéndose negativos los alejamientos, mientras las cotas van disminuyendo poco a poco hasta llegar a H_1 (traza horizontal), cuya cota es cero. Después de H_1 penetra en la IIIª región (invisible), y entonces son negativos tanto los alejamientos como las cotas. La IVª región no es atravesada.

§ 15. POSICIONES PARTICULARES DE LA RECTA

1. — Sea una recta paralela al plano horizontal, *recta horizontal* (fig. 46). Como todos sus puntos tienen igual cota, *la proyección vertical* de la recta es paralela a LT. La proyección horizontal, en cambio, forma con LT un ángulo igual al que la recta del espacio forma con el plano π_2. El punto (V_1, V_2) es la traza vertical. Traza horizontal no existe.

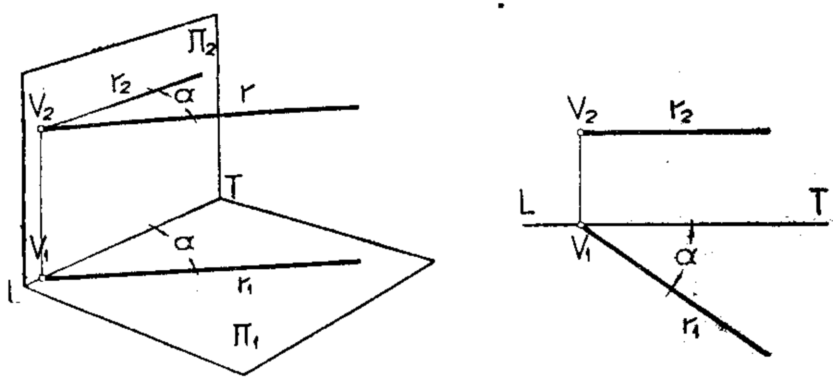


FIG. 46

Como caso particular, si la recta hállase situada en el plano π_1, su representación es la dada en la figura 47.

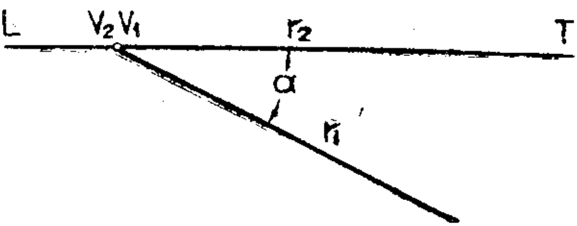


FIG. 47

2. — Si la recta es paralela al plano vertical, *recta frontal* (fig. 48), los alejamientos de todos sus puntos son iguales. Su *proyección horizontal es entonces paralela a LT*. La vertical forma con

LT un ángulo igual al que forma la recta del espacio con el plano π_1. En cuanto a trazas, no hay más que la horizontal.

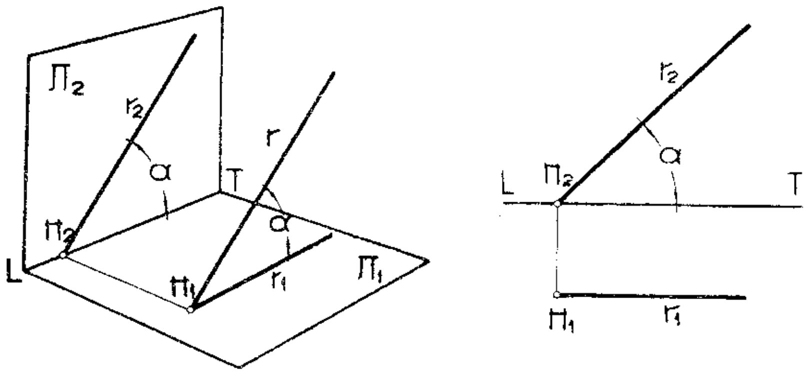


Fig. 48

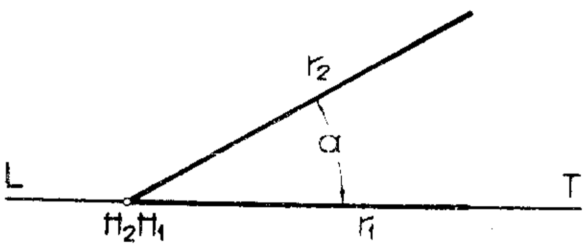


Fig. 49

Como caso particular, si la recta está en el plano vertical (fig. 49), la proyección vertical es la misma recta y la horizontal está en *LT*.

3. — Una recta paralela a la línea de tierra es paralela a los dos planos de proyección; sus proyecciones (fig. 50) son ambas paralelas a *LT*.

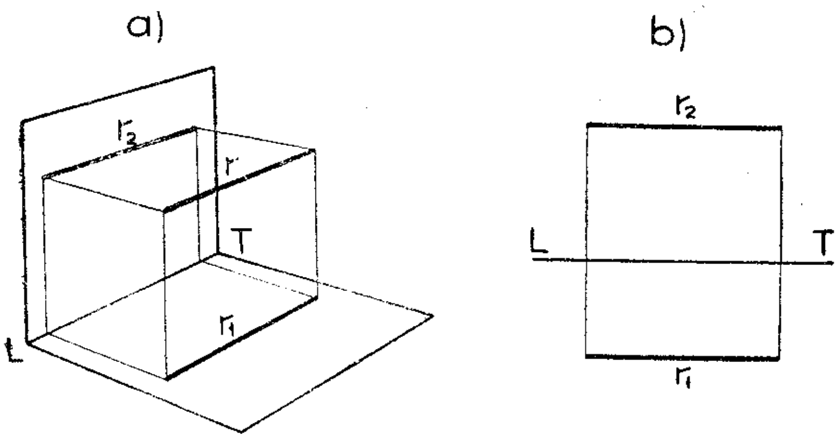


Fig. 50

Una recta paralela a LT no tiene trazas. Dícese también que las tiene en el infinito.

4. — Si la recta del espacio es perpendicular al plano horizontal, *recta vertical,* la proyección horizontal (fig. 51) se reduce a un punto

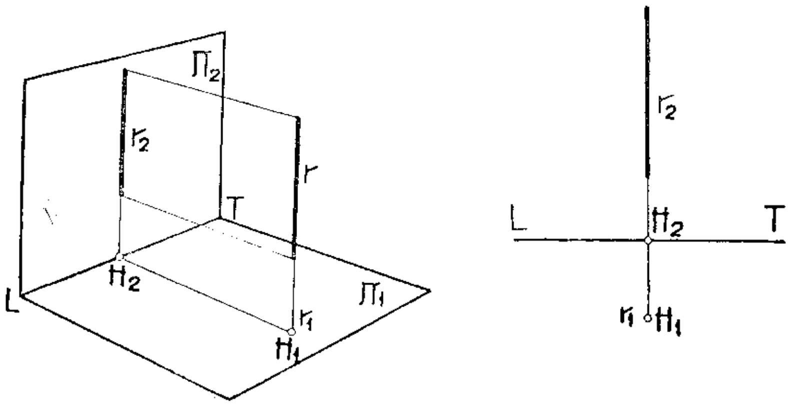


FIG. 51

que es también la traza horizontal. La proyección vertical es normal a LT. No hay traza vertical.

5. — Supongamos ahora una **recta perpendicular** al plano vertical *recta de punta* (fig. 52). La proyección vertical es un punto que es también la traza vertical. La proyección horizontal es perpendicular a LT. No hay traza horizontal.

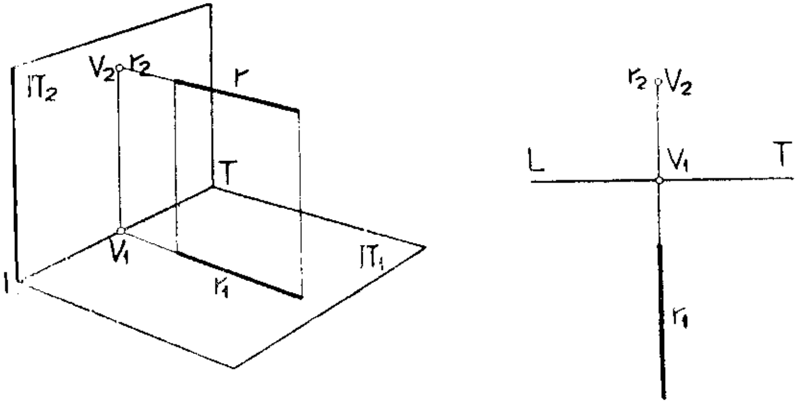


FIG. 52

6. — Toda recta situada en un plano de perfil llámase *recta de perfil* (fig. 53). Sus dos proyecciones son perpendiculares a LT. Hecho el abatimiento obtiénese una representación en la cual las dos proyecciones aparecen sobre la misma perpendicular a la línea de tierra.

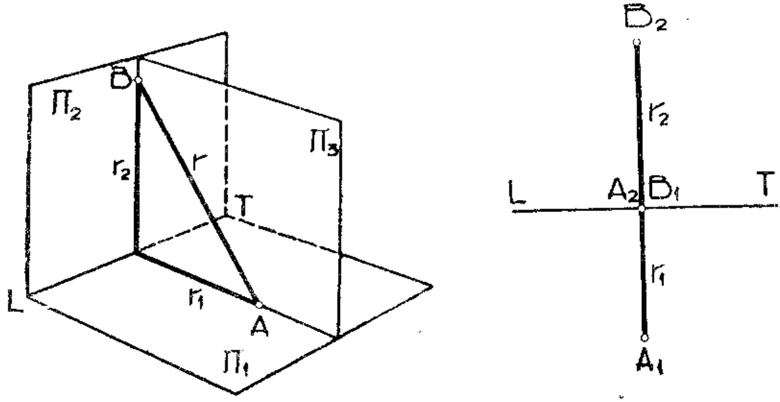


Fig. 53

En este caso las proyecciones horizontal y vertical no son suficientes para determinar la recta objetiva, pues ellas convienen a todas las rectas situadas en el mismo plano de perfil. Se recurre entonces a otros elementos: las proyecciones de dos de sus puntos, por ejemplo.

§ 16. RECTAS QUE SE CORTAN

1. — Sean dos rectas, a y b, que se cortan en el punto M (fig. 54). Las proyecciones M_1 y M_2 de M deben, naturalmente, encontrarse sobre una misma perpendicular a LT. Por otra parte, como M es un punto común a las dos rectas, su proyección M_1 debe encontrarse sobre a_1 y también sobre b_1: estará entonces en la intersección de a_1 y b_1. Del mismo modo, M_2 debe encontrarse en la intersección de a_2 y b_2. En conclusión: *si dos rectas son concurrentes, sus proyecciones hori*

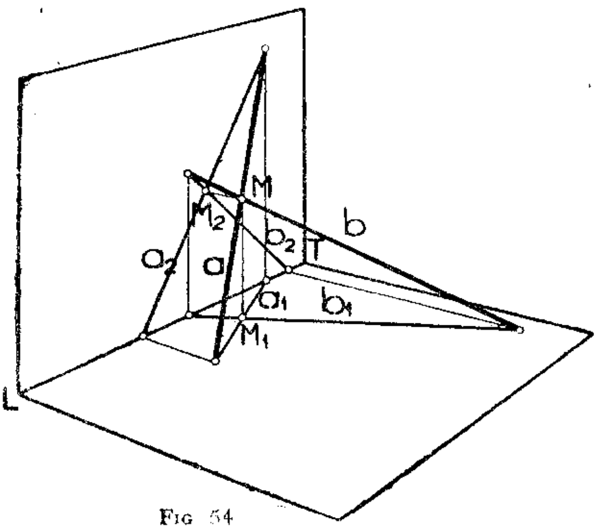


Fig. 54

zontales se cortan, lo mismo que sus proyecciones verticales, y los puntos de intersección están sobre una misma perpendicular a la línea de tierra.

La parte a) de la figura 55 es la representación de dos rectas que se cortan. Las rectas c y d de la parte b) de la misma figura no se cortan, pues los puntos de intersección de las proyecciones de igual nombre no están sobre una misma perpendicular a LT.

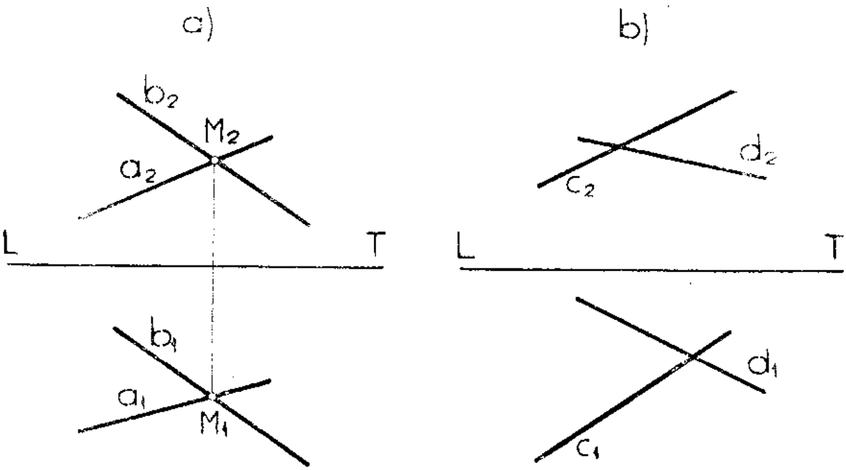


FIG. 55

2. — Dos rectas concurrentes pueden tener común una de las proyecciones. Es lo que ocurre cuando las dos rectas están situadas en un mismo plano perpendicular a uno de los planos de proyección. La figura 56 se refiere a dos rectas concurrentes que tienen la misma proyección horizontal.

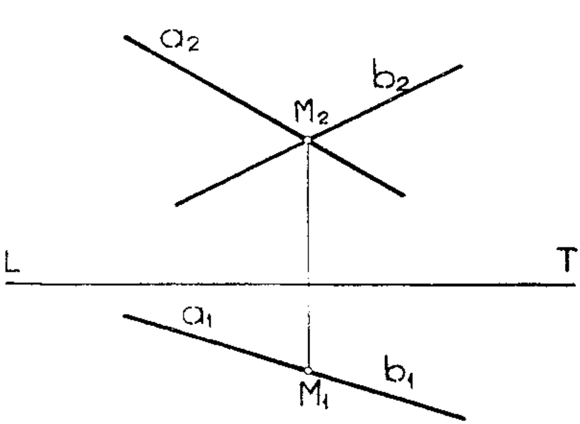


FIG. 56

§ 17. RECTAS PARALELAS

1. — Sean dos rectas paralelas AB y CD (fig. 57). Sus proyecciones horizontales son obtenidas mediante los planos proyectantes

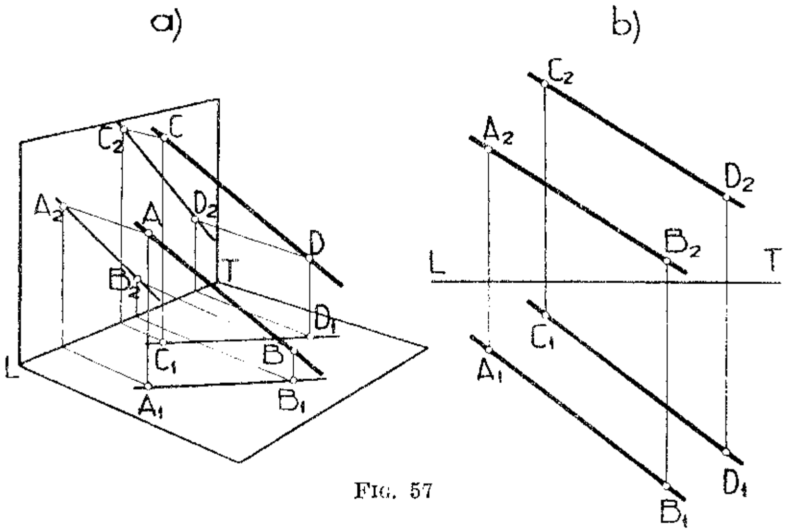


FIG. 57

ABB_1A_1 y CDD_1C_1. Estos planos tienen AB paralela a CD por hipótesis y AA_1 paralela a CC_1 por ser perpendiculares a un mismo plano. La *Geometría Elemental* enseña que planos como ABB_1A_1 y CDD_1C_1 son paralelos y que sus intersecciones con un tercer plano (el horizontal) son rectas paralelas. Estas intersecciones no son sino las proyecciones horizontales de las rectas dadas.

Con un razonamiento completamente análogo, considerando los planos proyectantes ABB_2A_2 y CDD_2C_2 se demuestra que también las proyecciones verticales son paralelas entre sí. En consecuencia: *las proyecciones de igual nombre de dos rectas paralelas son paralelas*, y, recíprocamente, *si las proyecciones de igual nombre de dos rectas son paralelas, las rectas son paralelas.*

2. — Resulta entonces que si por un punto dado (P_1, P_2) se quiere trazar una paralela a la recta (r_1, r_2) (fig. 58), bastará trazar por cada una de las proyecciones P_1 y P_2 una paralela a la proyección de igual nombre de la recta.

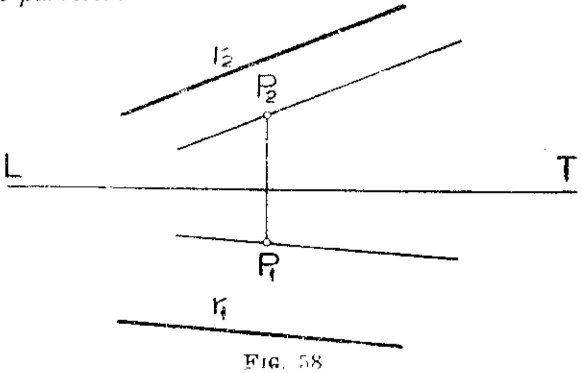


FIG. 58

3. — Es fácil demostrar que si dos rectas son paralelas, la razón que existe entre un segmento de la primera y un segmento de la segunda es igual a la razón que existe entre sus respectivas proyecciones homónimas. Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ los segmentos considerados (figura 59). Tomando

$$\overline{CD'} = \overline{AB} \quad [1]$$

se tiene también

$$\overline{C_1D'_1} = \overline{A_1B_1}, \quad [2]$$

y como, por el teorema de Thales,

$$\frac{\overline{CD'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{C_1D'_1}}{\overline{C_1D_1}}$$

resulta de [1] y [2]

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{C_1D_1}}.$$

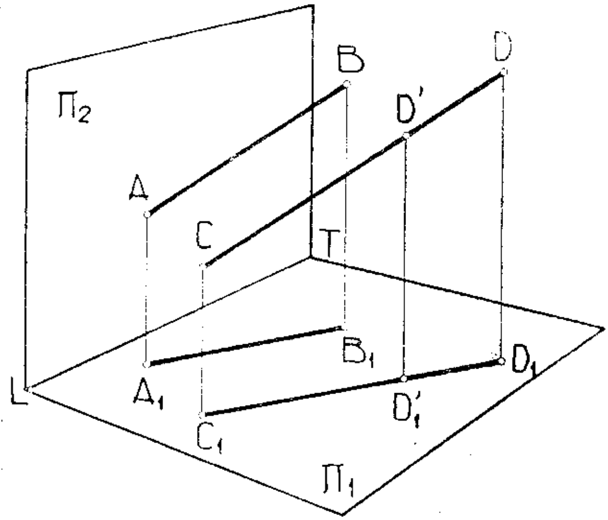


Fig. 59

Del mismo modo se procede para las proyecciones verticales.

4. — Es necesario, a veces, reconocer si dos rectas **de perfil** AB y CD, por ejemplo, son paralelas. Sus proyecciones **son, como** sabemos, perpendiculares a LT y, en consecuencia, paralelas (fig. 60). Si las rectas del espacio son paralelas, determinan un plano. Las rectas AB y CD, encontrándose en este plano, deben ser concurrentes. Basta entonces verificar si en la figura descriptiva la recta MN es perpendicular a LT.

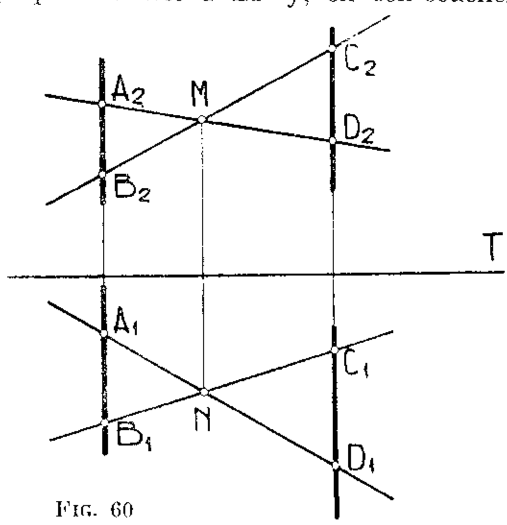


Fig. 60

§ 18. APLICACIONES

1. — Dadas las proyecciones de una recta, determinar sobre ésta: a) un punto

de cota dada, b) un punto de alejamiento dado.

a) Sean r_1 y r_2 las proyecciones de la recta y c la cota dada (fig. 61). Tracemos una paralela a LT a una distancia c. La intersección P_2 de esta paralela y de r_2 es la proyección vertical del punto. La proyección horizontal P_1 se obtiene trazando desde P_2 la normal a LT.

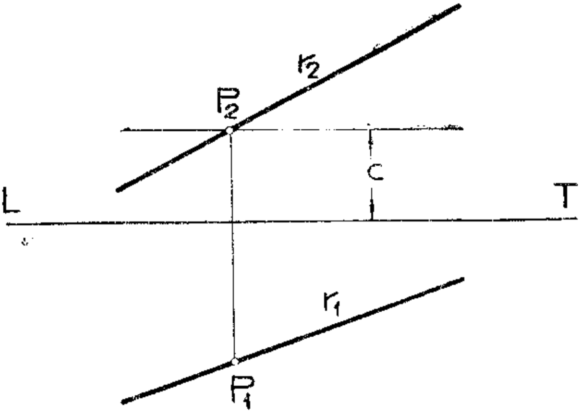


Fig. 61

b) Si el punto buscado debe tener un alejamiento dado a, por medio de análogas construcciones (fig. 62) se determinan fácilmente las proyecciones P_1 y P_2.

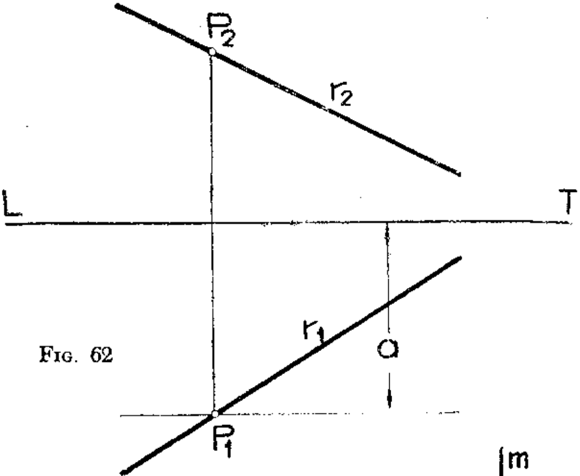


Fig. 62

2. — Dadas las proyecciones horizontal y vertical de una recta, determinar su proyección sobre un plano de perfil.

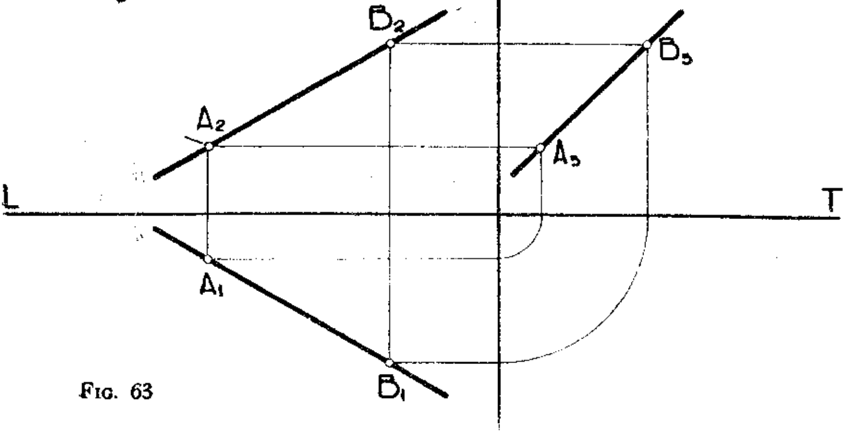


Fig. 63

El problema se resuelve buscando el perfil de dos cualesquiera de sus puntos (fig. 63). El perfil de A es A_3 y el de B es B_3. La recta A_3B_3 es el perfil de la recta AB.

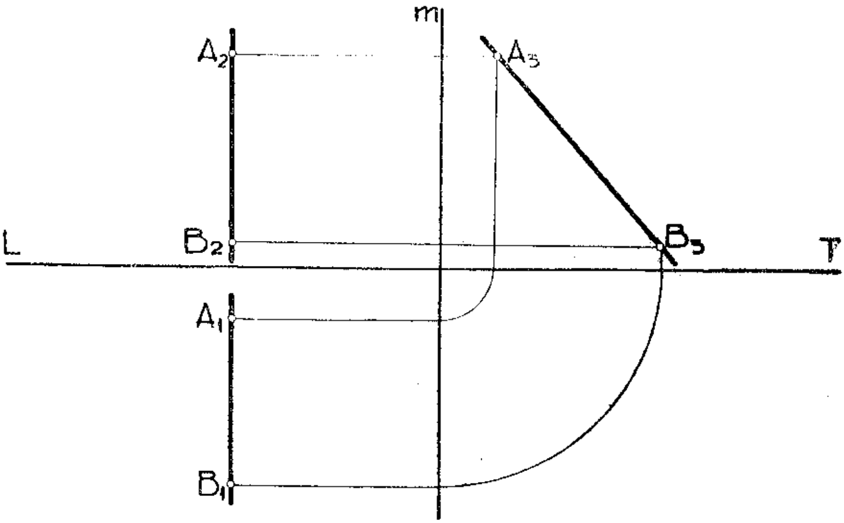


Fig. 64

3. — Hallar el perfil de una recta de perfil. Se procede como en el caso anterior (fig. 64). La recta A_3B_3 es el perfil buscado y el segmento $\overline{A_3B_3}$ da la verdadera magnitud del segmento $\overline{AB}$ del espacio.

4. — Una recta es paralela a LT; encontrar su distancia de LT. Sean r_1 y r_2 las proyecciones de la recta (fig. 65). Su perfil es el punto R. La distancia buscada es $\overline{OR}$.

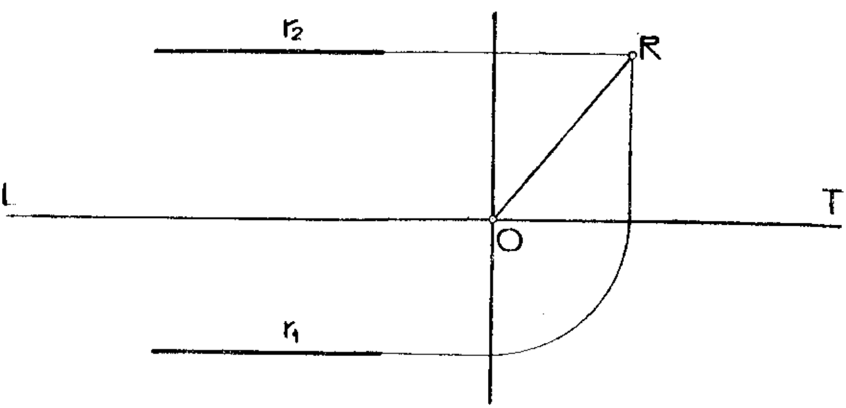
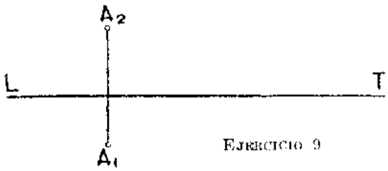


Fig. 65

EJERCICIOS



Ejercicio 9

9. El punto $A \equiv (A_1, A_2)$ es el extremo de un segmento de 35 mm de longitud, paralelo a los dos planos de proyección. Dibujar las proyecciones del segmento.

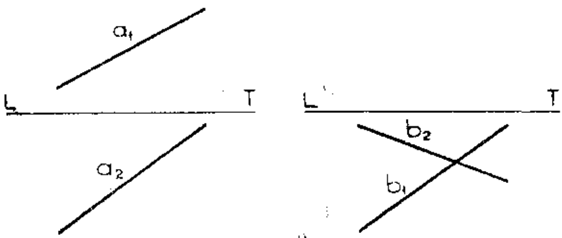
10. Dar las proyecciones de dos rectas coplanares.

11. Dar las proyecciones de dos rectas alabeadas.

12. Dar las proyecciones de la recta que pasando por un punto P de alejamiento 2 y cota 5, es paralela al plano vertical y forma un ángulo de 30° con el plano horizontal.

13. Un segmento de recta, paralelo al plano horizontal es oblicuo con respecto al vertical. Dar su figura descriptiva sabiendo que dista 12 mm del plano horizontal, que sus extremos están a 6 mm y 20 mm respectivamente del plano vertical, y que su longitud es 32 mm.

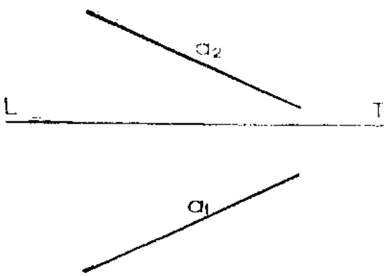
14. Determinar las trazas de las rectas $a \equiv (a_1, a_2)$ y $b \equiv (b_1, b_2)$.



Ejercicio 14

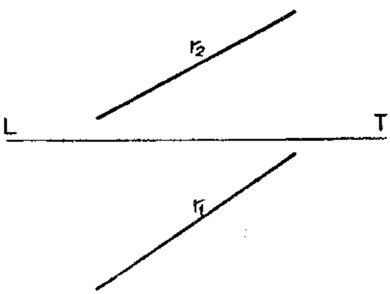
15. Dar la representación de una recta que tiene un punto A en el plano vertical, a un metro del horizontal, y un punto B distante 3 metros de ambos planos.

16. Estudiar a través de los distintos diedros la recta $a \equiv (a_1, a_2)$.



Ejercicio 16

17. Encontrar la intersección de la recta $r \equiv (r_1, r_2)$ con el plano bisector del primer diedro.



Ejercicio 17

Capítulo III

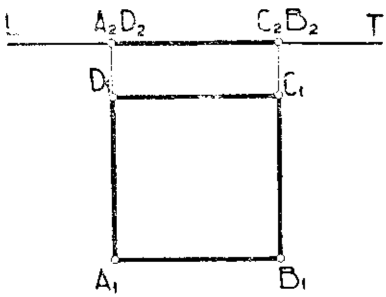
APLICACIONES A LAS PROYECCIONES DE SUPERFICIES Y CUERPOS

§ 19. SUPERFICIES

1. — Los cuerpos y las superficies hállanse limitados por líneas. Las proyecciones de los cuerpos y de las superficies se determinan encontrando las proyecciones de sus diferentes líneas.

Los conocimientos hasta aquí adquiridos permiten hacer una serie de aplicaciones sencillas acerca de superficies y cuerpos.

2. — Supongamos un cuadrado situado en el plano horizontal (fig. 66). La proyección horizontal es, en cualquiera de las dos posi-



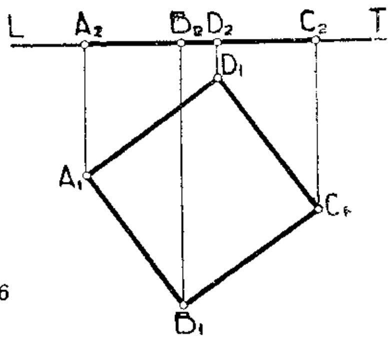
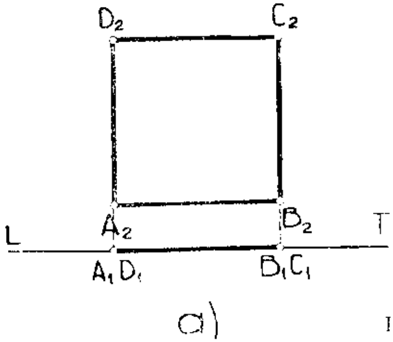


Fig. 66

ciones consideradas, el mismo cuadrado. La vertical es un segmento de recta situado sobre LT.



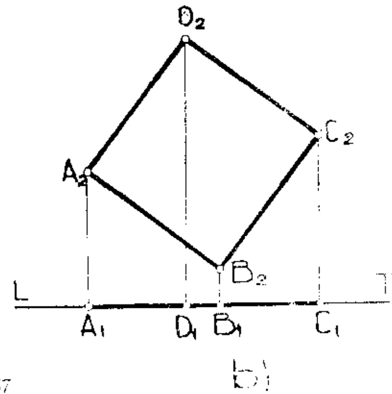


Fig. 67

3. — Si el cuadrado está en el plano vertical (fig. 67), la proyección vertical es el mismo cuadrado; la horizontal está sobre *LT*.

4. — Si el cuadrado está situado en un plano paralelo al plano horizontal (fig. 68), la proyección horizontal es un cuadrado igual al del espacio y la vertical es un segmento de recta paralelo a *LT*.

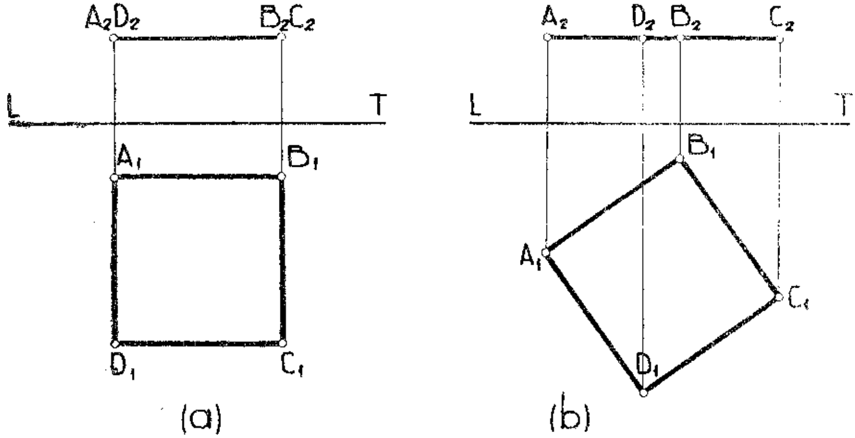


Fig. 68

5. — Si el cuadrado hállase en un plano paralelo al vertical (fig. 69), la proyección vertical es un cuadrado igual al dado y la horizontal es un segmento de recta paralelo a *LT*.

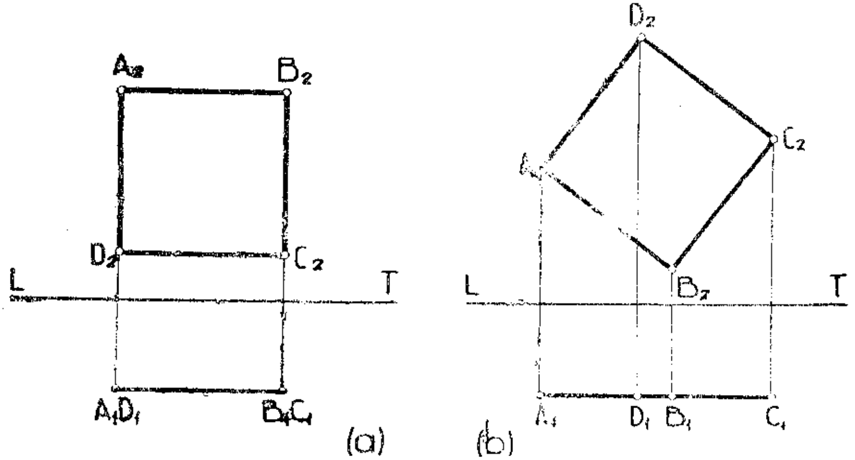


Fig. 69

6. — La figura 70 se refiere a un cuadrado situado en un p... perpendicular al plano π_1. La proyección horizontal es un segm...

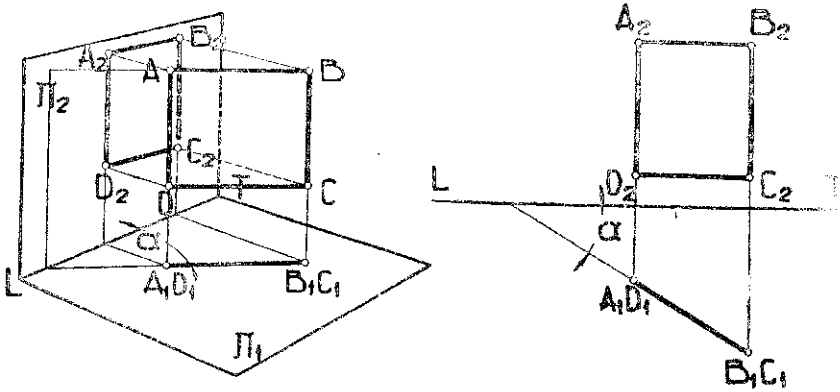


Fig. 70

de recta inclinado, con respecto a LT, de un ángulo igual al que form... el plano del cuadrado con el plano π_2; la vertical es un rectángu...

7. — Si el plano del cuadrado es perpendicular al plano π_2, s... obtiene la representación indicada en la figura 71.

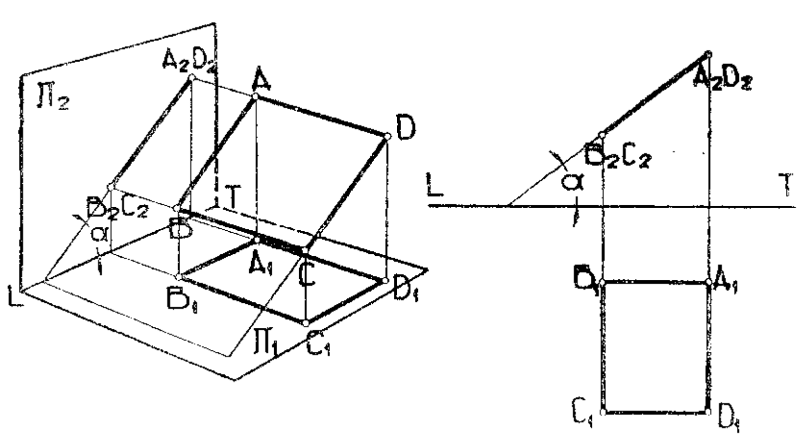


Fig. 71

8. — El cuadrado puede estar en un plano de perfil. Entonces sus proyecciones horizontal y vertical se reducen (figs. 72 y 73) a dos segmentos de recta perpendiculares a LT.

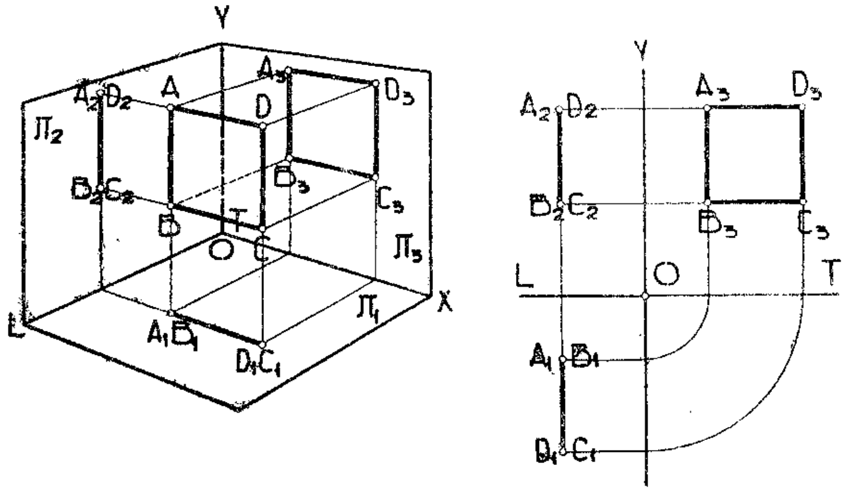


Fig. 72

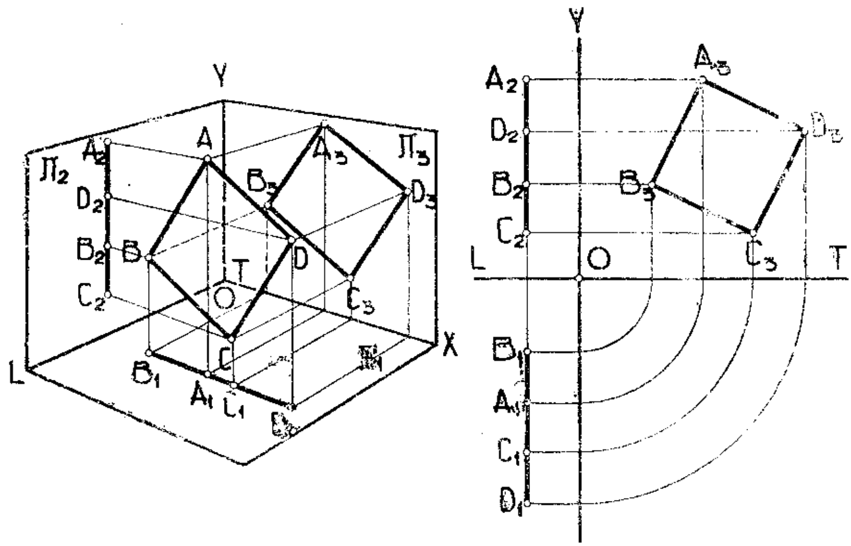


Fig. 73

9. — En fin, si el cuadrado está en una posición cualquiera, las proyecciones (fig. 74) son dos paralelogramos que, en general, no nos permiten, por ahora, conocer las verdaderas dimensiones de aquél.

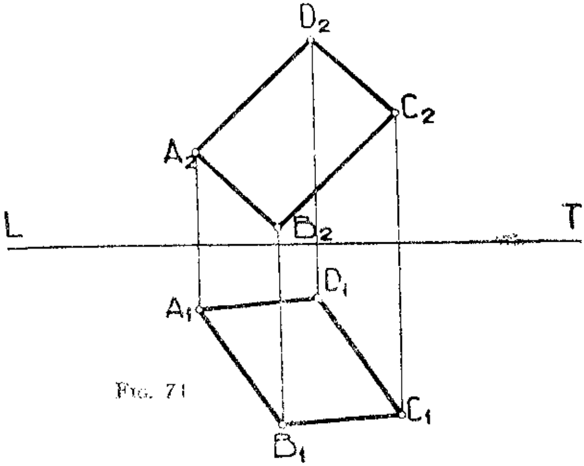


Fig. 74

10. — Consideremos ahora un semicírculo situado en un plano paralelo al plano π_2 y con el diámetro paralelo a LT. La proyección vertical (fig. 75 a) es un semicírculo igual al dado; la horizontal es un segmento de recta de longitud igual al diámetro, paralelo a LT y distante de ésta de cuanto se separa del plano

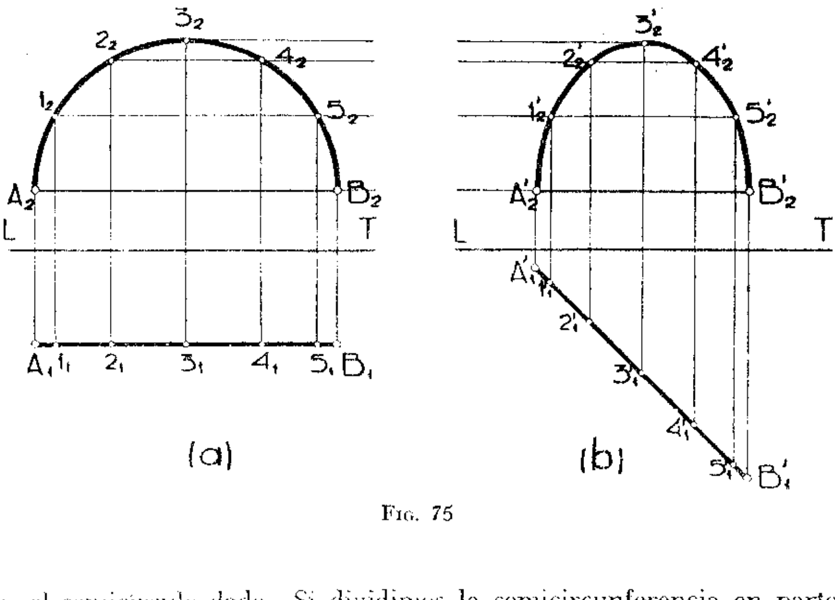


Fig. 75

π_2 el semicírculo dado. Si dividimos la semicircunferencia en partes iguales, 6 por ejemplo, (A_1, A_2), $(1_1, 1_2)$, $(2_1, 2_2)$, $(3_1, 3_2)$, $(4_1, 4_2)$, $(5_1, 5_2)$ y (B_1, B_2) son las proyecciones de los puntos de división.

En la figura 75 b se considera el semicírculo formando un ángulo de 45° con el plano vertical. Como el diámetro se mantiene

siempre paralelo al plano horizontal, su proyección horizontal da la verdadera magnitud y forma con LT un ángulo de 45°; su proyección vertical es $\overline{A'_2B'_2}$ paralela a LT. Para completar la proyección vertical del semicírculo pensemos que las cotas de los puntos de la semicircunferencia no han variado con respecto al caso anterior. Si entonces se levantan las normales a LT, desde $1'_1$ $2'_1$, $3'_1$, $4'_1$ $5'_1$, hasta encontrar las horizontales que parten de los puntos 1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2, de la figura 75 a, se obtiene una semielipse que completa la proyección vertical del semicírculo.

11. — En la figura 76 a se ha considerado un exágono regular paralelo al plano vertical y con un lado inclinado de 20° con respecto al plano horizontal.

En 76 b se ha imaginado el mismo exágono formando un ángulo de 45° con respecto al plano vertical, manteniendo siempre un lado a 20° con respecto al horizontal. La construcción es análoga

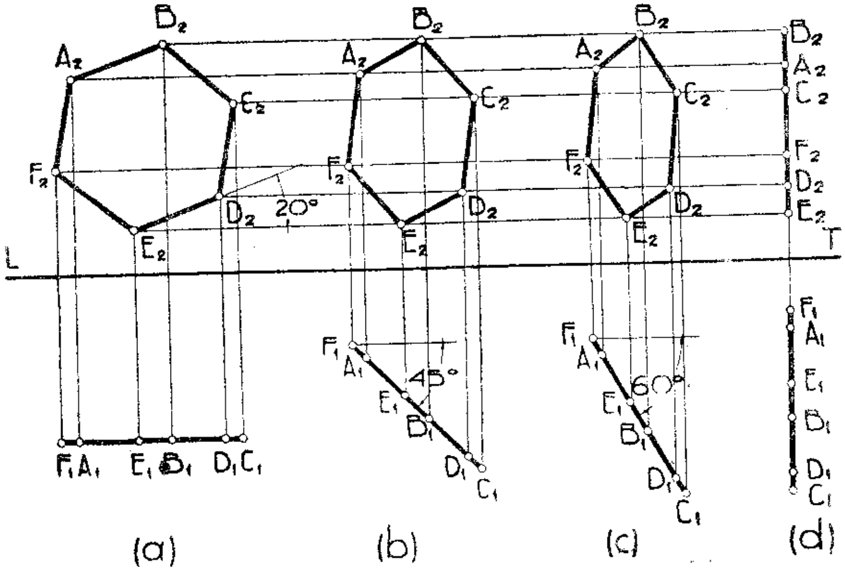


FIG. 76

a la indicada para el semicírculo. Se traza ante todo el segmento $\overline{F_1C_1}$ formando un ángulo de 45° con respecto a la línea de tierra Se marcan los puntos A_1, E_1, B_1, D_1 y se tiene así, en F_1, A_1, E_1 B_1, D_1, C_1, la proyección horizontal del exágono.

En la parte 76 c se ha hecho la representación del exágono a 60° con respecto al plano π_2.

En la parte 76 d se tiene, en cambio, el exágono en un plano perpendicular a la línea de tierra

§ 20. CUERPOS GEOMETRICOS. CASOS MAS SENCILLOS

1. — Supongamos ahora un prisma recto cuadrangular perpendicular al plano horizontal (fig. 77). Las bases son paralelas al plano horizontal y se proyectan sobre este plano en verdadera magnitud; las proyecciones verticales son paralelas a *LT*. Las aristas laterales del prisma son perpendiculares al plano horizontal y sus proyecciones sobre este plano quedan reducidas a puntos; las proyecciones verticales son segmentos de rectas perpendiculares a *LT* y dan la verdadera magnitud de las aristas del espacio. La proyección $\overline{H_2D_2}$ ha sido trazada de puntos porque la correspondiente arista $\overline{HD}$ del espacio es invisible para el observador.

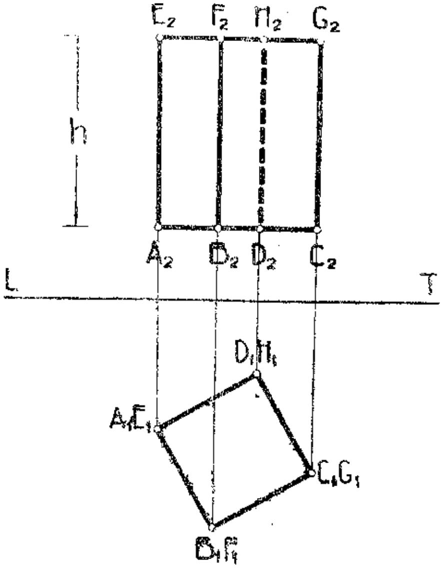


FIG. 77

La figura 77 permite conocer todos los elementos del prisma; puede hacerse entonces el desarrollo de su superficie. Sobre una horizontal se llevan los segmentos *AB*, *BC*, *CD* y *DA* iguales al lado de la base. Desde cada uno de los puntos obtenidos se levantan perpendiculares de longitud *h* igual a la longitud de la proyección vertical de una de las aristas laterales del prisma. Se obtiene así el rectángulo *ABCDAEHGFE*, que es el desarrollo de la superficie lateral del prisma dado. Agregando las bases se tiene el desarrollo total del mismo.

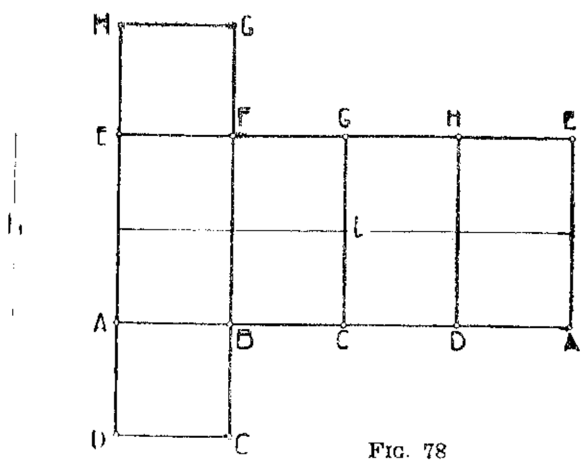


FIG. 78

Si se gira el prisma anterior hasta que dos de sus caras sean paralelas al plano π_2 (figura 79), las proyecciones verticales de aristas, como $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$, se confunden, y entonces la proyección vertical del prisma es un rectángulo.

La figura 80 da las proyecciones horizontal, vertical y de perfil de un prisma recto de base rectangular (por ejemplo, una pieza de madera de escuadría rectangular), con dos caras paralelas al plano π_2.

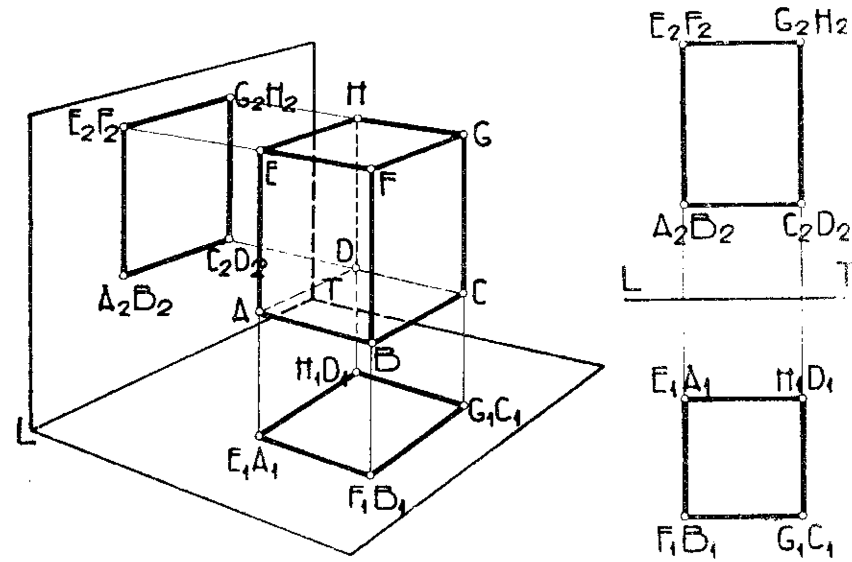


FIG. 79

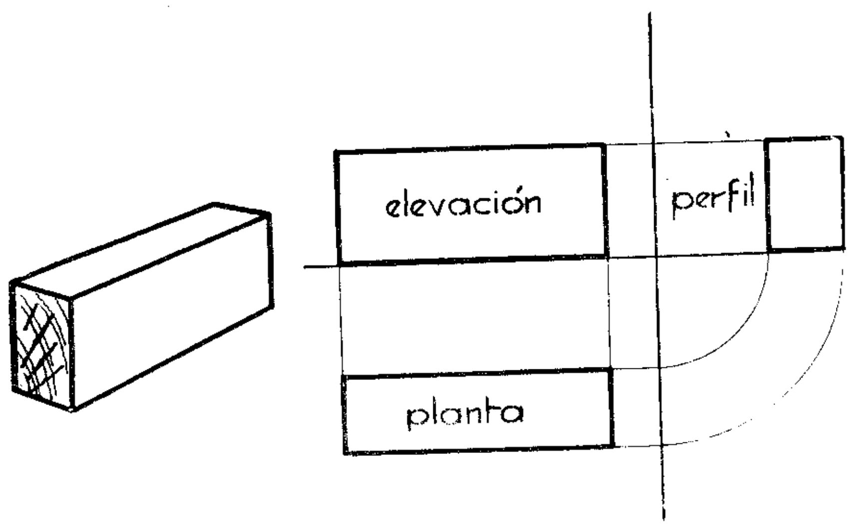


FIG. 80

La figura 81 considera, en cambio, una combinación de prismas rectos (banco de piedra).

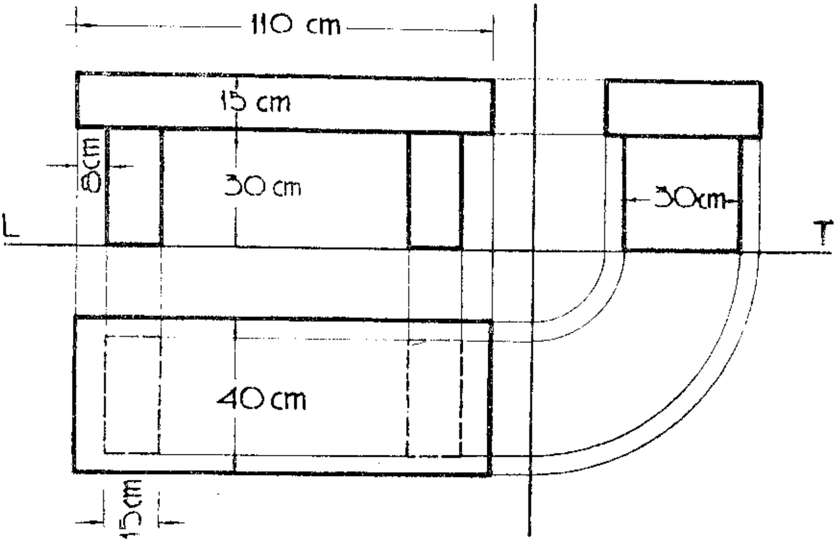


Fig. 81

2. — Supongamos ahora un prisma recto de base ortogonal irregular (por ejemplo, una pieza de madera a escuadría cuadrada, achaflanada), con la base sobre el plano horizontal (fig. 82). Como el prisma es vertical, su proyección horizontal da la verdadera magnitud de las bases (se dice también de su sección recta). Su proyección vertical está formada por las proyecciones de las bases, paralelas a *LT*, y por las proyecciones de las aristas laterales, perpendiculares a *LT*.

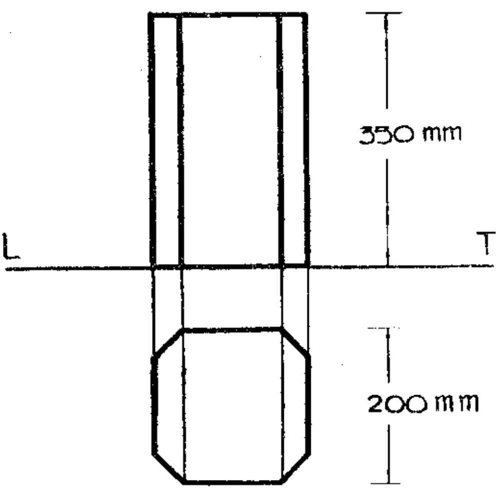


Fig. 82

3. — La figura 83 da la representación, en dos posiciones, de un prisma recto triangular situado perpendicularmente al plano π_2.

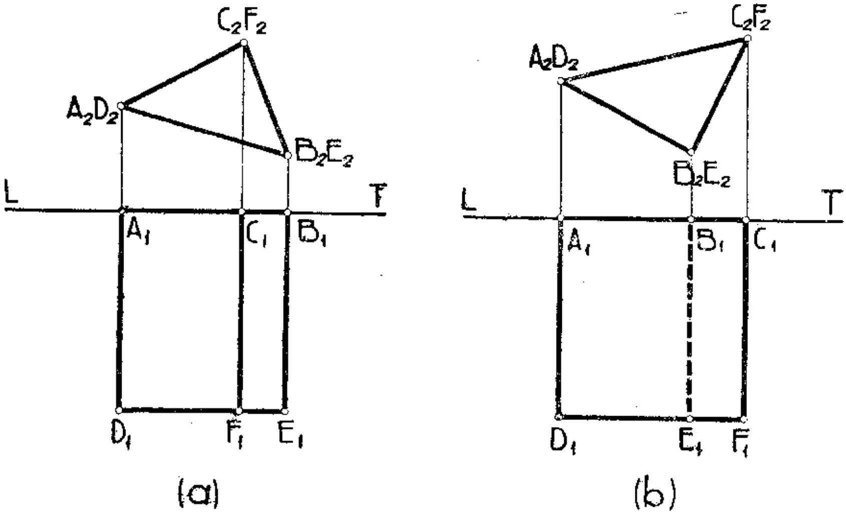


Fig. 83

4. — Trátese ahora de un prisma recto rectangular inclinado con respecto al plano π_1 y paralelo al plano π_2 (fig. 84). Las caras paralelas al plano vertical se proyectan sobre éste en tamaño real. Las

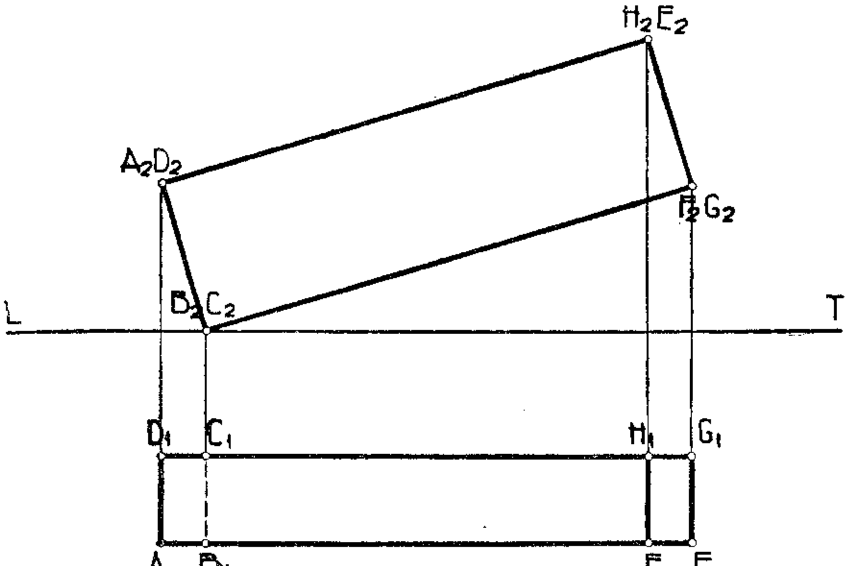


Fig. 84

otras caras, perpendiculares a las primeras, son oblicuas con respecto al plano π_1, pero dan aquí su ancho verdadero.

5. — La representación de un cilindro recto perpendicular al plano π_1 es análoga a la del prisma. Si suponemos (fig. 85) que el cilindro descansa sobre el plano horizontal, las bases se proyectan horizontalmente en un círculo que da su verdadera magnitud; verticalmente se proyectan según dos segmentos de rectas iguales al diámetro, estando sobre *LT* la correspondiente a la base inferior y paralelamente a *LT*, a una distancia igual a la altura del cilindro, la correspondiente a la base superior.

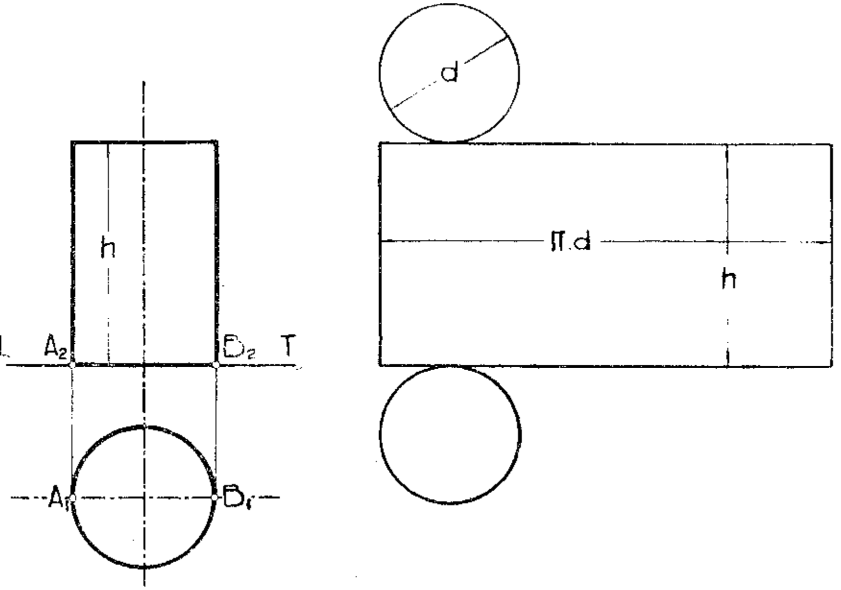


FIG. 85

De las generatrices, perpendiculares todas ellas al plano π_1, se proyectan únicamente las dos que corresponden al diámetro *AB* paralelo a *LT*. La proyección vertical del cilindro queda, pues, reducida a un rectángulo.

Conocidas las proyecciones es fácil dibujar el desarrollo de la superficie del cilindro. La superficie lateral da un rectángulo de base πd igual a la longitud de la circunferencia de la base del cilindro y de altura *h* igual a la altura del mismo. Para el desarrollo total se agregan las bases.

6. — Sea una pirámide recta con la base en el plano horizontal. Imaginemos que la base sea un exágono regular. Como la base está en el plano horizontal, ella misma es su proyección horizontal (fig. 86). Las aristas laterales son segmentos que unen la cúspide de la pirámide

con cada uno de los vértices de la base. La proyección V_1 de la cúspide estará en el centro del exágono; la vertical V_2 estará a una distancia h de la línea de tierra, igual a la altura de la pirámide. Uniendo entonces V_1 con A_1, B_1, C_1, . . ., se tienen las proyecciones horizontales

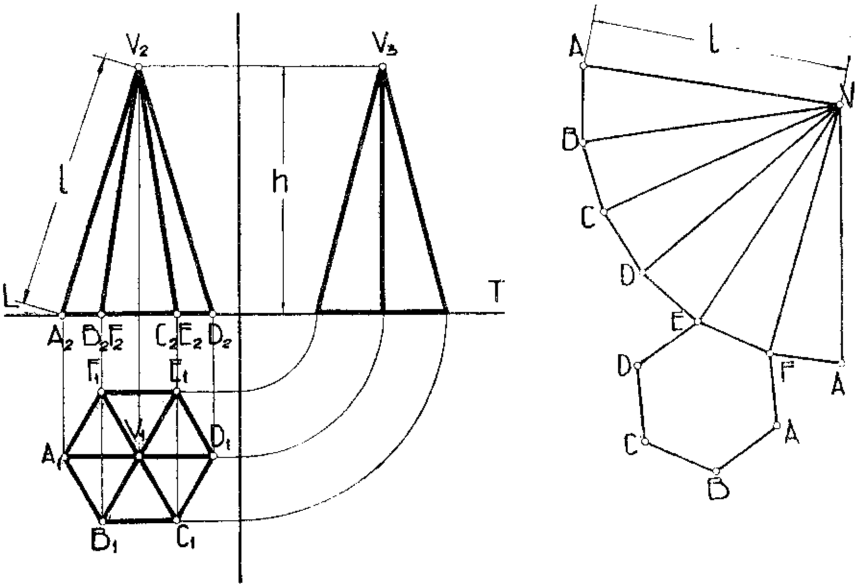


FIG. 86

de las aristas laterales; las proyecciones verticales se obtendrán uniendo V_2 con A_2, B_2, C_2, . . . Una cara de la pirámide, la AVB del espacio, por ejemplo, tendrá como proyecciones $A_1V_1B_1$ (horizontal) y $A_2V_2B_2$ (vertical).

El desarrollo se obtiene fácilmente notando que la superficie lateral está formada por tantos triángulos isósceles como lados tiene la base. Cada uno de estos triángulos tiene como base un lado de la base de la pirámide, como lados dos aristas laterales. De estas aristas hay dos, AV y DV del espacio, que son paralelas al plano vertical; se proyectan, pues, verticalmente en su verdadera magnitud l. Es posible entonces construir el desarrollo de la superficie lateral de la pirámide. Agregando la base se tiene el desarrollo total.

7. — La figura 87 se refiere a una pirámide recta cuadrangular con la base en el plano π_1. La representación 87 a, en la que se ha supuesto un lado de la base paralelo a LT, no ofrece ninguna dificultad después de lo establecido en el número anterior.

En la parte 87 b el lado DA de la base forma un ángulo de 65° con LT. Notemos que ni en 87 a ni en 87 b se tiene el tamaño real de ninguna arista.

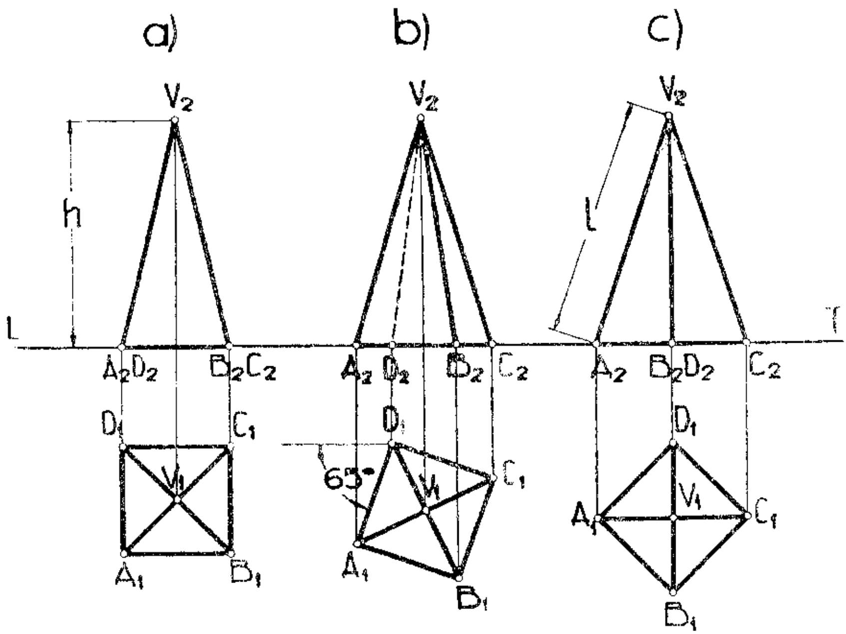


Fig. 87

En la parte 87 c, en cambio, las aristas $\overline{AV}$ y $\overline{CV}$ del espacio aparecen en $\overline{A_2V_2}$ y $\overline{C_2V_2}$ según su verdadera magnitud l.

8. — Consideremos ahora una pirámide oblicua con la base en el plano horizontal.

La base de la pirámide es también su propia proyección horizontal (fig. 88).

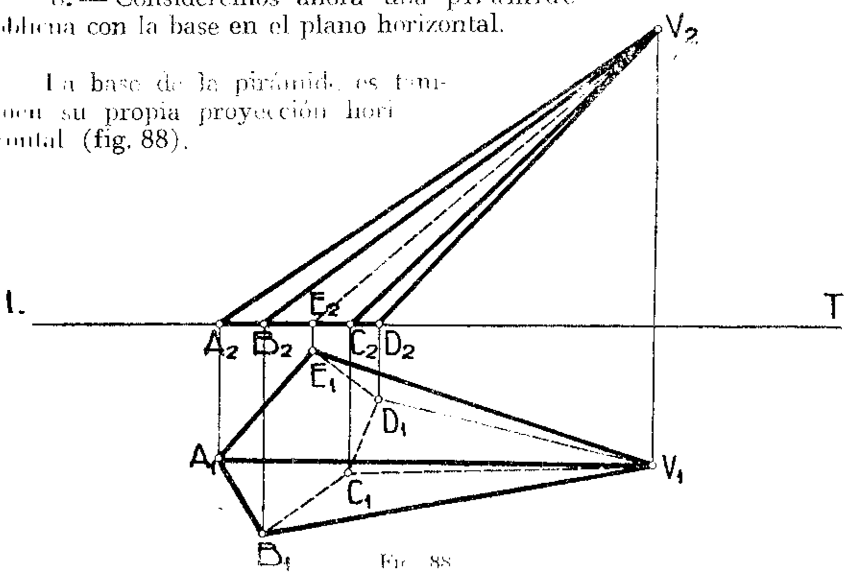


Fig. 88

Verticalmente se proyecta sobre LT. Establecida la cúspide (V_1, V_2) de acuerdo con los datos suministrados, únense ambos puntos con las correspondientes proyecciones de los vértices de la base y se tiene la representación de la pirámide. Como las aristas laterales no aparecen en verdadera magnitud, no podemos, por ahora, efectuar el desarrollo de la pirámide.

9. — Sea un tronco, a bases paralelas, de una pirámide recta cuadrangular, descansando sobre el plano horizontal (fig. 89). Para dar su representación dibujamos primero las proyecciones de la pirámide entera (figura 90). La base superior se proyecta verticalmente según un segmento de recta, E_2H_2, F_2G_2, paralelo a LT y a una distancia de ésta igual a la altura del tronco. Resultan así limitadas las proyecciones verticales de las aristas laterales del tronco. Para limitar las proyecciones horizontales basta bajar desde E_2H_2 y F_2G_2 perpendiculares a LT hasta encontrar las correspondientes aristas en E_1, F_1, G_1 y H_1. El cuadrado $E_1F_1G_1H_1$ es la proyección horizontal, en verdadera magnitud, de la base superior. El desarrollo del tronco es posible no obstante no aparecer ninguna arista lateral en tamaño real. En efecto, la altura $\overline{VS}$ del triángulo isósceles BVC (fig. 90) es paralela al plano π_2; aparece pues, en $\overline{V_2S_2}$ (que coincide con $\overline{V_2C_2}$ y $\overline{V_2B_2}$) en verdadera magnitud. El conocimiento de la base y de la altura permite construir un triángulo isósceles; es posible entonces dibujar el desarrollo de la pirámide entera y del tronco considerado.

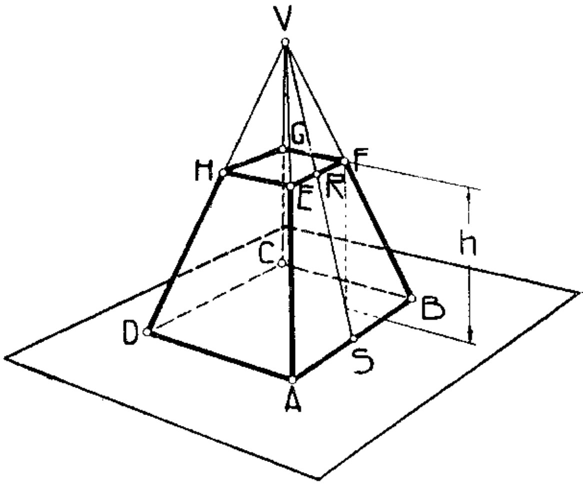


Fig. 89

10. — La representación de un cono recto es análoga a la de la pirámide. La figura 91 se refiere a un cono circular con la base sobre el plano horizontal. La proyección horizontal de la base es entonces ella misma, la proyección vertical es el segmento de recta $\overline{A_2B_2}$ sobre LT; $\overline{A_2B_2}$ es también la proyección vertical del diámetro $\overline{AB}$ de la base, paralelo a LT. La cúspide se proyecta en V_1 y V_2 Uniendo V_2 con A_2 y B_2 se tienen las proyecciones verticales de las generatrices paralelas al plano π_2 El triángulo isósceles $A_2V_2B_2$ es la

proyección vertical del cono. Una generatriz cualquiera, la correspondiente al punto C de la base, por ejemplo, se obtiene trazando desde C_1 la perpendicular a LT. Uniendo C_2 con V_2 el segmento

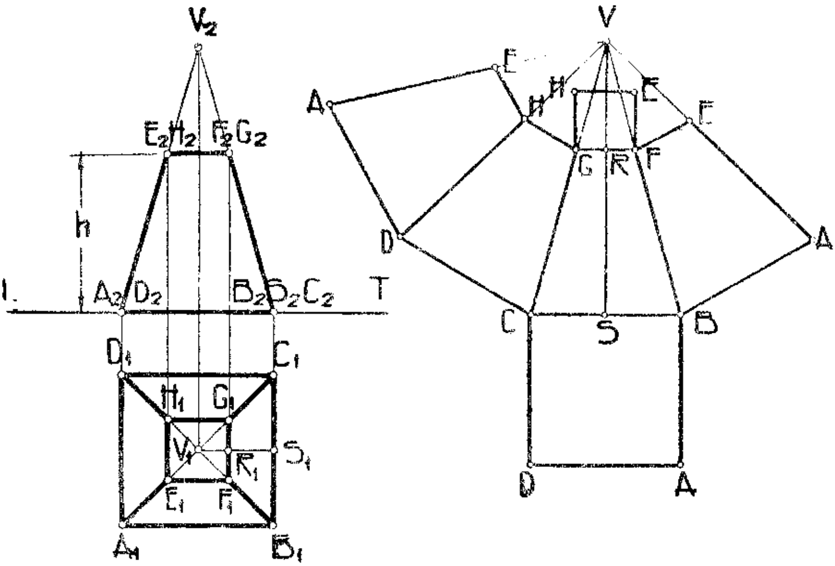
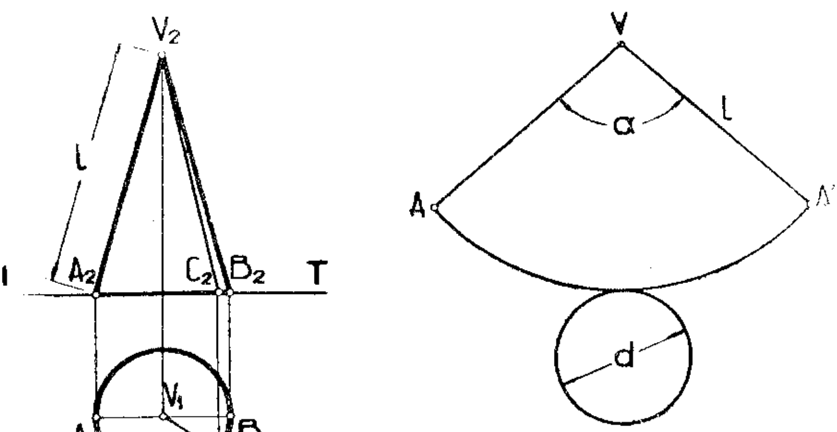


FIG. 90

V_2C_2 es la proyección vertical de la generatriz considerada; $\overline{V_1C_1}$ es su proyección horizontal.



$\widehat{AA'} = \pi . d$ $\qquad$ $\alpha = \dfrac{360^\circ . d}{2L}$

FIG. 91

El desarrollo del cono no ofrece dificultad. Tomado un punto V como centro se traza con radio l un arco de circunferencia. Si sobre este arco se toma una longitud $\widehat{AA'} = \pi d$, el sector circular AVA' será el desarrollo de la superficie lateral del cono. Agregando la base se tiene el desarrollo total.

11. — Recordando lo establecido para la pirámide oblicua no es difícil comprender la representación de un cono oblicuo (fig. 92). En proyección horizontal las generatrices extremas son las tangentes V_1C_1 y V_1D_1 a la base. En proyección vertical las generatrices

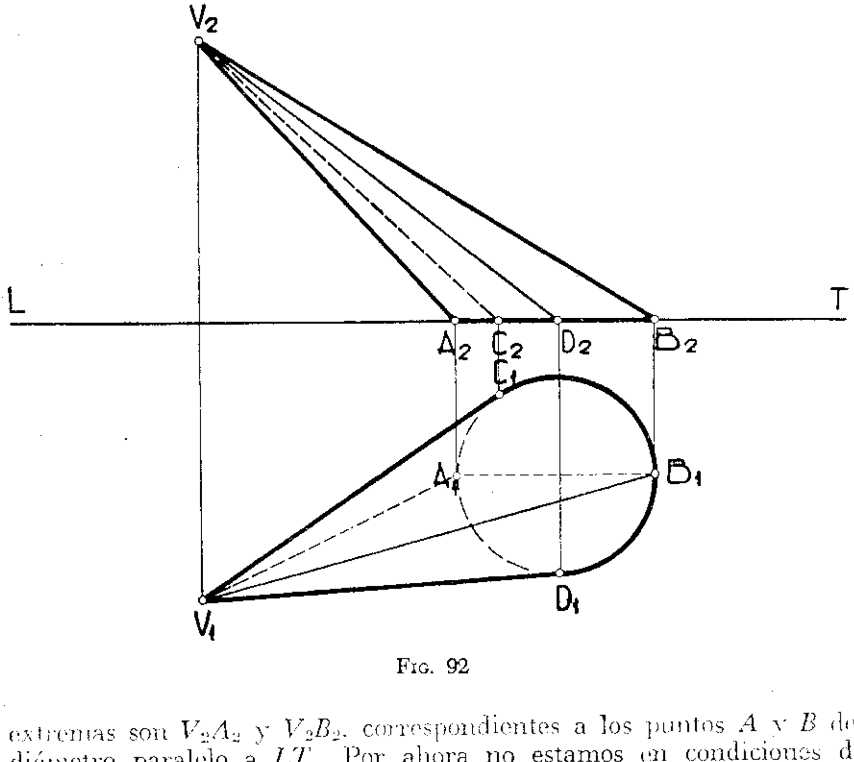


FIG. 92

extremas son V_2A_2 y V_2B_2, correspondientes a los puntos A y B del diámetro paralelo a LT. Por ahora no estamos en condiciones de hacer el desarrollo del cono considerado.

12. — De un tronco de cono recto, a bases paralelas, descansando sobre el plano horizontal, es fácil dar la representación, así como el desarrollo de la superficie (fig. 93).

13. — Dando término a esta representación de superficies y cuerpos nos referiremos a la esfera. Sus proyecciones son siempre círculos de diámetro igual al de la esfera (fig. 94). Si se corta la esfera mediante un plano horizontal, se obtiene un círculo llamado *paralelo*

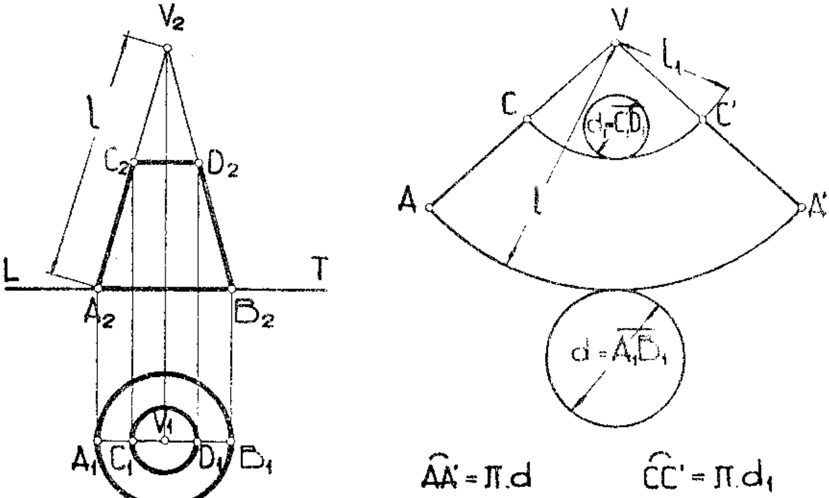


FIG. 93

El paralelo más grande es el *ecuador*. Sus proyecciones horizontales son círculos concéntricos.

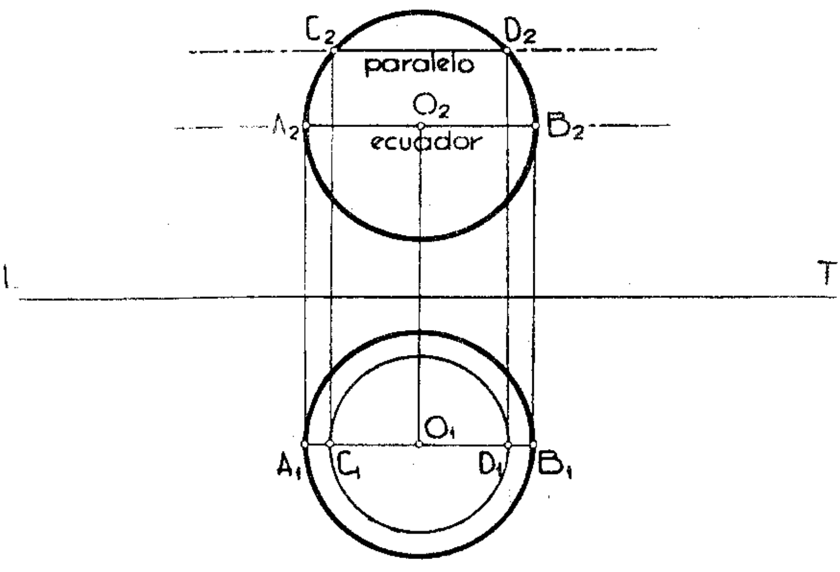


FIG. 94

§ 21. APLICACIONES

1. — Representación de una escuadra sencilla (figura 95).

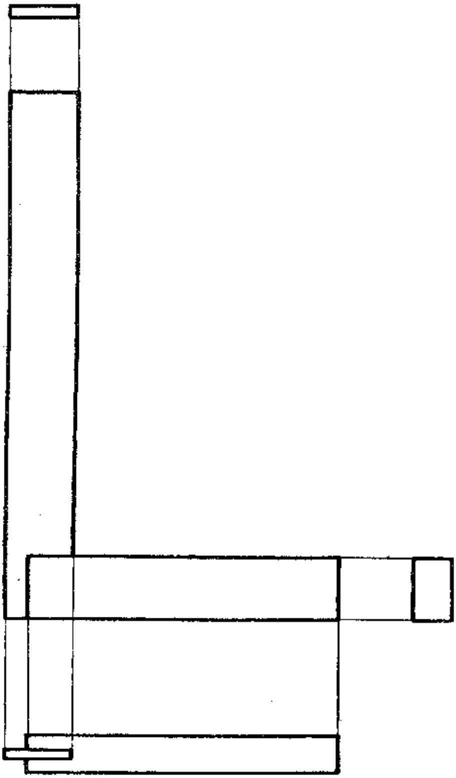


Fig. 95

2. — Representación de una ensambladura a espiga.

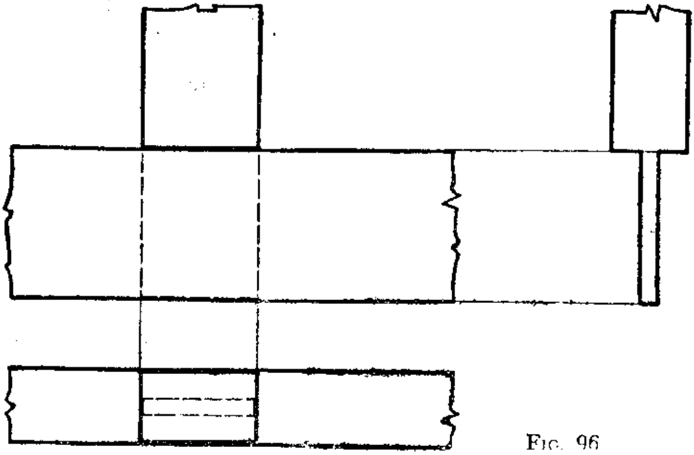


Fig. 96

3. — Representación de un cuezo de albañil

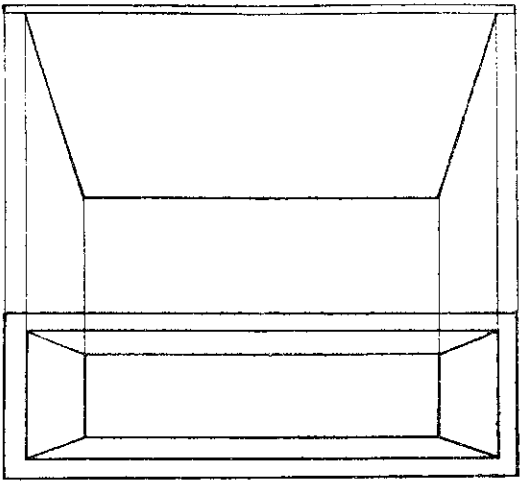


Fig. 97

EJERCICIOS

18. Dibujar la representación de un pentágono regular paralelo al plano vertical, con un lado de la base a 15° con respecto al plano horizontal. Considerar el mismo pentágono a 30° con respecto al plano vertical.

19. Dibujar la representación de un cubo descansando sobre el plano π_1 y con dos de sus caras laterales haciendo un ángulo de 45° con respecto al plano π_2. Dibujar también el perfil del cubo.

20. Dar la representación de un prisma recto de bases cuadradas paralelas al plano π_2; la posterior a una distancia $d \doteq 15$ mm de π^2. Una de las caras laterales debe formar un ángulo $\alpha = 60°$ con π_1. Dar también su perfil.

21. Dar la representación de un tronco de pirámide regular cuyas bases son cuadradas de 60 mm y 35 mm, respectivamente, y cuya altura mide 45 mm. El tronco descansa sobre el plano π_1 con dos lados de la base paralelos a *LT*.

22. Sacando los datos del natural, dibujar las proyecciones horizontal, vertical y de perfil (acotadas) de un hierro ángulo.

23. Idem de un compás de espesor.

24. Idem de un embudo.

25. Idem de un gramil de carpintero.

26. Idem de una llave inglesa.

27. Idem de una brida.

CAPÍTULO IV

EL PLANO

§ 22. REPRESENTACION DEL PLANO. RECTA Y PUNTO DE UN PLANO

1. — Se sabe que un plano queda determinado por tres puntos no colineales, o por dos rectas concurrentes, o por dos rectas paralelas, o por una recta y un punto exterior a ella. La representación de un plano se compondrá, entonces, de la representación de los elementos elegidos para determinarlo. Así, por ejemplo, (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) (fig. 98), constituyen la representación del plano que pasa por los puntos A, B, C del espacio.

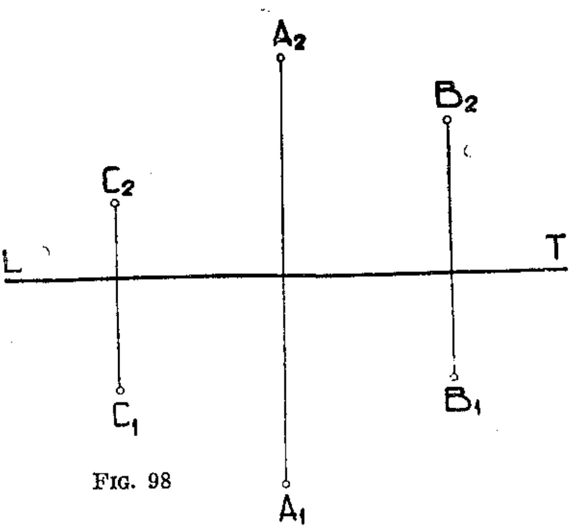


FIG. 98

Otros planos son representados mediante las rectas concurrentes (a_1, a_2), (b_1, b_2) (fig. 99), o mediante las rectas paralelas (a_1, a_2), $(c_1, c_2$ (fig. 100), o mediante la recta (a_1, a_2) y el punto (A_1, A_2) (fig. 101).

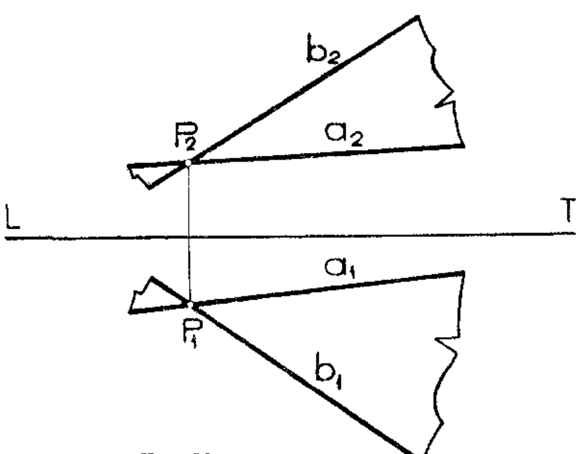


FIG. 99

2. — Representado el plano mediante cualquiera de los procedimientos indicados, resulta necesa-

rio, a menudo, hacer la representación de una recta de ese plano. En la figura 102 se consideró el plano determinado por las rectas (a_1, a_2), (b_1, b_2). Queremos fijar una recta arbitraria r del plano. Tracemos arbitrariamente la proyección r_1 de r. Ella encuentra a_1 y b_1 en los puntos P_1 y Q_1, respectivamente. Para que las rectas a y r sean coplanares es necesario (capít. II, § 16) que los puntos de intersección de sus proyecciones homónimas estén sobre la misma perpendicular a la línea de tierra. La proyección r_2 de r pasará entonces por P_2. Análogamente, para que las rectas b y r sean coplanares la proyección r_2 debe pasar por Q_2, punto en que la línea de referencia trazada por Q_1 encuentra b_2. Como la recta r debe ser coplanar con a y b, es forzoso entonces que su proyección vertical r_2 pase por P_2 y Q_2.

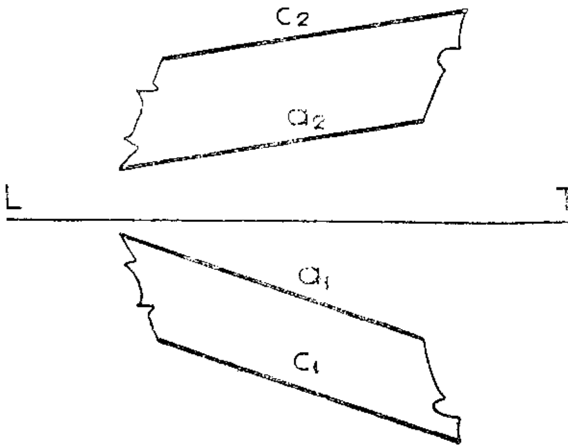


Fig. 100

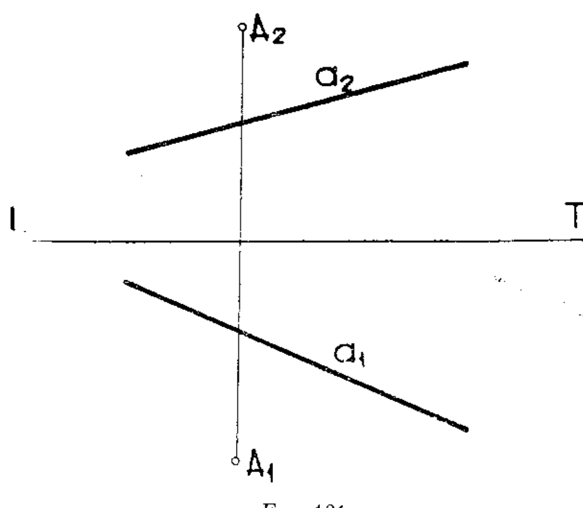


Fig. 101

3. — En la figura 103 el plano considerado es dado por tres de sus puntos A, B, C. Unidos, resultaron tres rectas del plano. Se desea una recta del plano paralela a BC. Determinado entonces un punto cualquiera (P_1, P_2) de A_1C_1 se trazan por P_1 la paralela r_1 a la recta B_1C_1 y por P_2 la paralela r_2 a B_2C_2. La recta $r = (r_1, r_2)$ es la recta pedida.

§ 23. RECTAS NOTABLES DEL PLANO

1. — Las rectas del plano paralelas a uno de los planos de proyección son llamadas *rectas notables* del plano.

En particular, las que son paralelas al plano horizontal son las *horizontales del plano*, y las que son paralelas al vertical son las *frontales del plano*.

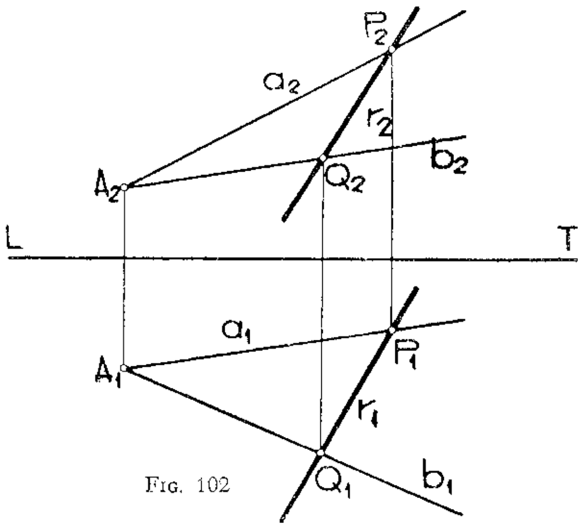


Fig. 102

2. — La figura 104 da la representación de varias horizontales del plano determinado por los puntos A, B, C. Las proyecciones verticales (cap. II, § 15) son paralelas a LT. Las horizontales resultan trazando líneas de referencia por puntos tales como M_2 y N_2 y uniendo después las correspondientes proyecciones horizontales M_1 y N_1.

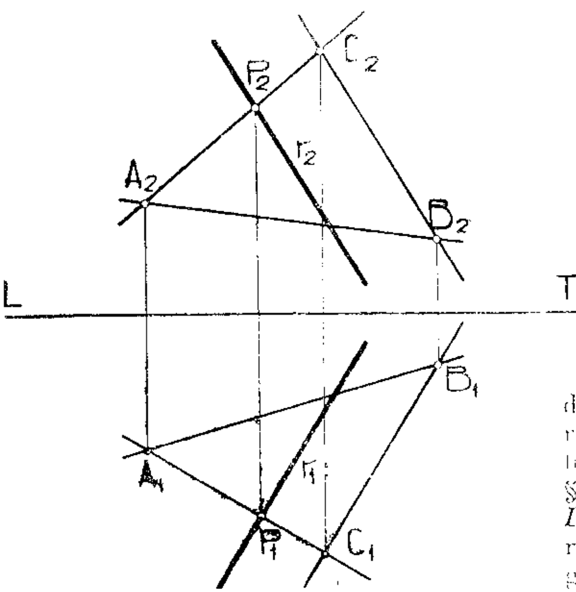


Fig. 103

Las proyecciones horizontales de las rectas horizontales de un plano son paralelas, por ser intersecciones con el plano π_1, de planos proyectantes paralelos.

3. — La figura 105, en cambio, da la representación de una serie de frontales del mismo plano anterior. Las proyecciones horizontales (cap. II, § 15) son paralelas a LT; las verticales, paralelas entre sí, son, en general, oblicuas con respecto a LT.

§ 24. RECTA DE MÁXIMA PENDIENTE DE UN PLANO

1.—Sea AB una recta inclinada con respecto al plano horizontal (fig. 106) y sea AC su proyección sobre este plano. Desde un punto cualquiera, B, por ejemplo, de AB, bajemos la perpendicular a la proyección AC y escribamos la razón

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

entre el segmento CB (cota del punto B con respecto al plano π)

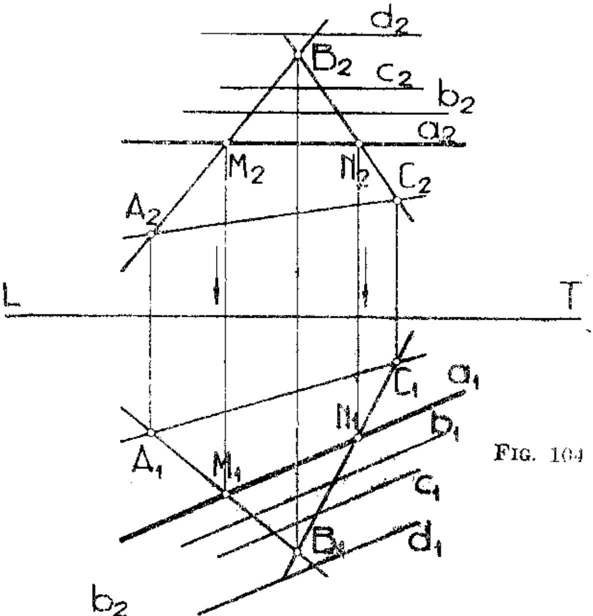


FIG. 104

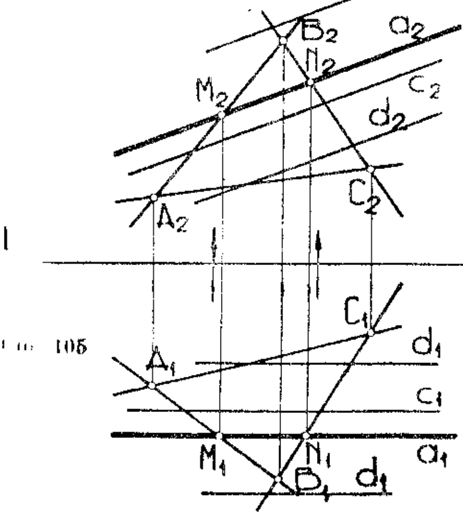


FIG. 105

y el segmento AC (distancia horizontal entre los puntos A y B).

Esta razón, que, por conocida propiedad de los triángulos semejantes, no varía al variar sobre la recta AB la posición del punto B, recibe el nombre de *pendiente* de la recta AB con respecto al plano horizontal π y se escribe

$$p = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

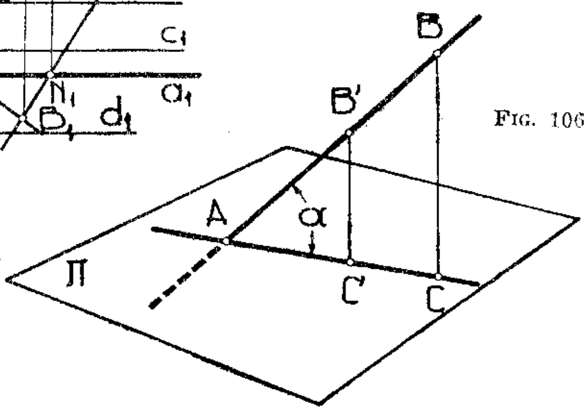


FIG. 106

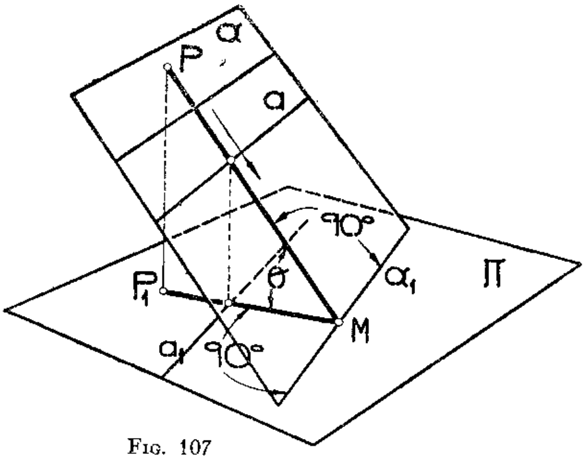


FIG. 107

En Trigonometría esta razón recibe el nombre de tangente del ángulo α.

2. — Consideremos ahora un plano α oblicuo con respecto al plano π (fig. 107). Imaginemos una esferita metálica en un punto cualquiera, P, por ejemplo, de α. Bajo la acción de la gravedad la esferita descenderá hasta llegar al plano π y, por más que se repita la experiencia, el camino seguido es siempre el mismo. Este camino, la recta PM de la figura, es el que más se acerca a la vertical PP_1. Recibe el nombre de *recta de máxima pendiente* del plano α, y ella es, en efecto, la que forma un ángulo más pequeño con la vertical y, en consecuencia, un ángulo más grande con el plano horizontal.

La recta de máxima pendiente constituye otra recta notable del plano.

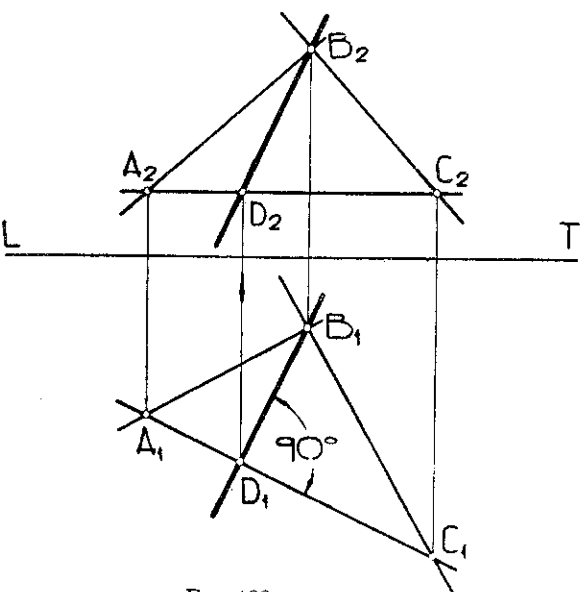


FIG. 108

La *Geometría Elemental* enseña que la recta de máxima pendiente de un plano es perpendicular a la intersección α_1 del plano dado y del plano horizontal. Enseña, además, que la proyección P_1M de la recta de máxima pendiente es también perpendicular a la intersección α_1 de los planos α y π.

Resulta entonces que la recta de máxima pendiente PM es perpendicular a toda horizontal del plano α y que la proyección horizontal P_1M

de PM es perpendicular a la proyección horizontal a_1, por ejemplo, de una horizontal arbitraria a de α.

3. — Dado el plano determinado por las rectas AB, BC (fig. 108), es fácil hallar las proyecciones de una de sus rectas de máxima pendiente. La que pasa por B, por ejemplo.

Se traza una horizontal cualquiera (A_1C_1, A_2C_2) del plano. La perpendicular B_1D_1 a la recta A_1C_1 es la proyección horizontal de la recta de máxima pendiente. Mediante líneas de referencia se determina entonces la proyección vertical B_2D_2.

§ 25. PUNTO DE UN PLANO

1. — Para que un punto pertenezca a un plano basta que pertenezca a una recta del plano. Sea K_1, entonces, la proyección horizontal de un punto del plano ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$) (fig. 109). Si DE es una recta del plano que contiene el punto K, puede trazarse por K_1 la proyección D_1E_1 de la recta.

Su proyección vertical será D_2E_2. Trazada por K_1 la perpendicular a LT se obtiene sobre D_2E_2 la otra proyección K_2 del punto.

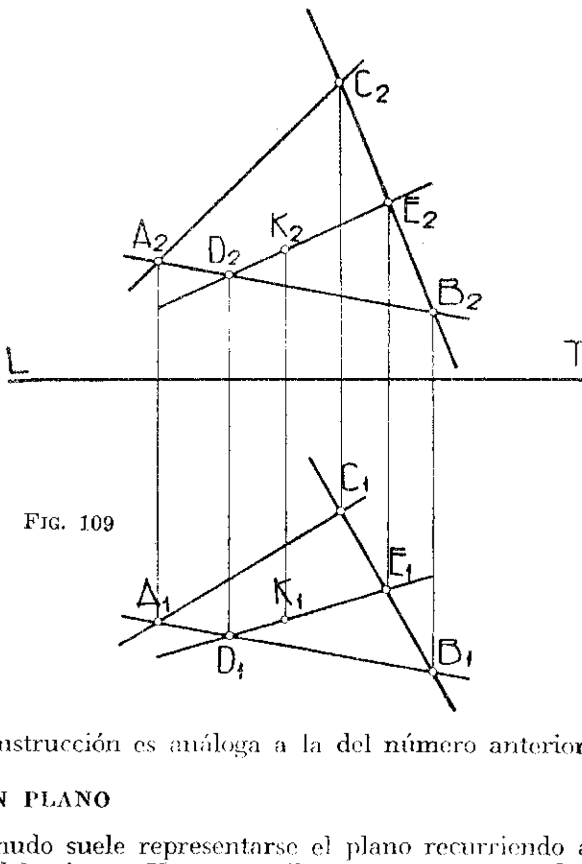


FIG. 109

2. — En la figura 110 se ha determinado un punto J_1J_2 del plano formado por dos rectas paralelas (A_1B_1, A_2B_2) y (C_1D_1, C_2D_2). La construcción es análoga a la del número anterior.

§ 26. TRAZAS DE UN PLANO

1. — Muy a menudo suele representarse el plano recurriendo a dos rectas especiales del mismo. Veamos cuáles son estas rectas. Supongamos que el plano π (fig. 111) sea algo tangible, una hoja de papel por ejemplo. Acercándolo hasta encontrar simultáneamente, o uno después de otro, los planos de proyección, éstos serán intersecados

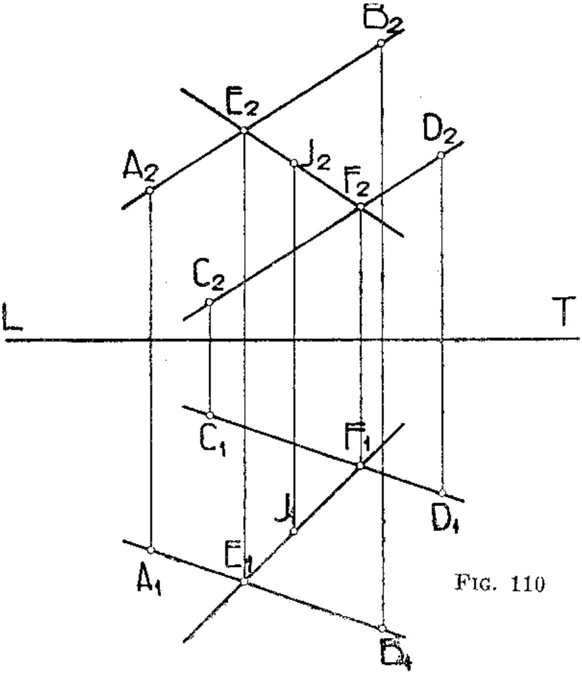


Fig. 110

por la hoja de papel. Las dos intersecciones α_1 y α_2 se llaman *trazas* del plano α. En particular, α_1 es la *traza horizontal* y α_2 es la *traza vertical*. El plano α no podrá ya cortar en ninguna otra forma los planos de proyección; queda, en consecuencia, perfectamente determinado si se conocen sus trazas α_1 y α_2. Es por esto que en su representación se puede hacer figurar solamente esos datos y se dice, entonces, plano (α_1, α_2) para nombrar el plano α del espacio.

Se ve que la representación del plano mediante sus trazas no es sino un caso particular de la representación del plano mediante dos de sus rectas concurrentes.

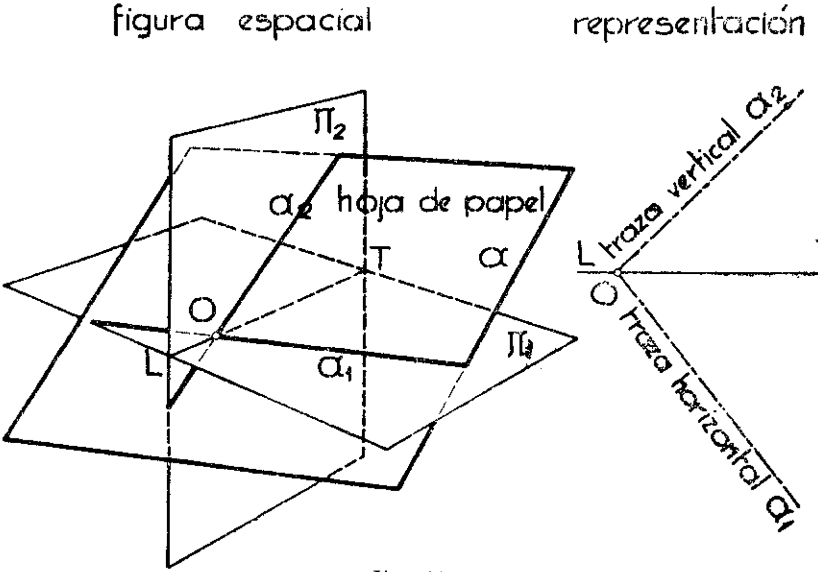


Fig. 111

§ 27. POSICIONES PARTICULARES DE UN PLANO DADO POR SUS TRAZAS

1. —Los planos, como las rectas, pueden ocupar infinitas posiciones con respecto a los planos de proyección y su posición se deduce fácilmente de las posiciones de las trazas con respecto a la línea de tierra.

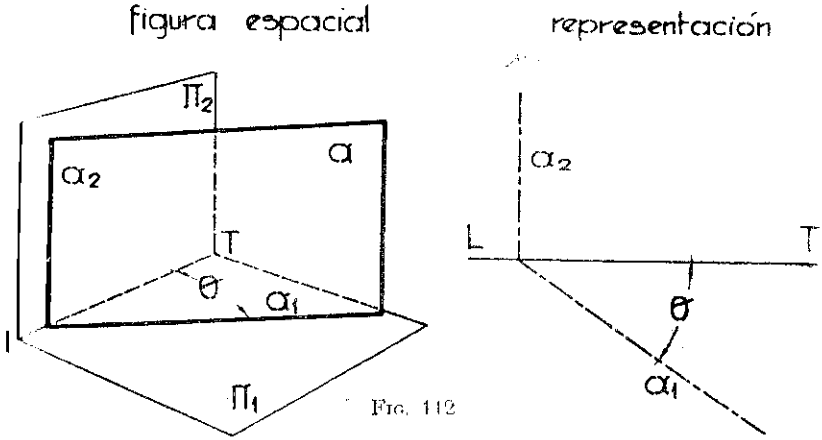


FIG. 112

2. Sea un plano perpendicular al plano horizontal (fig. 112). La traza vertical α_2 es perpendicular a LT. En efecto, π_2 y α son ambos perpendiculares a π_1. La intersección α_2 de los dos primeros será entonces perpendicular al plano π_1 y también a toda recta que, como LT, pasa por su pie en el plano. La otra traza α_1 forma con LT un ángulo θ igual al que forma con π_2 el plano dado α.

3. —Es fácil comprender que toda figura situada en un plano α perpendicular al plano horizontal tiene su proyección horizontal sobre la traza horizontal del plano dado α (figura 113).

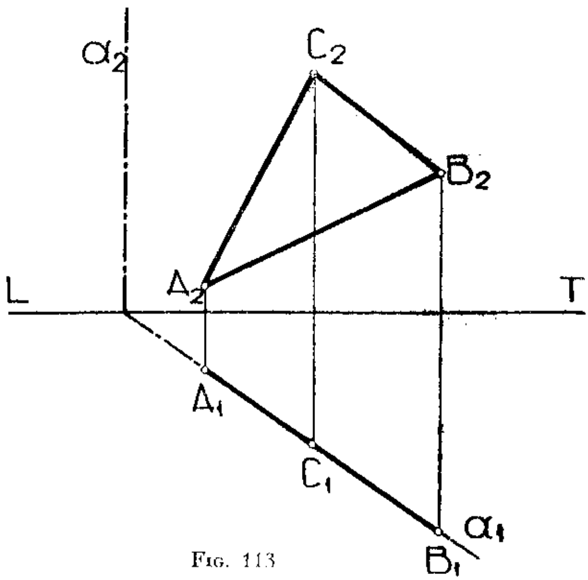
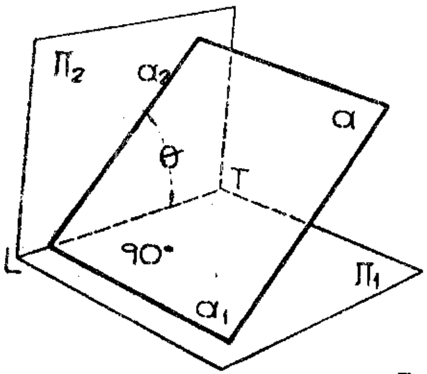


FIG. 113

4. — Imaginemos un plano perpendicular al plano vertical (figura 114). Con un razonamiento análogo al del número 2 puede demostrarse que todo plano perpendicular al plano vertical tiene la traza horizontal perpendicular a *LT*; la traza vertical forma con *LT*



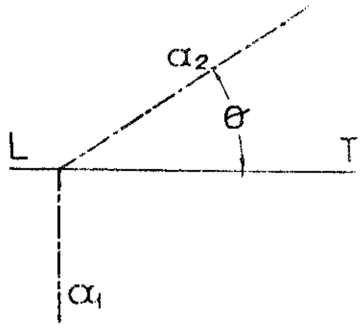


Fig. 114

un ángulo igual al que forma el plano dado con el plano horizontal.

Los planos perpendiculares al plano vertical suelen llamarse *planos de canto*. Toda figura situada en un plano perpendicular al plano vertical tiene su proyección vertical sobre la traza vertical del plano (figura 115).

5. — La figura 116 se refiere a un plano de perfil. Las dos trazas son perpendiculares a *LT*.

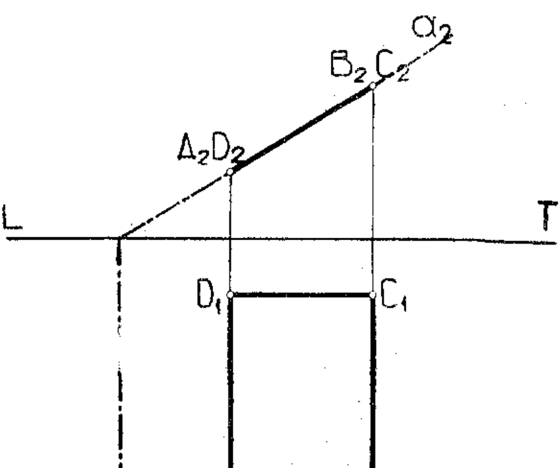


Fig. 115

6. — Si el plano dado α es paralelo al plano horizontal (fig. 117), la traza vertical es paralela a *LT* (intersecciones de dos planos paralelos con un tercero).

No existe traza horizontal (a distancia finita).

Toda figura situada en un plano horizontal se proyecta horizon-

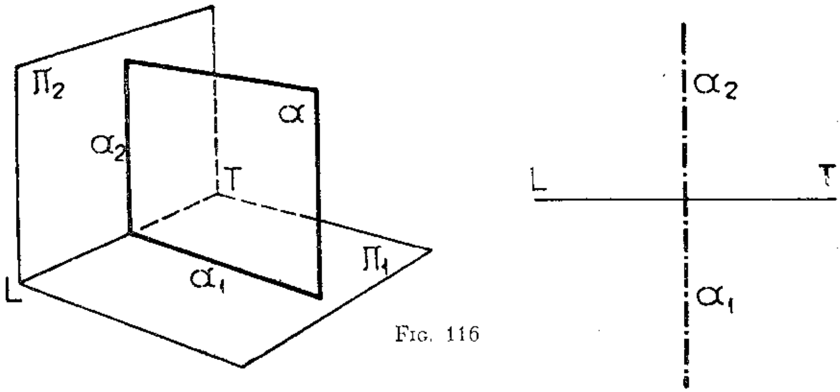


FIG. 116

talmente en verdadera magnitud; la proyección vertical (fig. 118) está sobre la traza vertical del plano.

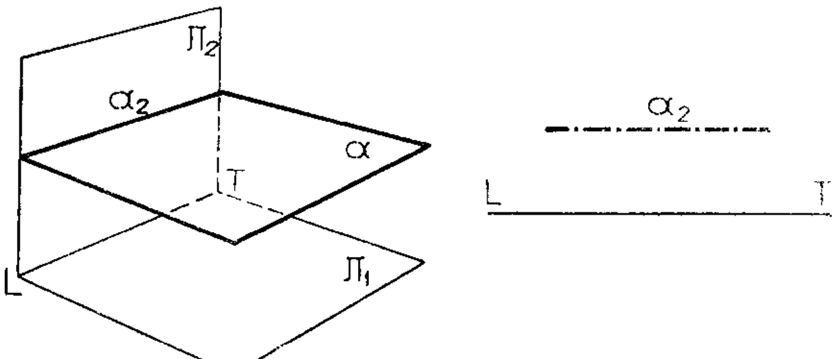


FIG. 117

7. — Un plano paralelo al plano vertical tiene, en cambio, la traza horizontal paralela a *LT*. No tiene traza vertical (a distancia finita) (fig. 119).

Toda figura situada en un plano paralelo al plano vertical se proyecta verticalmente en verdadera magnitud. La proyección horizontal está sobre la traza horizontal del plano (fig. 120).

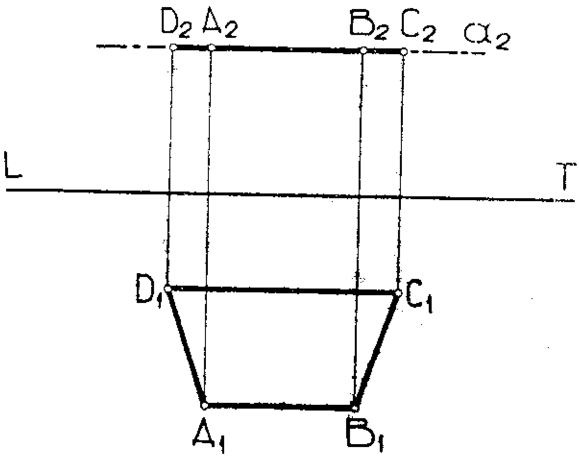


FIG. 118

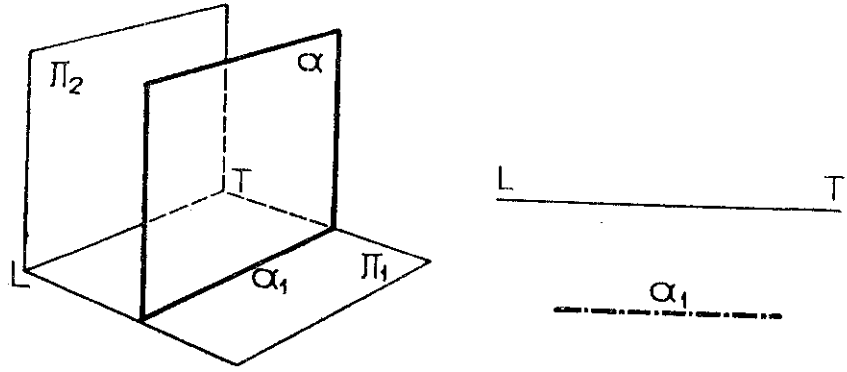


FIG. 119

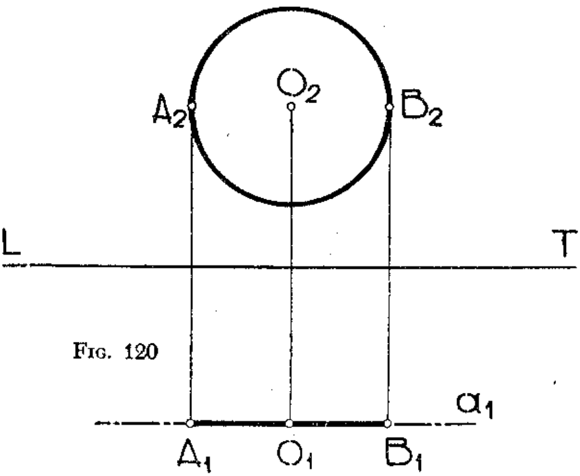


FIG. 120

8. — La figura 121 se refiere a un plano paralelo a la línea de tierra. Las dos trazas son paralelas a LT.

9. — Como última posición consideremos un plano que pasa por la línea de tierra (fig. 122). Las dos trazas coinciden con LT.

Para individualizar el plano basta dar las proyecciones de uno de sus puntos no situado, naturalmente, sobre LT.

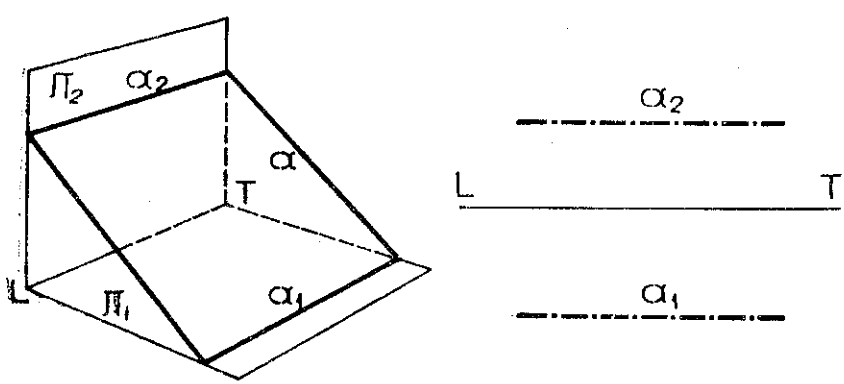


FIG. 121

§ 28. RECTAS CONTENIDAS EN UN PLANO DADO POR SUS TRAZAS

1. — Si en un plano arbitrario $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$ (fig. 123) dibujamos una recta r, cualquiera sea la posición de ésta sus trazas se encuentran siempre sobre las trazas correspondientes del plano.

En efecto, cada traza de la recta pertenece al mismo tiempo al plano α y a uno de los planos de proyección: debe encontrarse entonces en la intersección de ambos, que, como sabemos, no es sino una de las trazas del plano α.

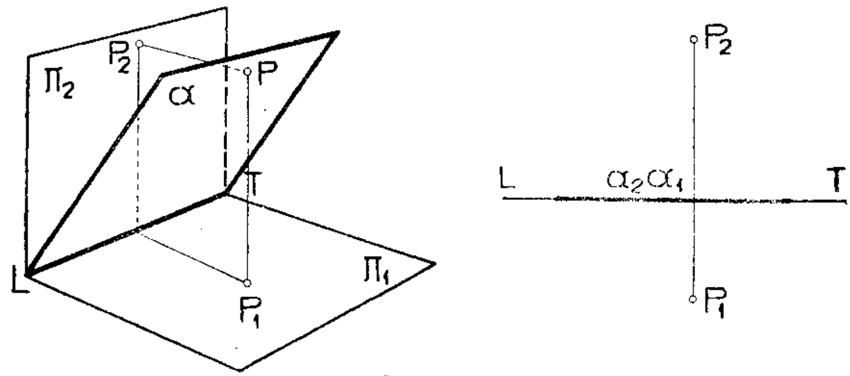


Fig. 122

2. — Es fácil, ahora, resolver el problema siguiente: Conocidas las trazas (α_1, α_2) de un plano (fig. 124), y una de las proyecciones r_1, por ejemplo, de una recta del plano, encontrar la otra proyección r_2.

Sabemos ya que la traza vertical de la recta es un punto de la traza vertical del plano. Si, entonces, prolongamos r_1 hasta B_1 y desde aquí elevamos una perpendicular a LT, se obtiene B_2, proyección ver-

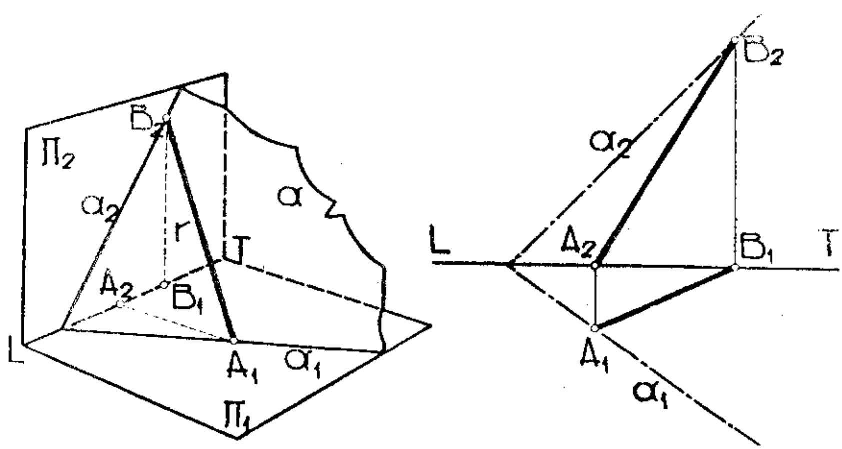


Fig. 123

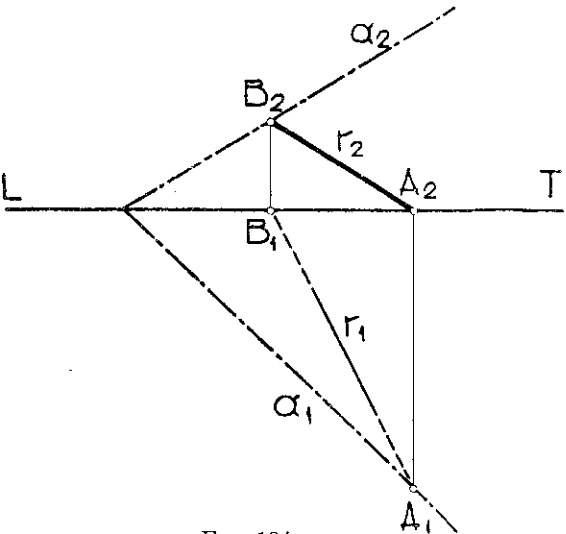


FIG. 124

tical de la traza vertical de la recta buscada. La traza horizontal debe encontrarse sobre α_1. Sus proyecciones serán entonces A_1 y A_2. Uniendo A_2 con B_2 se obtiene la proyección vertical de la recta.

3. — Es fácil también resolver este otro problema: Hacer pasar un plano por una recta dada.

Se sabe que por una recta puede pasar un número infinito de planos. Para dar uno cualquiera de éstos recordemos que, según 1 de este parágrafo, si un plano contiene una recta, sus trazas pasan por las trazas de la recta. Entonces, si unimos un punto cualquiera, O, de LT (fig. 125), con las trazas de la recta, se obtienen las trazas del plano buscado.

4. — Entre los infinitos planos que pasan por una recta dada conviene elegir, a menudo, el que la proyecta horizontal o verticalmente (1 de § 13). El plano proyectante horizontalmente es un plano normal al plano horizontal; su traza horizontal coincide (3 de § 27) con la proyección horizontal de la recta; su traza vertical es perpendicular a LT (figura 126 a).

En forma análoga se ha obtenido en figura 126 b el plano que pasando por la recta dada la proyecta sobre el plano vertical.

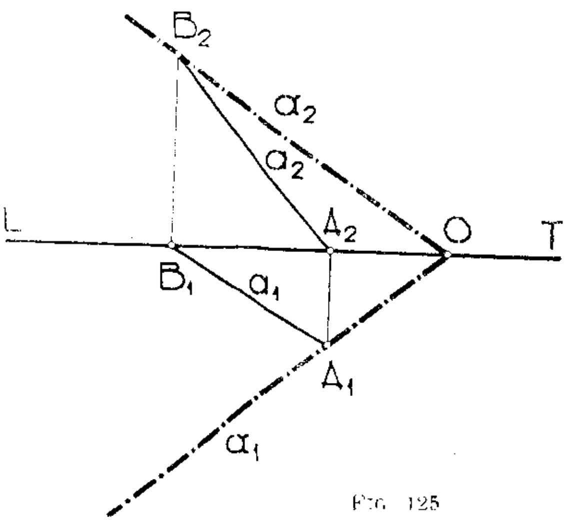


FIG. 125

§ 29. RECTAS NOTABLES DE UN PLANO DADO POR SUS TRAZAS

1. — Sabemos ya que llámase *horizontal de un plano* toda recta de este plano paralela al plano horizontal; la recta r, por ejemplo (fig. 127).

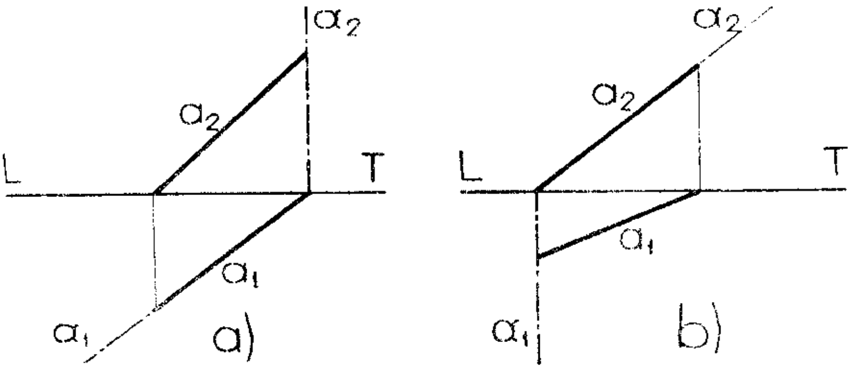


FIG. 126

Siendo paralela al plano horizontal tendrá la proyección vertical r_2 paralela a LT. Las horizontales de un plano son todas paralelas entre sí y paralelas, en consecuencia, a la traza horizontal del plano. La proyección horizontal r_1 será entonces paralela a α_1.

La traza vertical de la recta (r_1, r_2) es el punto $A \equiv (A_1, A_2)$

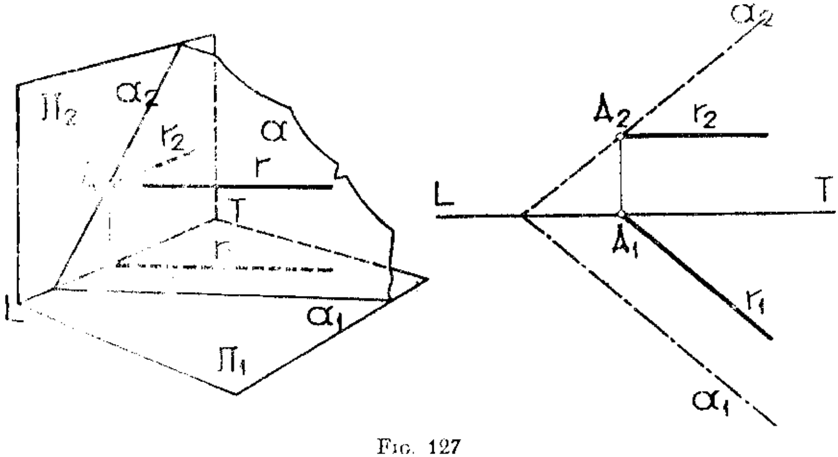


FIG. 127

2. — Sabemos también que se llama *frontal de un plano* toda recta de éste paralela al plano vertical; la recta r, por ejemplo (figura 128).

Siendo r paralela al plano vertical su proyección r_1 es paralela a LT.

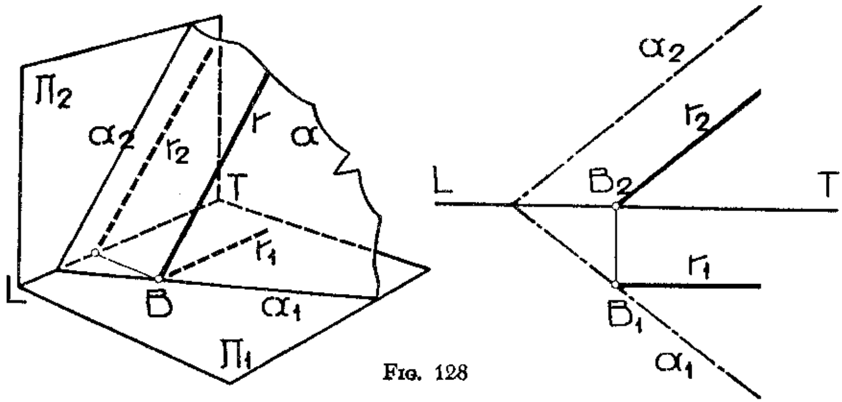


Fig. 128

Las frontales de un plano son paralelas entre sí y paralelas, por lo tanto, a la traza vertical del mismo plano. La proyección r_2 es entonces paralela a la traza α_2.

3. — La otra recta notable de un plano es su *recta de máxima pendiente.*

Hemos visto ya (2, § 24) que la proyección horizontal de una recta de máxima pendiente es perpendicular a la proyección horizontal de cualquier horizontal del plano al cual pertenece. Será, en consecuencia, perpendicular a la traza horizontal del plano (fig. 129 a).

Si, entonces, son conocidas las trazas (α_1, α_2) de un plano, es fácil hallar las proyecciones de una de sus rectas de máxima pendiente.

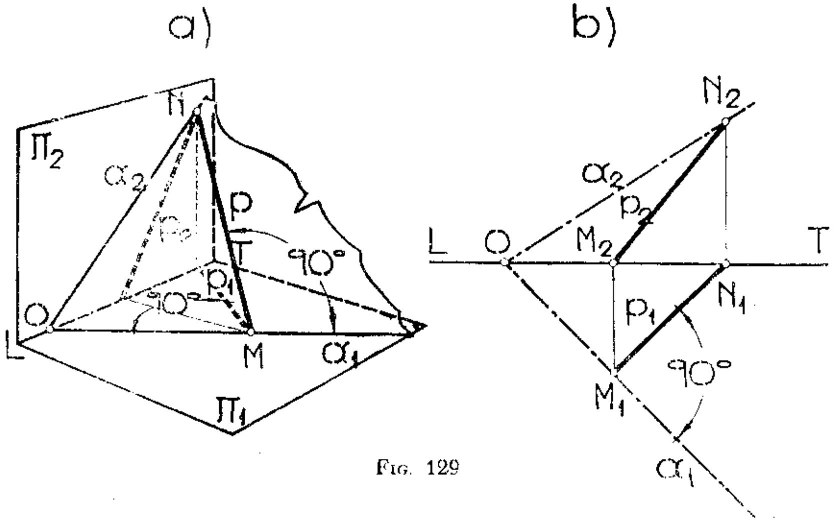


Fig. 129

Se traza la proyección horizontal p_1 perpendicular a α_1 (fig. 129 b). Luego, como se hizo en 2, § 28, se determina la otra proyección p_2.

Recíprocamente, conocidas las proyecciones (p_1, p_2) de una recta de máxima pendiente es fácil hallar las trazas del plano correspondiente. En efecto, la perpendicular a p_1 por M_1 da la traza α_1 del plano. Para obtener α_2 basta unir O con N_2 (3 de § 28).

Este ejercicio hace ver que un plano queda perfectamente definido si se conoce su recta de máxima pendiente.

§ 30. APLICACIONES

1. — Conocidas las proyecciones (a_1, a_2), (b_1, b_2) de dos rectas paralelas de un plano y la proyección horizontal $A_1B_1C_1D_1$ de una figura del plano (fig. 130), encontrar la otra proyección $A_2B_2C_2D_2$.

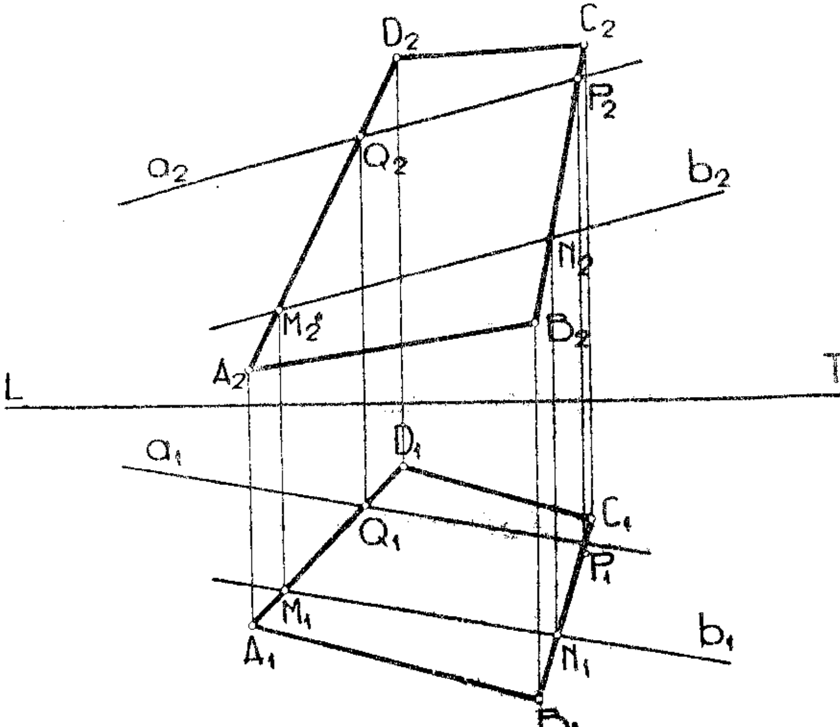


Fig. 130

Las proyecciones horizontales de los puntos en que las rectas a y b cortan la figura $ABCD$ son M_1, N_1, P_1, Q_1. Mediante líneas de referencia determinemos M_2, N_2, P_2, Q_2. Unidos M_2 con Q_2 y N_2 con P_2 tenemos las proyecciones verticales de las rectas que contienen las

lados AD y BC de la figura $ABCD$. Líneas de referencia por A_1, B_1, C_1 y D_1 permiten determinar la proyección $A_2B_2C_2D_2$ buscada.

2. — Verificar si la figura determinada por los puntos $A \equiv (A_1, A_2)$, $B \equiv (B_1, B_2)$, $C \equiv (C_1, C_2)$, $D \equiv (D_1, D_2)$ es plana. ¿Y la figura que resulta uniendo entre sí los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ es plana?

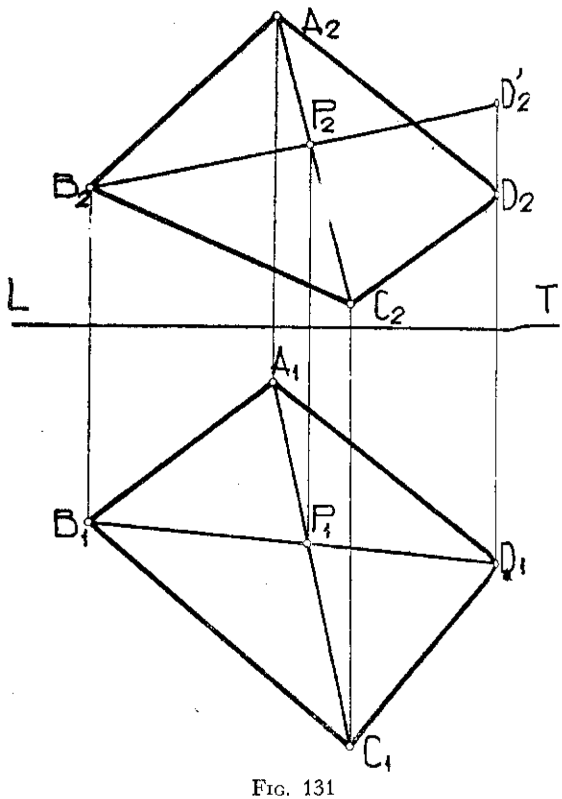


Fig. 131

Veamos la primera parte.

Los puntos A, B y C determinan un plano, el del triángulo ABC. Averigüemos si D pertenece a ese plano. Un punto pertenece a un plano cuando pertenece a una recta del plano. Unamos los puntos B_1 y D_1 (fig. 131). Su recta corta en P_1 la proyección horizontal A_1C_1 del lado AC del triángulo ABC. Determinada la proyección vertical P_2 del punto P, la recta $BP \equiv (B_1P_1, B_2P_2)$ pertenece al plano ABC porque pasa por dos de sus puntos. Se constata entonces que $D \equiv \equiv (D_1, D_2)$ no es un punto del plano ABC, porque su proyección vertical no pertenece a la proyección B_2P_2 de la recta BP. La figura $ABCD$ no es, pues, plana. Lo sería, en cambio, si D_2 ocupase la posición D'_2.

Veamos la segunda parte (fig. 132).

Sean M, N, P, Q los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ de la figura dada. El segmento $\overline{MN}$ que une los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del triángulo ABC, es paralelo al tercer lado AC, por un conocido teorema de *Geometría Elemental*. Del mismo modo, el segmento $\overline{PQ}$ es paralelo al lado $\overline{AC}$ del triángulo CDA. Luego, $MN \parallel QP$. Sus proyecciones homónimas serán también paralelas.

En forma análoga se demuestra, considerando los triángulos BCD y DAB, que $\overline{NP} \parallel \overline{MQ}$, siendo entonces también paralelas sus proyec-

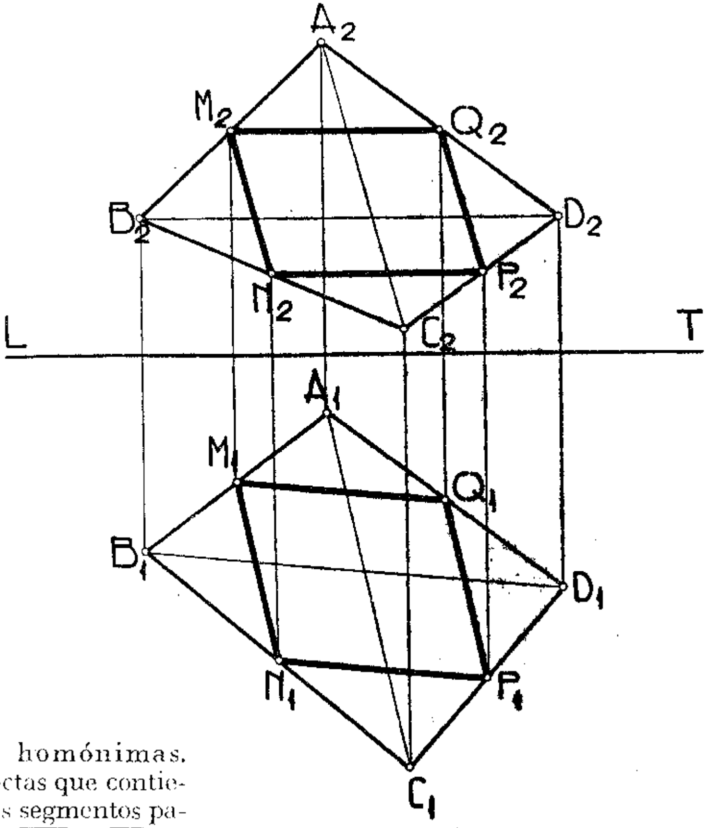


FIG. 132

ciones homónimas. Las rectas que contienen los segmentos paralelos $\overline{MN}$ y $\overline{QP}$ determinan un plano y a él pertenecen tanto la recta MQ como la NP, pues la primera pasa por los puntos (M_1, M_2) y (Q_1, Q_2) del plano y la segunda por (N_1, N_2) y (P_1, P_2), que son también puntos del plano.

La figura $MNPQ$ es, pues, plana y, con más precisión, es un paralelogramo por ser paralelos sus lados opuestos.

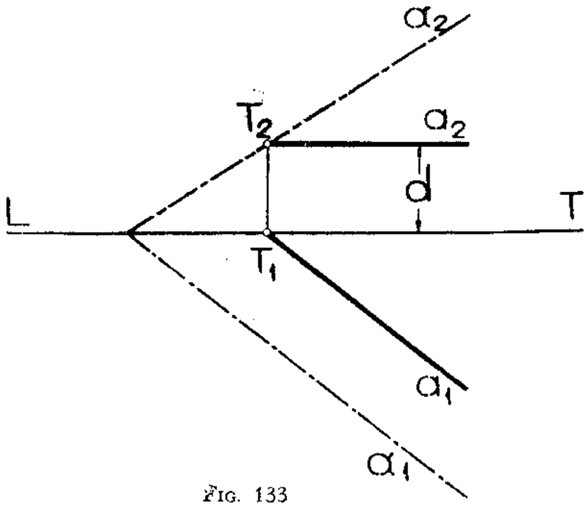


FIG. 133

3. — En un plano dado por sus trazas (α_1, α_2) (fig. 133) trazar una horizontal distante d del plano horizontal.

Todos los puntos de una horizontal tienen igual cota, d en este caso, y esta cota es igual a la distancia de la proyección vertical de la recta a la línea de tierra. Basta entonces dibujar a una distancia d la paralela a_2 a LT; determinar las proyecciones T_1 y T_2 de la única traza de la recta y conducir luego desde T_1 la paralela a_1 a la traza α_1.

La horizontal buscada es (a_1, a_2).

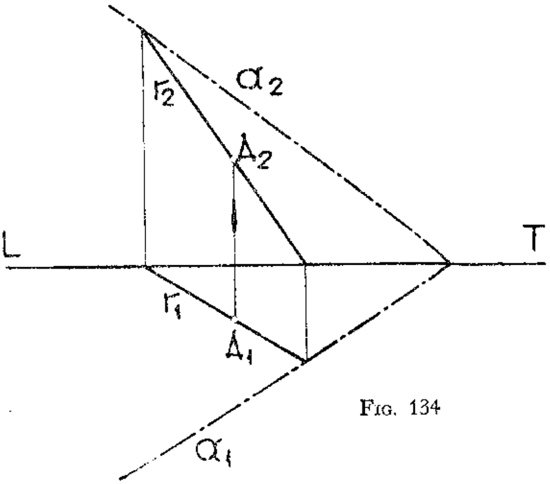


Fig. 134

4. — Conocidas las trazas (α_1, α_2) de un plano y una de las proyecciones, A_1, por ejemplo, de un punto de ese plano, encontrar la otra proyección del punto (fig. 134).

Por A_1 trazamos una recta cualquiera, r_1, a la que consideraremos como proyección horizontal de una recta que, perteneciendo al plano, pasa por el punto.

Empleando el procedimiento indicado en 2, § 28, se encuentra la otra proyección r_2. La proyección vertical A_2 del punto queda determinada entonces mediante una línea de referencia por A_1.

En vez de una recta cualquiera puede utilizarse, y así se hace casi siempre, una horizontal o una frontal del plano (figura 135).

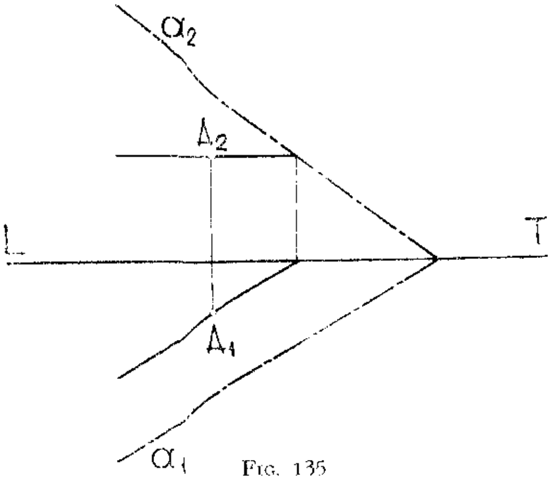


Fig. 135

5. — Conocida una de las proyecciones, la vertical, por ejemplo, de una figura situada en un plano dado por sus dos

trazas, encontrar la otra proyección de la figura. Sea $A_2B_2C_2D_2$ la proyección vertical de la figura y (α_1, α_2) el plano (fig. 136). Se trata de repetir aquí, para cada vértice de la figura, el problema anterior.

Resulta así, sin dificultad, la proyección horizontal $A_1B_1C_1D_1$.

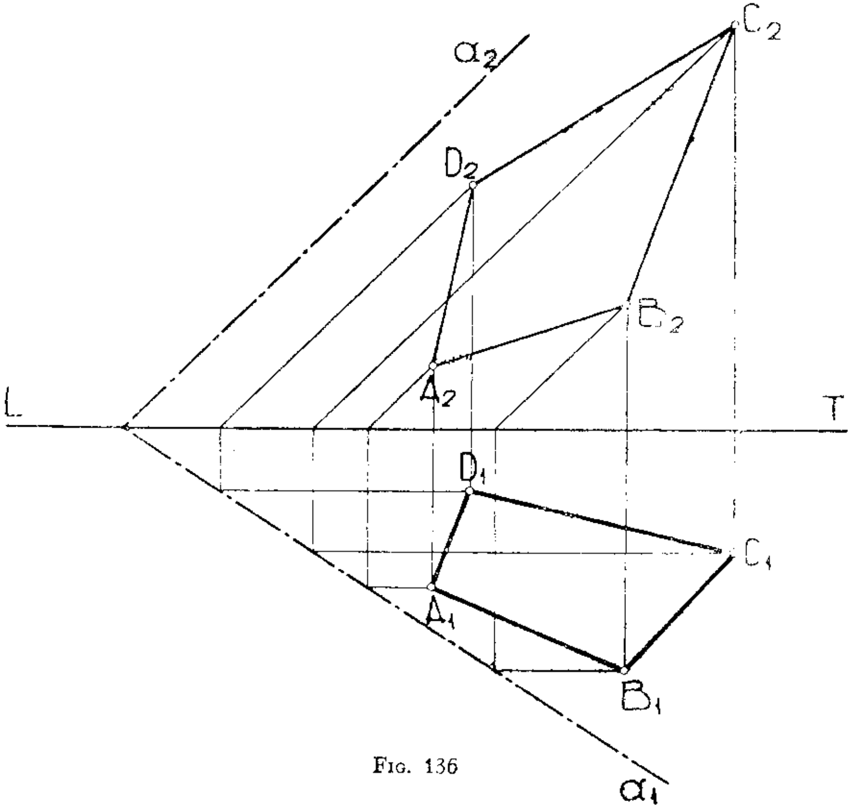


FIG. 136

6. — Determinar las trazas del plano determinado por dos rectas concurrentes.

Cada traza del plano contiene, evidentemente, las trazas de igual nombre de las dos rectas. Si entonces (a_1, a_2) y (b_1, b_2) son las proyecciones de las rectas dadas (fig. 137), para encontrar las trazas del plano determinado basta encontrar las trazas de las dos rectas y unir luego las horizontales y las verticales entre sí.

Como verificación debe tenerse en cuenta que las trazas α_1 y α_2 obtenidas deben resultar paralelas a LT o cortar esta recta en un mismo punto.

7. — Encontrar las trazas del plano que pasa por dos rectas paralelas.

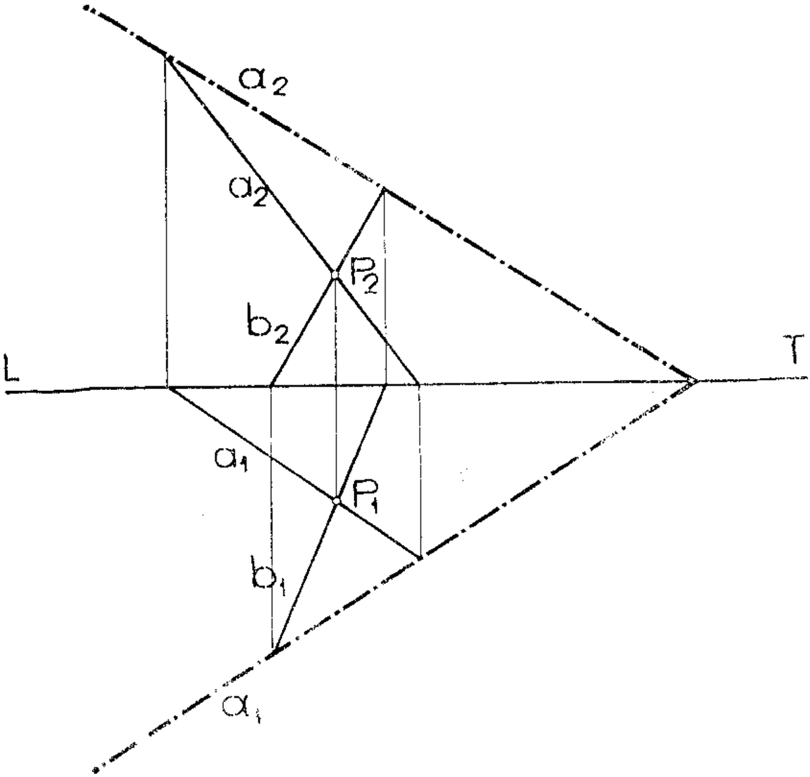


Fig. 137

Se procede como en el caso anterior. Determinadas las trazas de las dos rectas, únense las del mismo nombre, vertical con vertical y horizontal con horizontal. Quedan así determinadas las dos trazas del plano (fig. 138).

8. —Determinar las trazas del plano que pasa por un punto y una recta.

Sean P_1, P_2 las proyecciones del punto y r_1, r_2 las de la recta (fig. 139). Por el punto P se traza una recta cualquiera a que corte a la r. El plano determinado por las rectas r y a es el plano buscado. En vez de proceder en la forma indicada se puede trazar por P una paralela a r.

9. —Encontrar las trazas del plano que pasa por tres puntos no situados en línea recta.

Sean A, B y C los puntos. Uniendo uno de ellos con cada uno de los otros dos, el problema queda reducido al 6.

La figura 140 da la correspondiente representación.

Puede trazarse también, si se quiere, por uno de los puntos la paralela a la recta determinada por los otros dos.

10. — Hallar las trazas del plano que pasa por dos rectas paralelas a *LT* (fig. 141).

Sean (a_1, a_2) y (b_1, b_2) las rectas. El plano determinado por ellas es paralelo a *LT*. Se traza una recta (d_1, d_2) que corte a las dadas y se determinan sus trazas (A_1, A_2) y (B_1, B_2). Esta recta auxiliar (d_1, d_2) pertenece al plano que pasa por (a_1, a_2) y (b_1, b_2); conduciendo entonces por A_1 y B_2 las paralelas a *LT* se obtienen las trazas α_1 y α_2 del plano buscado.

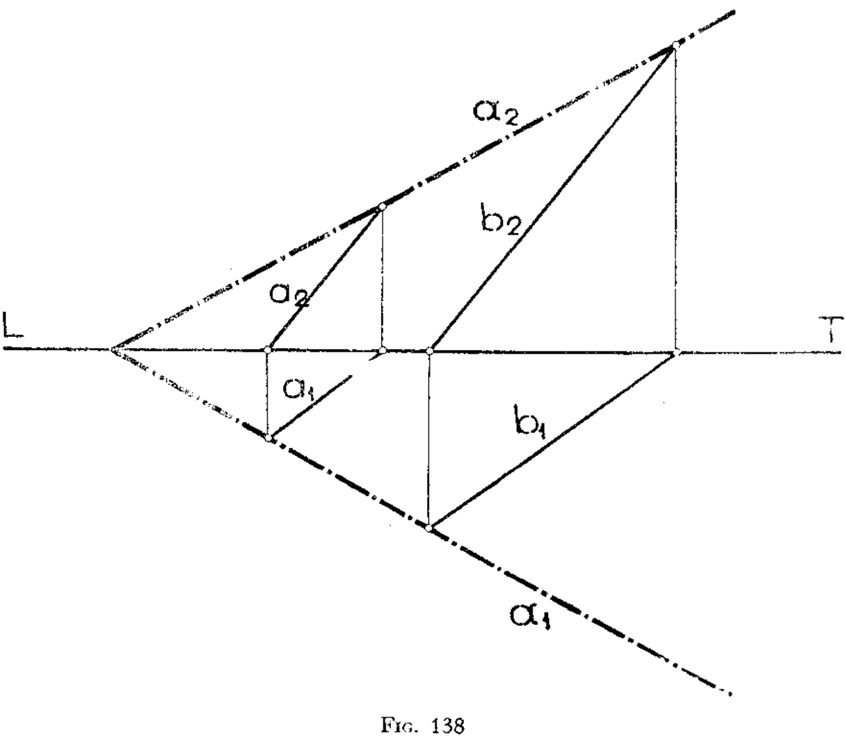


Fig. 138

Este mismo problema puede ser resuelto utilizando un plano de perfil (fig. 142). Se halla el perfil de cada una de las dos paralelas, quedando así determinado el perfil del plano que pasa por ellas. Volviendo a girar el plano de perfil se encuentran fácilmente α_1 y α_2.

11. — Un prisma recto, que descansa sobre el plano horizontal, es cortado por un plano perpendicular al plano vertical. Dibujar el desarrollo de la superficie del tronco.

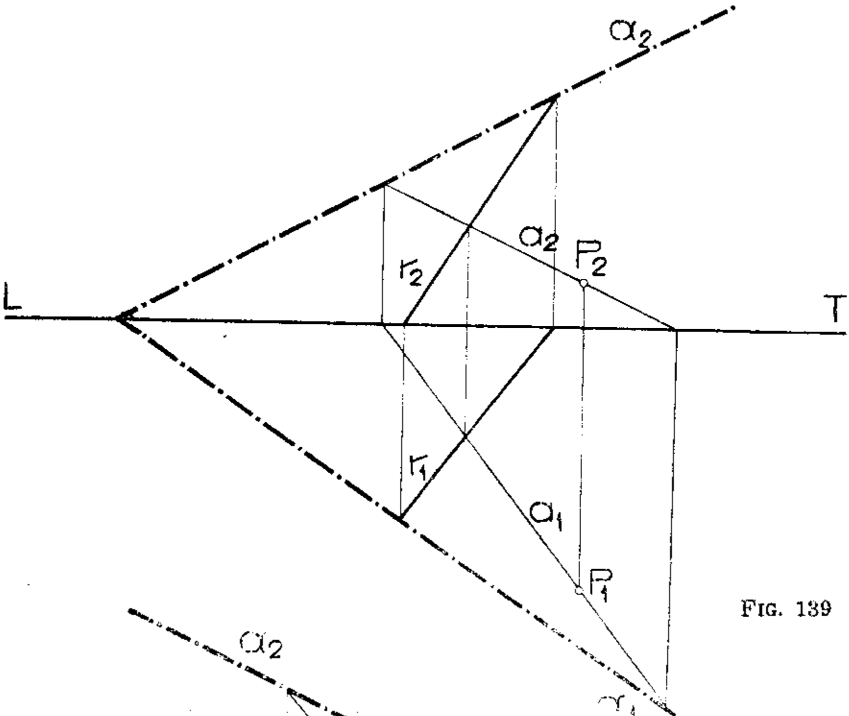


FIG. 139

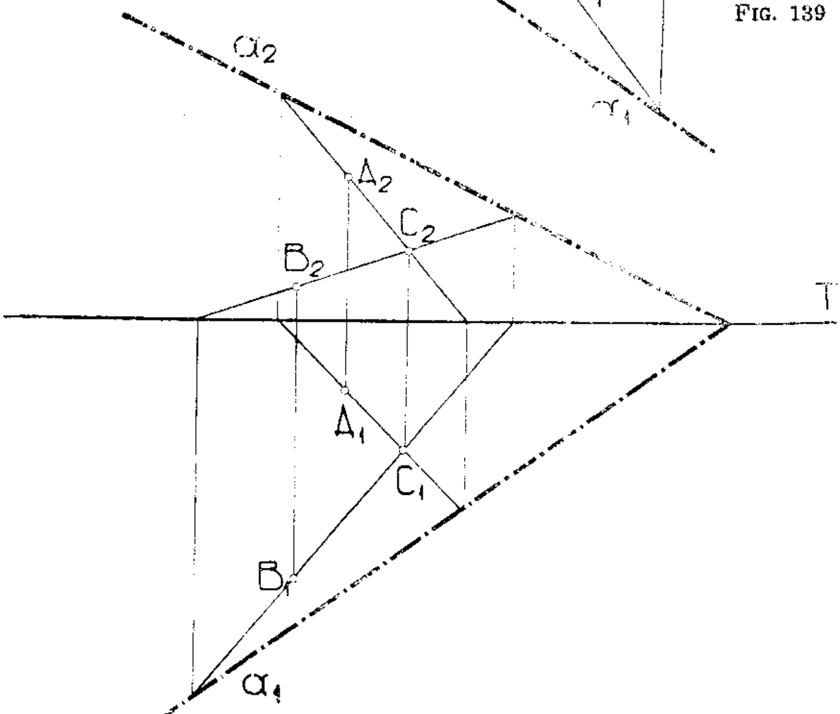


FIG. 140

El plano sector $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$ (fig. 143) es, como lo dice el problema, perpendicular al plano vertical. Toda figura situada en él se proyecta verticalmente sobre α_2; $\overline{E_2F_2}$ es entonces la proyección vertical del *corte* o *sección* producida.

Los vértices de la sección son puntos de las aristas laterales

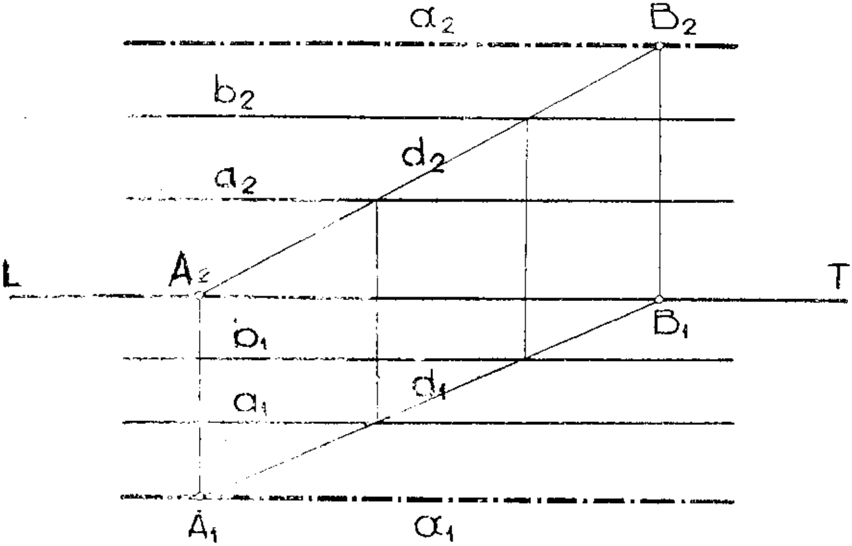


FIG. 141

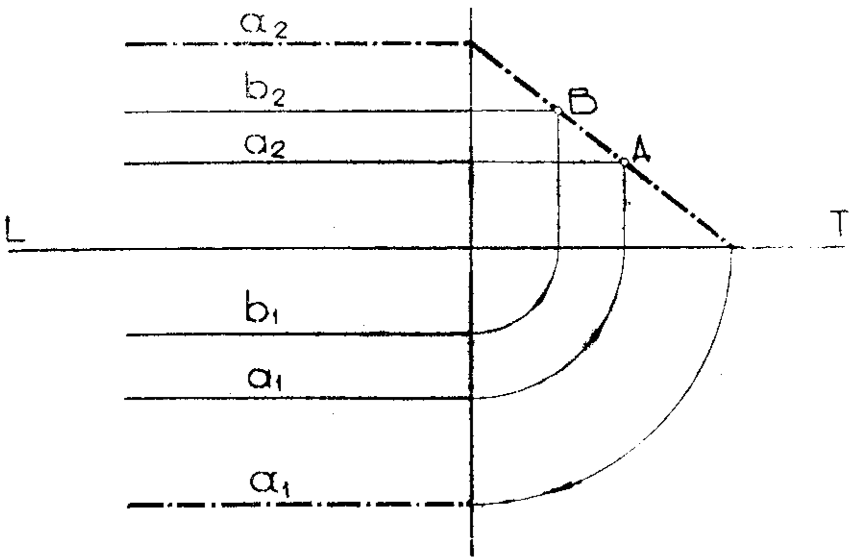


FIG. 142

del cuerpo; sus proyecciones horizontales coincidirán entonces con A_1, B_1, C_1, D_1.

Para el desarrollo observamos que, como las aristas son paralelas

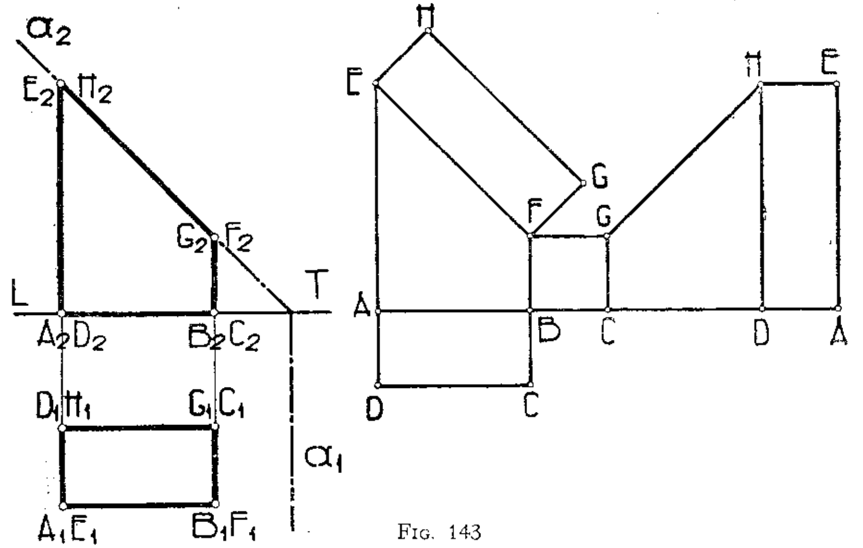


Fig. 143

al plano vertical, se proyectan sobre éste en tamaño real. La base inferior también la tenemos según su verdadera magnitud en $A_1B_1C_1D_1$. Es fácil entonces hacer el desarrollo pedido.

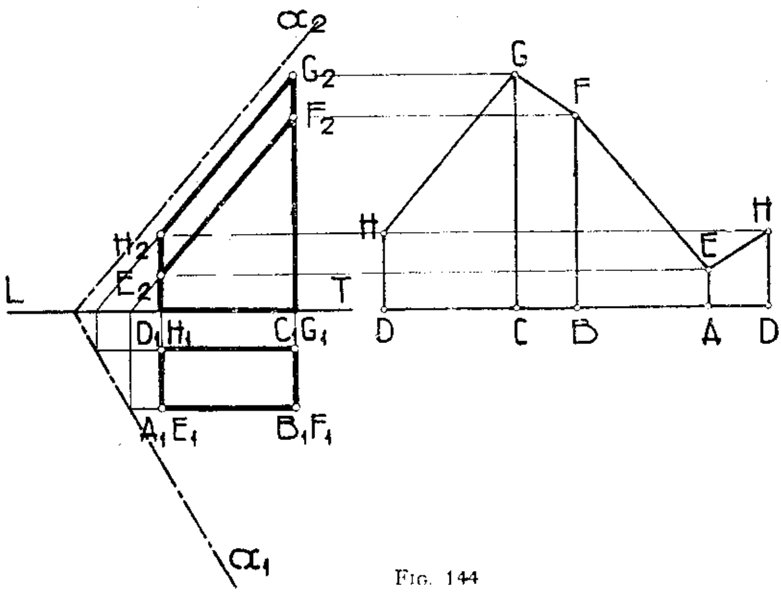


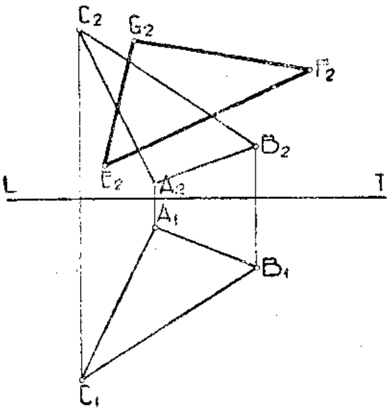
Fig. 144

12. — Cortemos ahora el mismo prisma anterior mediante un plano cualquiera, $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$ (fig. 114).

Los vértices de la sección son puntos de las aristas laterales del prisma. La proyección horizontal de la sección será entonces la misma proyección horizontal $A_1B_1C_1D_1$ de la base inferior. Para hallar la proyección vertical pensamos que la sección pertenece al plano α y entonces, recordando 4 y 5 de este mismo parágrafo, se obtiene sin dificultad la proyección $E_2F_2G_2H_2$ de la sección. El desarrollo de la superficie lateral del tronco se obtiene también sin dificultad. No nos encontramos, en cambio, en condiciones de dibujar, por ahora, la sección *EFGHE* en verdadera forma y tamaño.

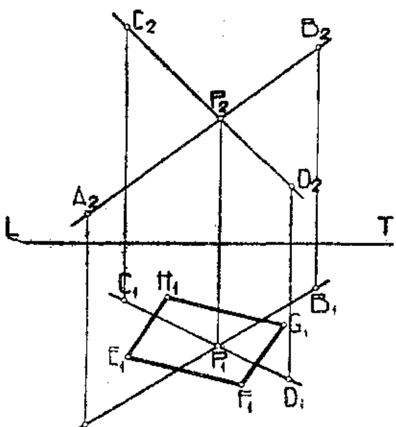
EJERCICIOS

28. Representar en una misma figura, mediante dos rectas paralelas, las distintas posiciones que puede presentar un plano paralelo a *LT*.



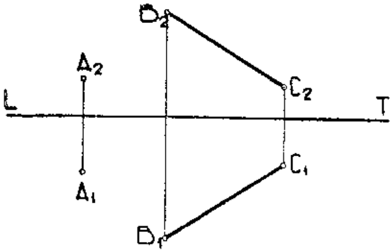
EJERCICIO 29

29. En el plano al cual pertenece el triángulo *ABC* cuyas dos proyecciones son dadas, hállase también el triángulo *EFG*, del cual se conoce únicamente la proyección vertical. Hallar la proyección horizontal.



EJERCICIO 30

30. En el plano determinado por dos rectas concurrentes (A_1B_1, A_2B_2) y (C_1D_1, C_2D_2) se desea dibujar el cuadrilátero *EFGH* cuya proyección horizontal es dada. Hallar la proyección vertical. Hallar también el perfil de las rectas dadas así como del cuadrilátero.



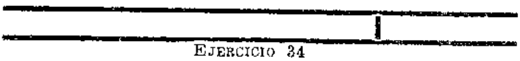
EJERCICIO 31

31. Sobre la recta *BC* marcar el punto *P* cuya cota y cuyo alejamiento exceden, respectivamente, en 5 mm y 4 mm a los correspondientes de *A*.

32. Determinar las proyecciones de un punto situado en un plano (α_1, α_2), perpendicular al plano π_2, que forma un ángulo de 20° con el plano π_1. El alejamiento del punto es 1,5.

33. Un polígono hállase situado en un plano (α_1, α_2) perpendicular al plano horizontal. ¿Cuál es la figura formada por su proyección horizontal?

34. Se proyecta una escuadra sobre el plano vertical y se obtiene la figura que se acompaña. ¿Cómo están situadas las caras de la escuadra con respecto al plano vertical de proyección?



EJERCICIO 34

35. Dada una de las proyecciones de un punto de un plano dado por sus trazas, hallar la otra proyección.

36. Dado un plano (α_1, α_2), determinar en él un punto situado a 3 unidades del plano vertical y 4 del horizontal.

37. Hacer pasar un plano por una recta dada (determinando las trazas del plano).

CAPÍTULO V

INTERSECCIONES

§ 31. INTERSECCION DE DOS PLANOS

1. — Se sabe que cuando dos planos se cortan la intersección es una línea recta. Se sabe también que cada uno de los diedros formados tiene como medida la de su *sección normal*, es decir, refiriéndonos al diedro indicado en la figura 145, la del ángulo plano QPR formado al conducir desde un punto cualquiera P de la intersección, las perpendiculares PQ y PR a esa misma intersección (una en cada cara).

Siendo la intersección de dos planos una recta, bastará, para determinarla, encontrar dos de sus puntos, o bien uno solo de éstos y la dirección de la recta.

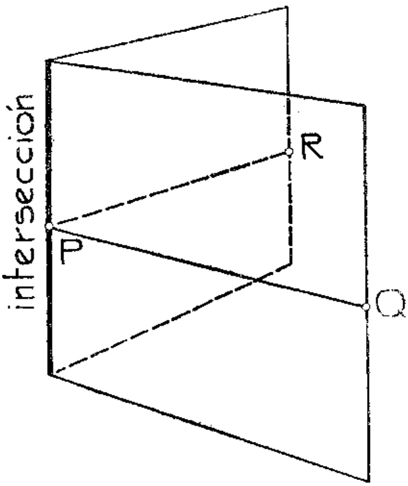


FIG. 145

2. — El procedimiento general para hallar la intersección de dos planos puede obtenerse mediante la consideración de los problemas siguientes:

1º Encontrar la intersección de una recta y un plano perpendicular a uno de los planos de proyección.

Sean (fig. 146) una recta $a \equiv (a_1, a_2)$ y un plano perpendicular al plano horizontal. Este plano puede ser dado por su traza horizontal α_1 o por la proyección horizontal de cualquier otra de sus rectas (*). Para hacer más objetiva la figura hemos dibujado también la proyección vertical de una parte del plano.

Se ha visto (3, § 27) que toda figura situada en un plano vertical tiene su proyección horizontal en la traza horizontal del plano. El punto en que la recta dada encuentra el plano α tendrá entonces su proyección en la intersección de a_1 y α_1.

La proyección vertical se encuentra mediante una línea de referencia.

Supuesto, como es usual, opaco el plano α, parte de la recta a es invisible para un observador que, colocado en el primer diedro, mira

(*) Exceptuadas las que son perpendiculares al plano π_1.

hacia el plano vertical de proyección. Es visible, en cambio, refiriéndonos siempre al primer diedro, para un observador que mira desde arriba el plano horizontal de proyección. Por esto parte de la proyección vertical a_2 aparece de puntos en la figura descriptiva.

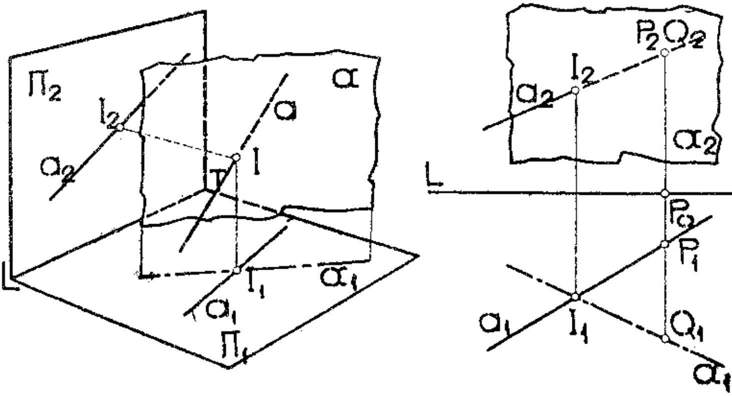


Fig. 146

Para determinar en la figura descriptiva cuál es la parte visible de la recta basta considerar a derecha o izquierda de I un punto cualquiera P de a. Si su alejamiento $\overline{P_oP_1}$ es menor que el alejamiento $\overline{P_oQ_1}$ de un punto Q, que perteneciendo al plano α tiene Q_2 coincidente con P_2, la parte $\overline{IP}$ de la recta es invisible en proyección vertical. Es visible en caso contrario.

En la figura 147 se ha considerado un plano perpendicular al plano vertical. Recordando lo establecido en 4, § 27, su construcción no ofrece dificultad alguna.

En lo que concierne a la visibilidad, la parte $\overline{I_1P_1}$ es invisible por ser $\overline{P_oP_2} < \overline{P_oQ_2}$, es decir, por tener el punto P de la recta menor

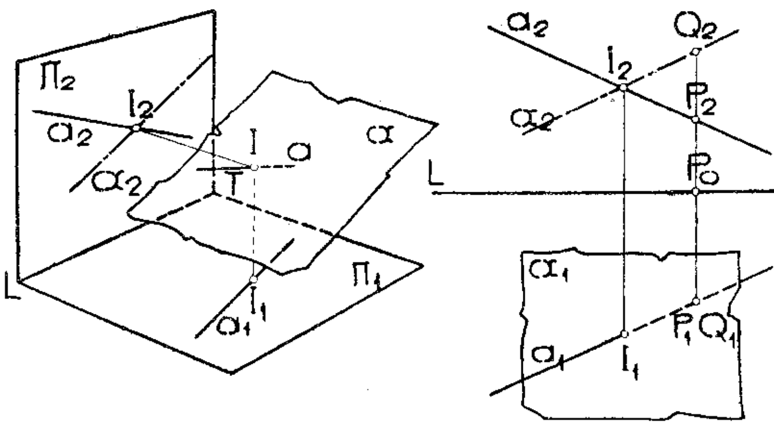


Fig. 147

cota que el punto Q del plano, elegido Q de tal modo que teniendo igual alejamiento que P tenga Q_1 coincidente con P_1.

2º Encontrar la intersección de un plano cualquiera y un plano perpendicular a uno de los planos de proyección.

Sean α un plano cualquiera y β un plano perpendicular al horizontal (fig. 148). Consideradas dos rectas cualesquiera, a y b de α, se

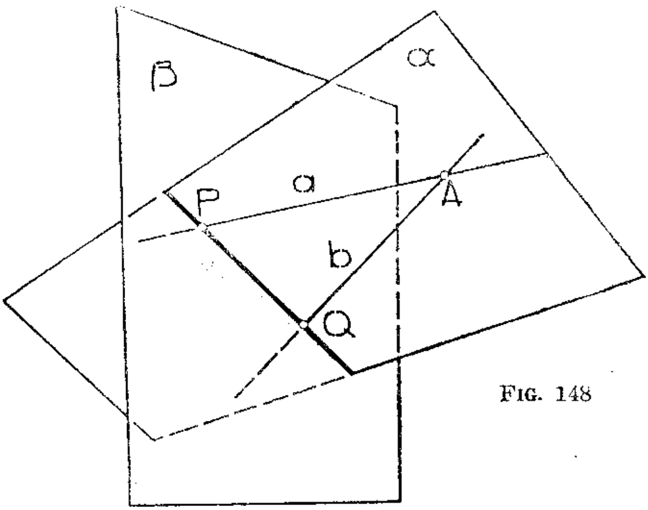


FIG. 148

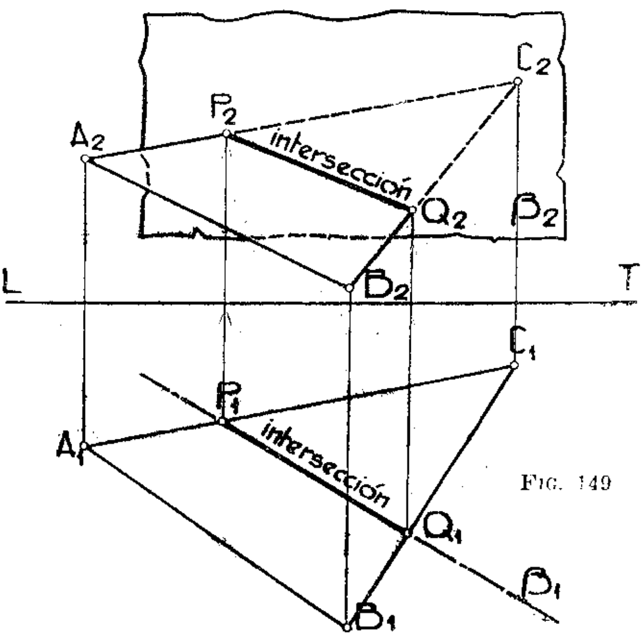


FIG. 149

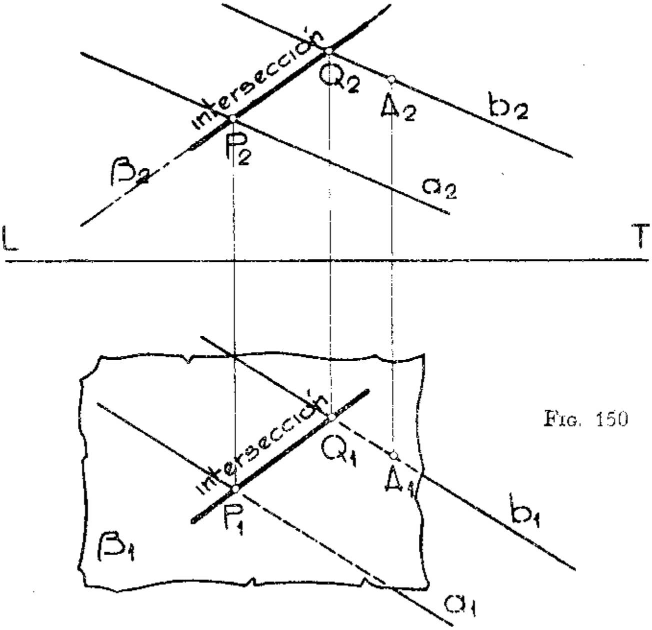


FIG. 150

hallan en la forma indicada en el problema anterior los puntos P y Q en que estas rectas cortan el plano β. La recta PQ es entonces la intersección buscada.

Sean (fig. 149) β_1 la traza horizontal del plano vertical, del cual damos, para mayor comprensión, la proyección vertical de una parte limitada, y (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) el plano α.

La recta AC del plano α encuentra β en el punto $P \equiv (P_1, P_2)$; la recta BC lo encuentra en el punto $Q \equiv (Q_1, Q_2)$. La recta PQ es entonces la intersección buscada.

En la figura 150 se ha utilizado un plano perpendicular al plano vertical. El plano α es dado por la recta (a_1, a_2) y el punto (A_1, A_2).

Por este punto se trazó (b_1, b_2) paralela a la recta (a_1, a_2). Estas rectas encuentran el plano β en los puntos $P \equiv (P_1, P_2)$ y $Q \equiv (Q_1, Q_2)$. La intersección buscada es, pues, PQ.

La visibilidad de las rectas a y b se obtiene en la forma ya indicada.

3. — Conocidos los dos problemas anteriores pode

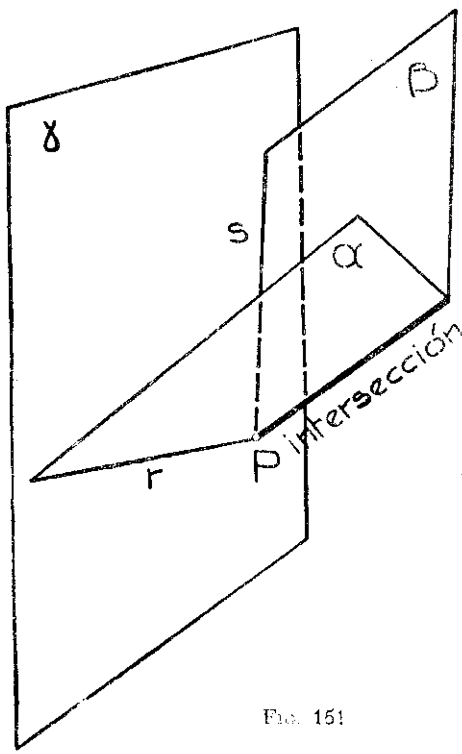


FIG. 151

mos considerar ya la intersección de dos planos cualesquiera.

Para encontrar un punto de la intersección (fig. 151) se cortan los dos planos dados α y β mediante un plano auxiliar γ perpendicular a uno de los planos de proyección. Se obtienen dos rectas, *r* y *s*, que se encuentran en un punto *P* de la intersección. Repitiendo la operación con otro plano auxiliar se obtendrá otro punto de la intersección. Esta queda así perfectamente determinada.

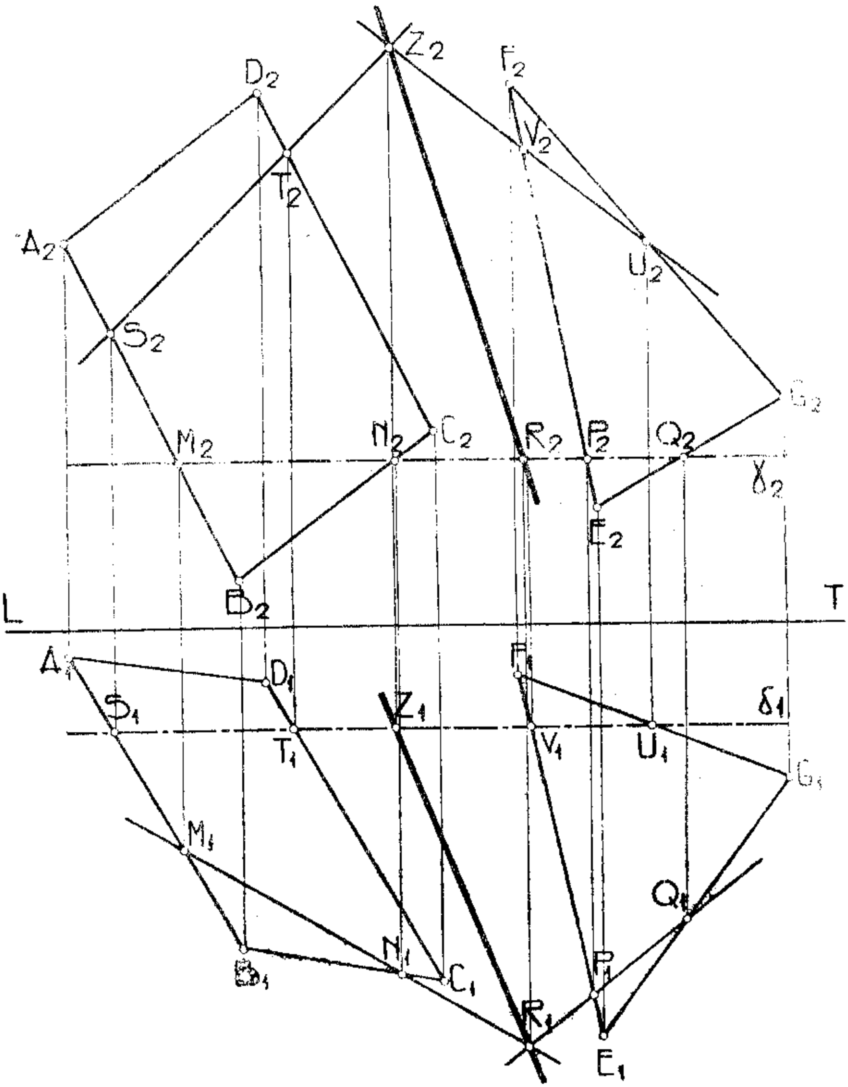


FIG. 152

4. — Supongamos entonces los planos *ABCD* y *EFG* (fig. 152). Tomemos como primer plano auxiliar uno normal al vertical. Sea γ_2 su traza vertical.

La intersección de este plano con los dos planos dados son las rectas *MN* y *PQ*, respectivamente. Su punto de intersección es $R \equiv (R_1, R_2)$.

El segundo plano auxiliar ha sido elegido paralelo al plano vertical. Su traza horizontal es δ_1 y corta los planos dados según las rectas *ST* y *UV*, respectivamente. Estas se encuentran en $Z \equiv (Z_1, Z_2)$. La recta *RZ* es la intersección pedida.

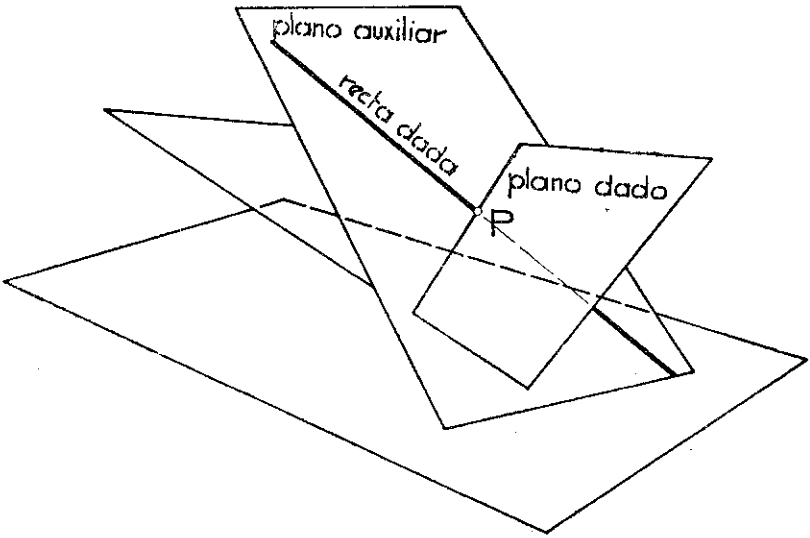


Fig. 153

Los planos auxiliares a utilizar pueden ser cualesquiera de los normales a uno de los planos de proyección. Muy cómodos resultan los paralelos al vertical o al horizontal, teniendo presente, al elegirlos, la conveniencia de que corten las figuras dadas en las partes más anchas.

§ 32. INTERSECCION DE RECTA Y PLANO

1. — La intersección de una recta y un plano es un punto. Para determinarlo, en el caso de que el plano no ocupa las posiciones particulares consideradas en el parágrafo anterior, se recurre a un plano auxiliar que pasa por la recta. El plano auxiliar (fig. 153) corta el plano dado según una recta. La intersección de ésta con la dada es el punto de intersección buscado.

2. — Imaginemos entonces (fig. 154) que (a_1, a_2) es la recta dada y $(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ el plano. Queremos determinar las proyec

ciones del punto en que la recta encuentra el plano. Como plano auxiliar elegimos el que proyecta horizontalmente la recta dada. Su traza horizontal es la misma a_1 y corta el plano del triángulo según

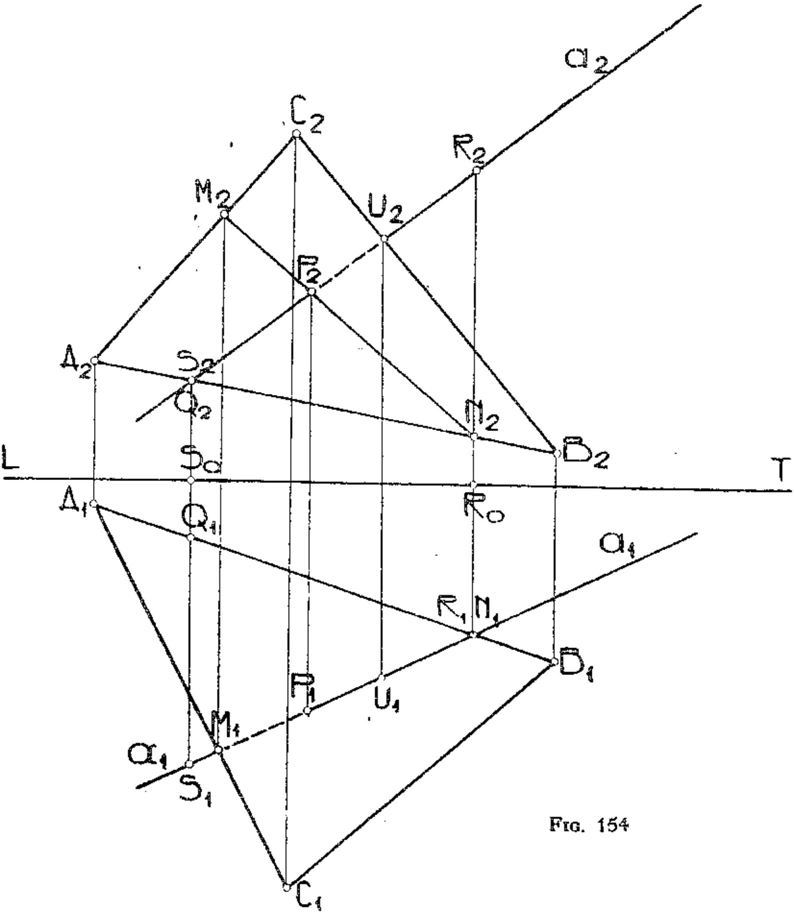


FIG. 154

la recta MN. El punto $P \equiv (P_1, P_2)$ en que MN corta la recta dada a es el punto de intersección buscado. Para la visibilidad de la recta a procederemos en la forma indicada en § 31. Comencemos con la proyección horizontal.

El punto N_1 es proyección horizontal del punto N del triángulo y del punto R de la recta a. Los dos tienen igual alejamiento, pero la cota de R es mayor $(\overline{R_0R_2} > \overline{R_0N_2})$; el punto R es, pues, horizontalmente visible, y con él toda la porción $\overline{PR}$ de a. La otra parte, $\overline{PM}$, será, en consecuencia, invisible.

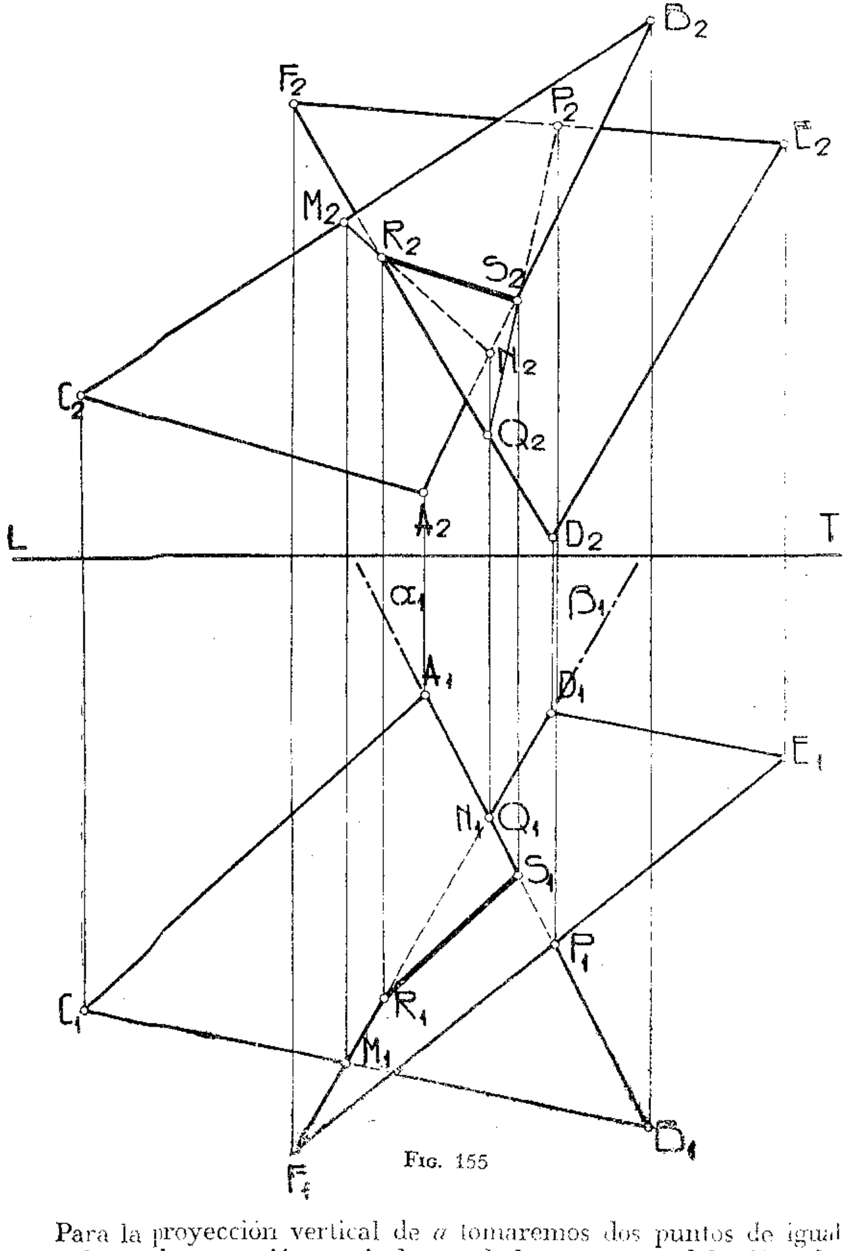


Fig. 155

Para la proyección vertical de a tomaremos dos puntos de igual cota y de igual proyección vertical, uno de la recta, otro del triángulo. Aquel que tenga mayor alejamiento será visible en proyección vertical. Así, de los dos puntos que se proyectan verticalmente en S_2, el de la recta a tiene mayor alejamiento. El segmento SP es, pues, visible. Es invisible, en cambio, el segmento PU.

Sabiendo hallar la intersección de una recta y un plano se puede hallar la intersección de dos planos determinando la intersección de uno de éstos con dos rectas del otro y uniendo después los dos puntos obtenidos, o bien la intersección del primero con una recta del segundo y la del segundo con una recta del primero, uniendo después los dos puntos como en el caso anterior.

En la figura 155 se ha empleado este último procedimiento.

§ 33. INTERSECCION DE DOS PLANOS DADOS POR SUS TRAZAS

1. — Las trazas de un plano no son sino las intersecciones de éste con cada uno de los planos de proyección.

Conocidas, pues, las trazas (α_1, α_2) y (β_1, β_2) de dos planos no paralelos, el problema de hallar su recta de intersección no es sino un caso particular, semirresuelto, del problema general dado en los números 3 y 4 del § 31. Las intersecciones de los dos planos dados con el plano horizontal son las rectas α_1 y β_1, cuyo punto común $A \equiv (A_1, A_2)$ (figura 156) es uno de los puntos de la intersección buscada.

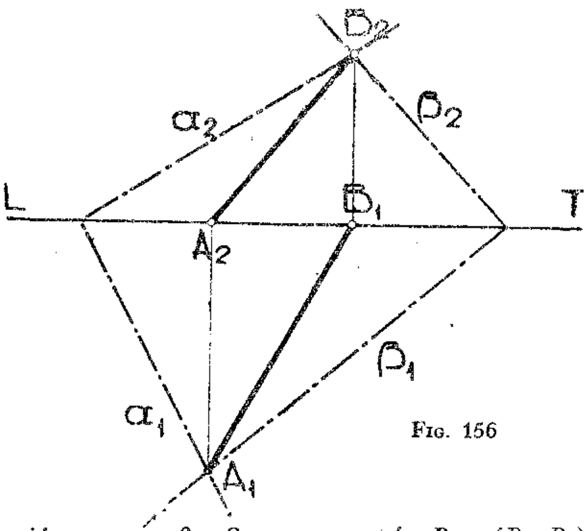


Fig. 156

Las intersecciones de α y β con el plano vertical de proyección son α_2 y β_2. Su punto común $B \equiv (B_1, B_2)$ es otro punto de la intersección buscada. La recta AB es, pues, la intersección de los planos α y β. Sus trazas son A y B.

2. — Los planos cuya intersección se busca pueden ocupar posiciones especiales. Resultan así los siguientes casos particulares más importantes:

1° Dos trazas homónimas son paralelas.

Sean paralelas las trazas horizontales α_1 y β_1 (fig. 157). El punto P_2 común a las trazas α_2 y β_2, es la traza vertical de la intersección. Su proyección horizontal es P_1 sobre la línea de tierra. Tenemos así un punto P_2 de la proyección vertical de la intersección y un punto P_1 de su proyección horizontal. Pero la *Geometría Elemental* enseña que esa intersección es paralela a las trazas α_1 y β_1. Sus proyecciones deben ser entonces paralelas a las de estas rectas; basta así trazar

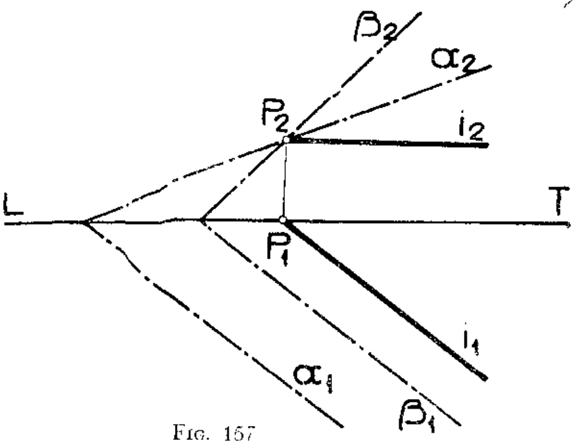


Fig. 157

por P_2 la paralela a LT y por P_1 la paralela a α_1 (o β_1). La intersección buscada es $i \equiv (i_1, i_2)$.

2º Uno de los planos es cualquiera, el otro es paralelo a uno de los planos de proyección.

Sea (α_1, α_2) el plano cualquiera y β_1 la única traza de un plano paralelo al plano vertical (figura 158).

La recta de intersección es una recta del plano vertical β_1; su proyección horizontal i_1 coincide con β_1. Además, la recta i del espacio es paralela a la traza α_2 (intersecciones de dos planos paralelos con un tercero); su proyección vertical i_2 será, pues, paralela a α_2.

3º Uno de los planos es cualquiera, el otro es perpendicular a uno de los planos de proyección.

Sea (α_1, α_2) el plano cualquiera e imaginemos que el otro (β_1, β_2) sea perpendicular al plano horizontal (fig. 159).

La construcción a efectuar es la indicada para el caso general, 1 de este parágrafo. La única particularidad consiste en que la proyección horizontal i_1 de la intersección coincide con β_1.

4º Uno de los planos es cualquiera, el otro es de perfil.

Sea (α_1, α_2) el plano cualquiera y (β_1, β_2) el de perfil (fig. 160). La recta de intersección une en el espacio los dos puntos A_1 y B_2 en que se cortan las trazas homónimas de los dos planos. Como esa recta pertenece al plano de perfil, sus proyecciones i_1 e i_2 coinciden con las trazas β_1 y β_2. En la figura hemos determi-

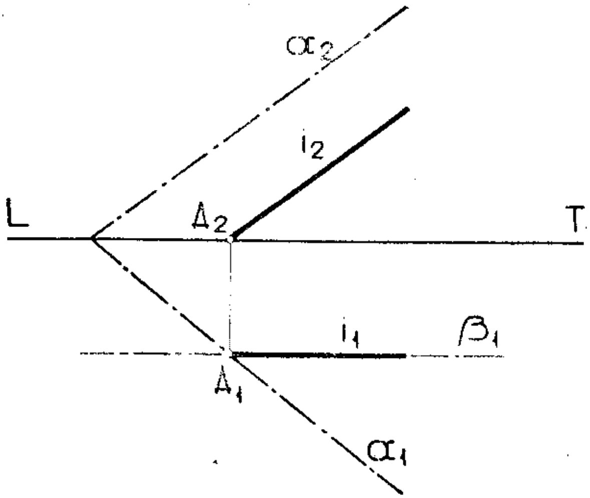


Fig. 158

nado el perfil i_3 de la intersección rebatiendo el plano de perfil sobre el plano vertical. El segmento $\overline{B_2A_3}$ da la verdadera magnitud de la intersección y el ángulo $A_2B_2A_3$ es el ángulo que la recta i forma con el plano π_2.

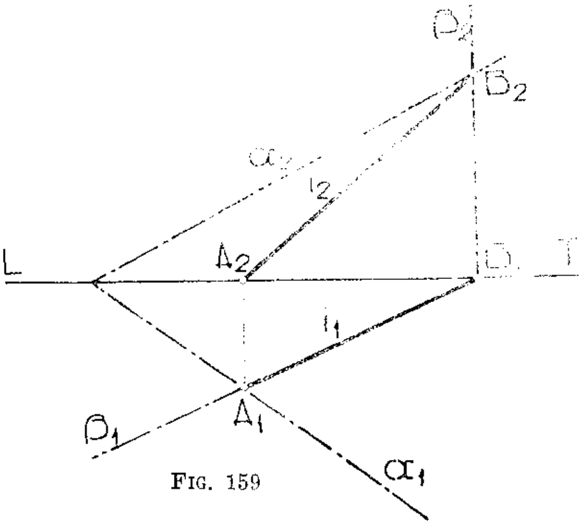


FIG. 159

5º Uno de los planos es perpendicular al plano π_1, el otro es horizontal.

La recta de intersección es paralela al plano horizontal. Su proyección vertical i_2 (fig. 161) coincide con β_2; su proyección horizontal i_1 coincide con α_1.

6º Uno de los planos es cualquiera, el otro es paralelo a LT. Como lo indica la figura 162, la construcción es igual a la del caso general. La recta (i_1, i_2) es la intersección buscada.

7º Los dos planos son paralelos a la línea de tierra.

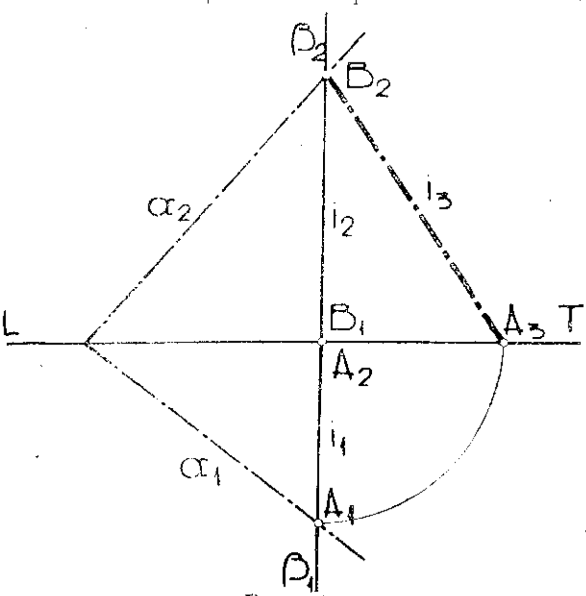


FIG. 160

Sean (α_1, α_2) y (β_1, β_2) los planos (fig. 163). La intersección será también paralela a la línea de tierra. Para determinarla se recurre a un plano auxiliar de perfil (γ_1, γ_2).

Este plano corta los planos dados según dos rectas, cuya intersección da un punto de la intersección buscada. La recta común a los planos α y γ tiene las proyecciones coincidentes con γ_1 y γ_2. Sus trazas en el espacio son A_1 y B_2. Reba-

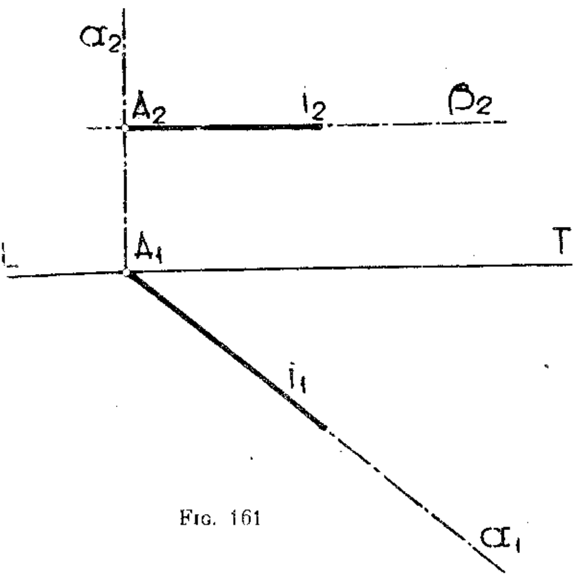


FIG. 161

tiendo entonces el plano de perfil sobre el plano vertical, el punto B_2 no se mueve; A_1 se coloca en A_3. El segmento $a_3 = \overline{B_2A_3}$ es, pues, el perfil de la porción de recta según la cual se cortan los planos α y γ. Del mismo modo b_3 es el perfil de la intersección de β y γ.

El punto i_3 en que se cortan a_3 y b_3 es el perfil de la intersección de los planos α y β. Debemos hallar sus proyecciones. Como la cota de i_3 es común a todos los puntos de la recta i, la proyección vertical i_2 se obtiene trazando por i_3 la paralela a LT. La proyección horizontal i_1 se encuentra haciendo volver a su posición primitiva el plano de perfil.

8º Dos trazas de igual nombre de los planos dados se cortan fuera de los límites del dibujo.

Supongamos que esto ocurra para las trazas horizontales α_1 y β_1 (fig. 164). La traza vertical (B_1, B_2) de la intersección se halla sin dificultad, no así la horizontal. Se trata entonces de encontrar otro punto de esa recta.

Imaginemos como auxiliar el plano horizontal γ_2. Los planos dados α y β son cortados por éste según las horizontales (a_1, a_2) y (b_1, b_2), respectivamente. El

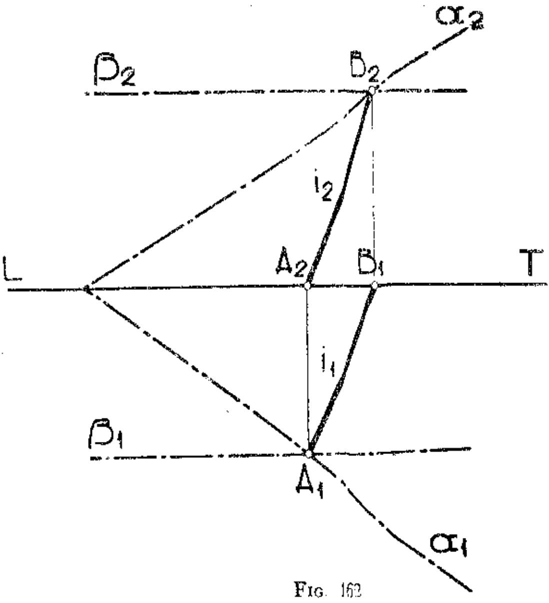


FIG. 162

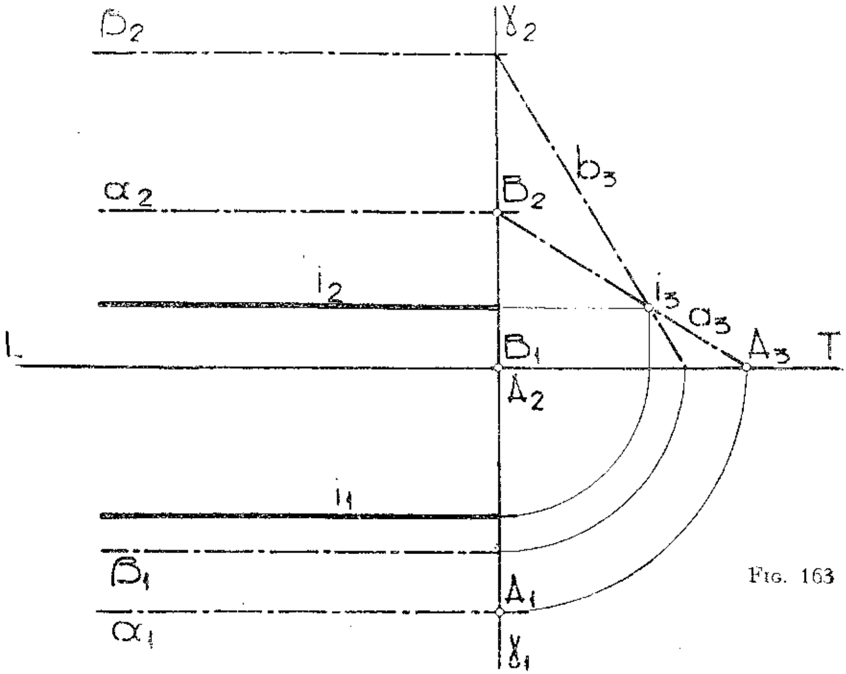


FIG. 163

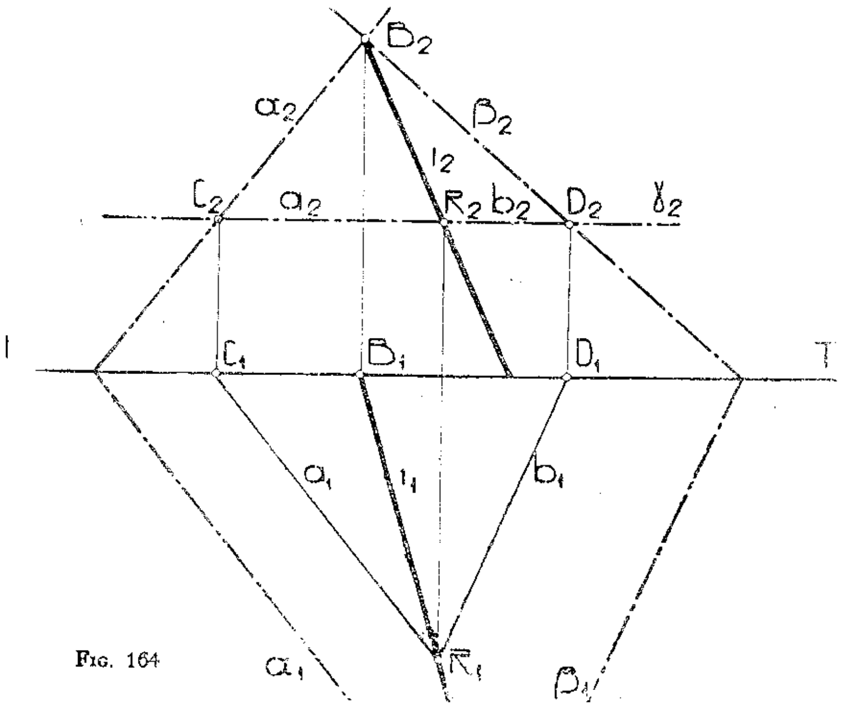


FIG. 164

punto (R_1, R_2), común a estas horizontales, es, sin duda, un punto de la intersección de α y β (3 de § 31). Uniendo R_1 con B_1 y R_2 con B_2 se tienen las proyecciones i_1 e i_2 de la intersección pedida.

Si tampoco α_2 y β_2 se cortan dentro de los límites del dibujo, se recurre a un segundo plano auxiliar.

3. — Resueltos los problemas más comunes de intersección de planos dados por sus trazas, determinemos ahora la intersección de una recta (a_1, a_2) y un plano dado por sus trazas α_1, α_2 (fig. 165).

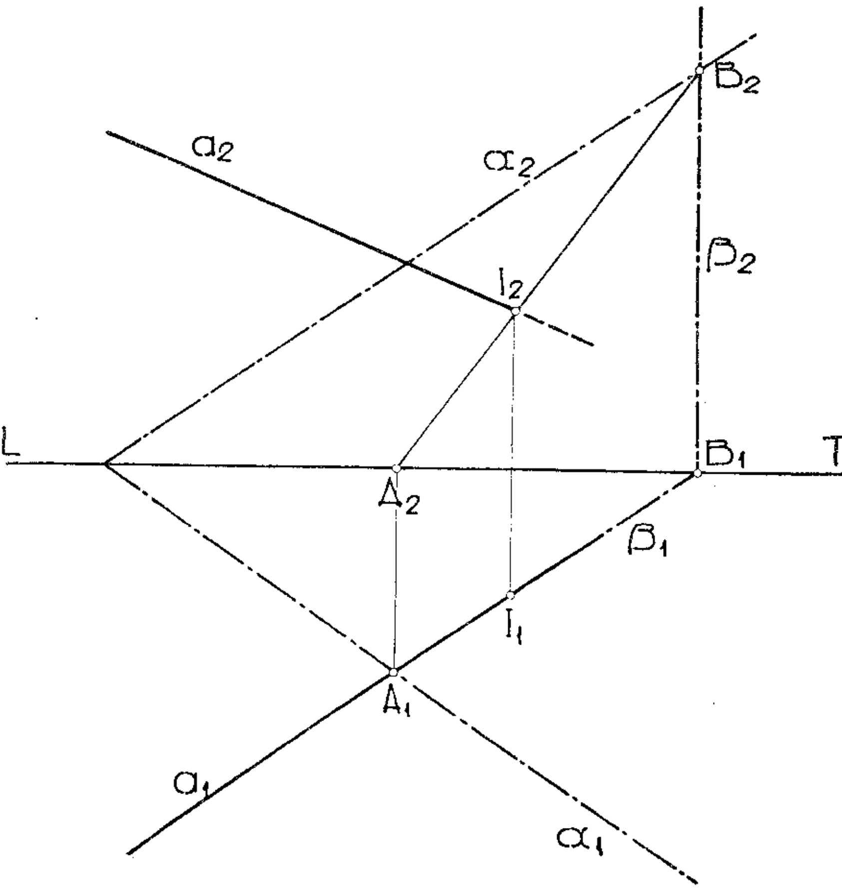


Fig. 165

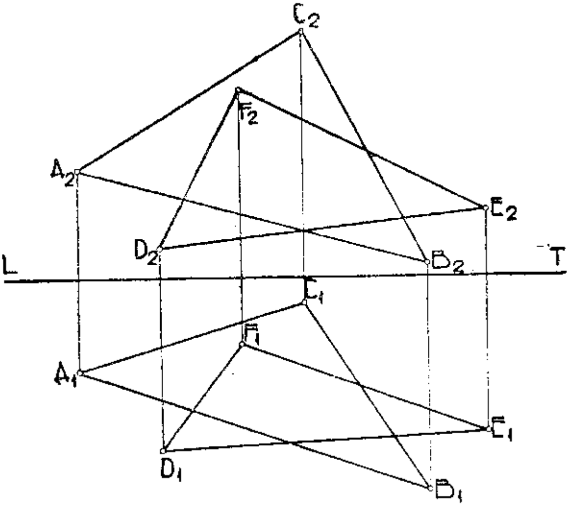
El procedimiento empleado no es sino un caso particular de 1 y 2 de § 32.

Se hace pasar por la recta un plano auxiliar; éste corta el plano dado según una recta. La intersección de esta recta con la dada es el punto buscado.

Como plano auxiliar hemos elegido el que proyecta horizontalmente la recta dada. Sus trazas son α_1 y β_2, perpendicular a LT. Los dos planos se cortan según la recta de trazas (A_1, A_2) y (B_1, B_2); esta recta corta la dada en (I_1, I_2), punto de intersección buscado.

EJERCICIOS

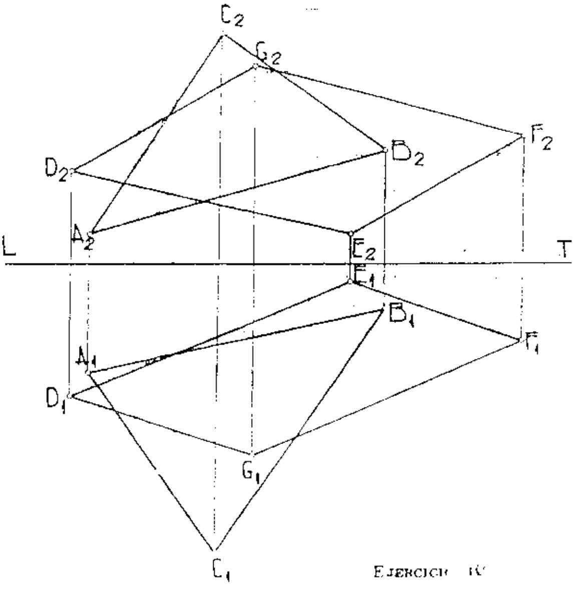
38. Hallar la intersección de una recta arbitraria y un plano ABC perpendicular al plano vertical.



39. Idem de los triángulos ABC y DEF.

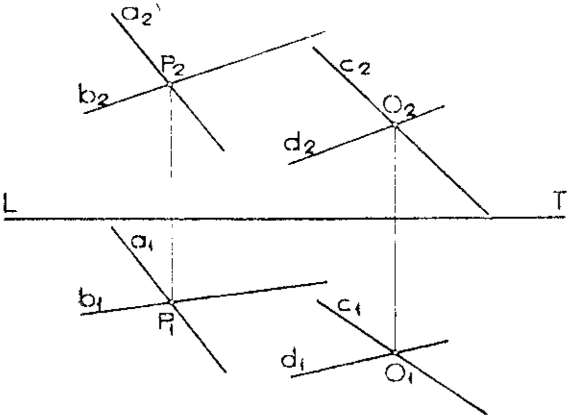
Ejercicio 39

40. Idem de los planos ABC y $DEFG$.

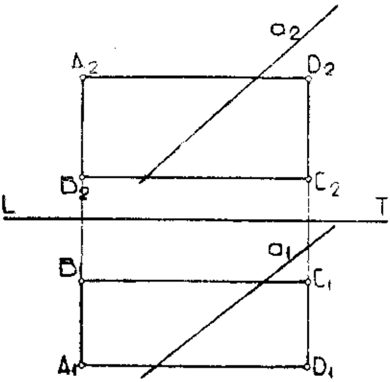


Ejercicio 40

41. Idem de los planos determinados por las rectas a y b, c y d.



EJERCICIO 41



EJERCICIO 42

42. Idem de la recta (a_1, a_2) y el plano ($A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$).

43. Encontrar el punto común a tres planos dados por sus trazas. (Determínese la recta de intersección del 1º y el 2º, luego del 1º y 3º; el punto de intersección de estas dos rectas es el punto pedido).

44. Encontrar la recta de intersección de dos planos paralelos a la línea de tierra (Utilizar un plano auxiliar cualquiera).

45. Encontrar la intersección de dos planos cuyas trazas pasan por un mismo punto de LT.

46. Encontrar la intersección de dos planos cuando uno de ellos es dado por su recta de máxima pendiente; el otro por sus trazas.

47. Encontrar el punto en que una recta encuentra un plano dado por su recta de máxima pendiente.

CAPÍTULO VI

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

§ 34. PARALELISMO

1. — Se sabe por *Geometría Elemental* que *una recta es paralela a un plano si es paralela a una recta del plano* (criterio de existencia de rectas y planos paralelos). Recíprocamente, un plano es paralelo a una recta si contiene una recta paralela a la recta dada. Así, por ejemplo, la recta $a \equiv (a_1, a_2)$ es paralela al plano dado por las rectas concurrentes $b \equiv (b_1, b_2)$ y $c \equiv (c_1, c_2)$ (fig. 166) porque $a \parallel b$.

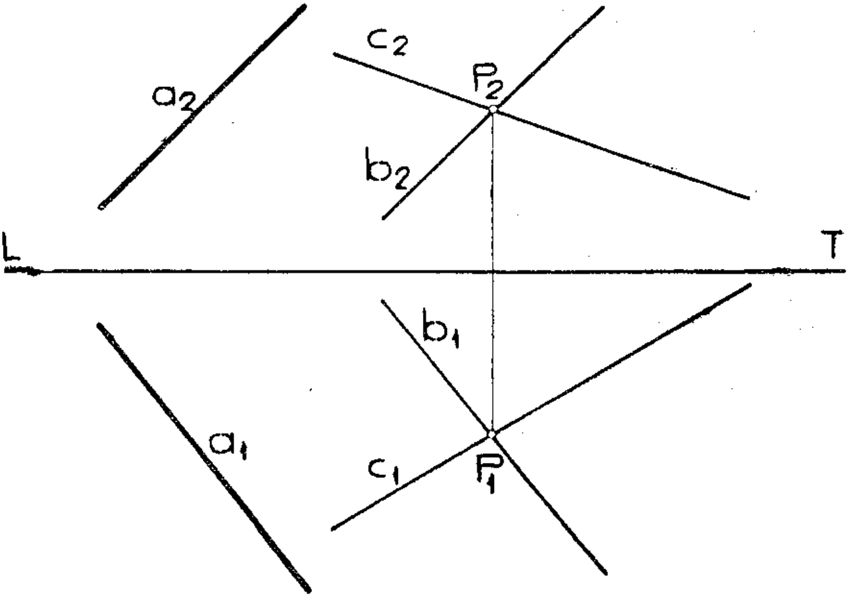


FIG. 166

Del mismo modo, la recta $a \equiv (a_1, a_2)$, de la figura 167, es paralela al plano α, dado por sus trazas α_1, α_2, porque es paralela a la recta $b \equiv (b_1, b_2)$ del plano.

2. — Es evidente que por un punto P exterior a un plano dado α se puede trazar un número infinito de rectas paralelas al plano.

Recíprocamente, por un punto P exterior a una recta se puede hacer pasar un número infinito de planos paralelos a la recta.

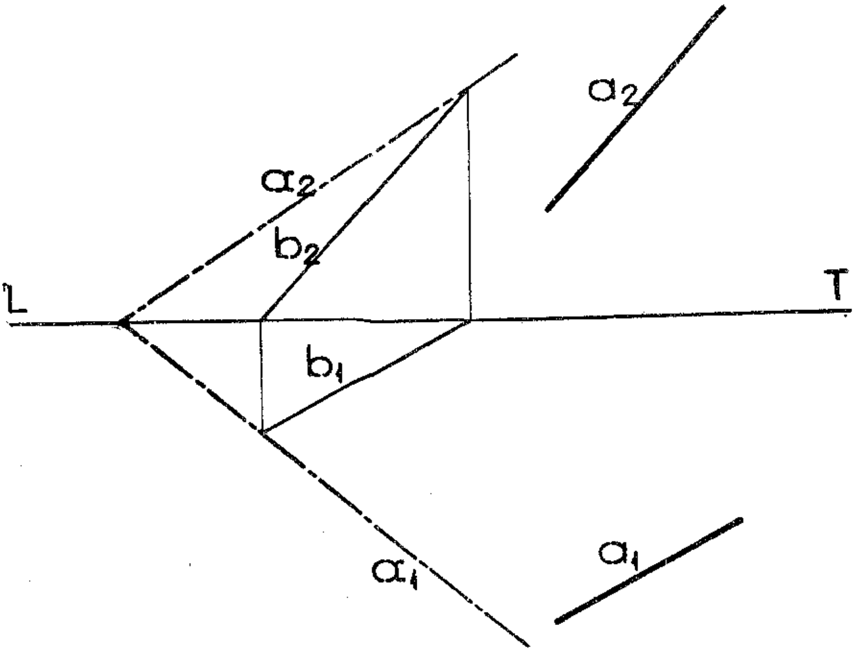


FIG. 167

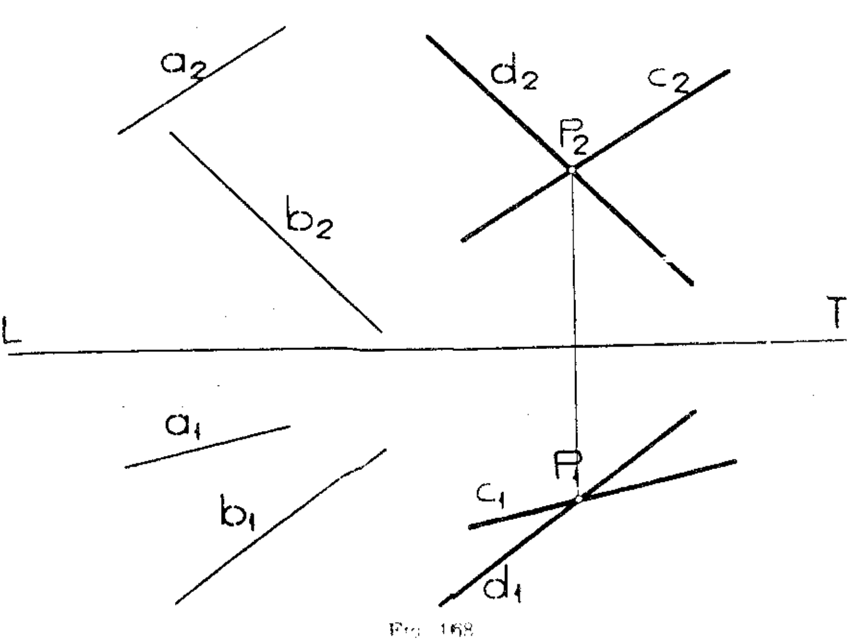


FIG. 168

3. El plano que contiene el punto P (fig. 168) y es paralelo a las rectas a y b se halla representado por las rectas c y d, que pasan por P, y son respectivamente paralelas a las rectas a y b.

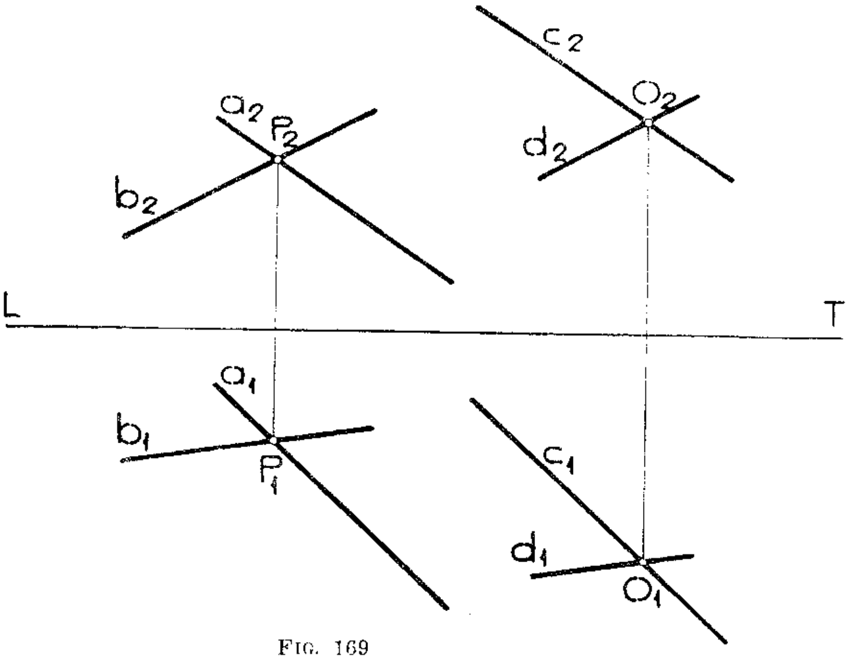


FIG. 169

Si a y b fuesen coplanares, su plano será paralelo al de c y d, pues, según enseña la *Geometría Elemental, dos planos son paralelos*

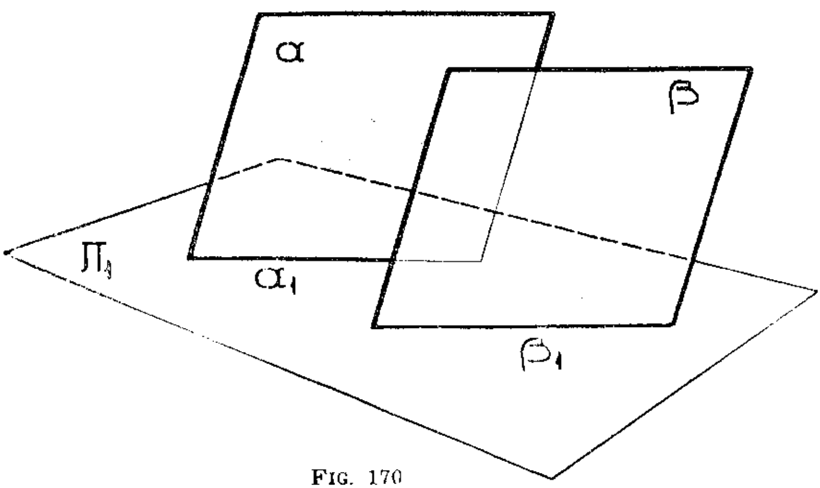


FIG. 170

cuando uno de ellos contiene dos rectas concurrentes paralelas al otro (criterio de existencia de planos paralelos).

Así, por ejemplo, los planos determinados por las rectas *a* y *b* y *c* y *d*, de figura 169, son paralelos.

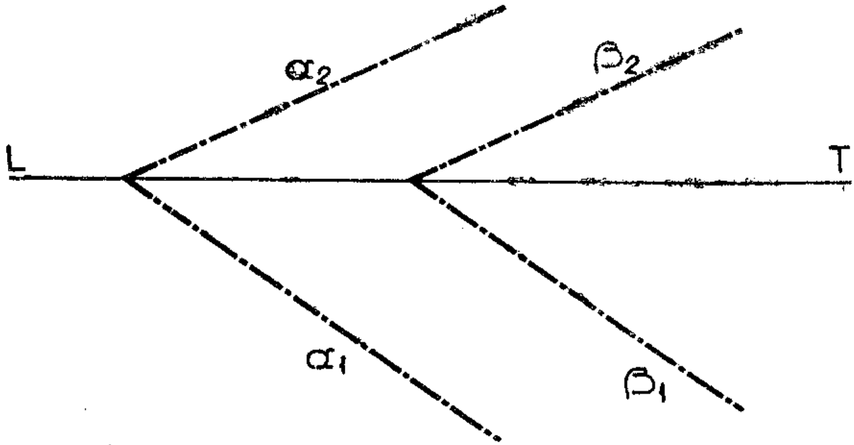


FIG. 171

4. — Es evidente que *si dos planos son paralelos, sus trazas de igual nombre son paralelas.* En efecto (fig. 170), las trazas α_1 y β_1, por ejemplo, no son sino las intersecciones de los planos paralelos

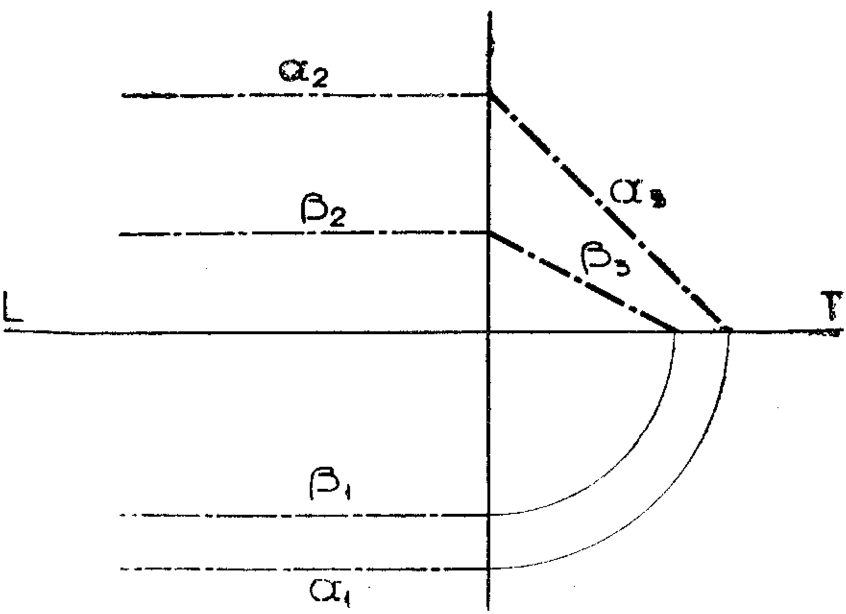


FIG. 172

dados con el mismo plano π_1. La representación es, en general, la dada en figura 171.

5. — Recíprocamente, cúmplese, en general, que *dos planos que tienen sus trazas de igual nombre paralelas son paralelos.*

Dijimos *en general*, y explicaremos por qué.

Si las trazas de los dos planos son paralelas entre sí y paralelas a LT, los planos no son siempre paralelos. Es lo que ocurre, por ejemplo, con los planos α y β de la figura 172, que no son paralelos, como lo hace ver claramente el plano de perfil.

6. — Dados un plano por sus trazas α_1 y α_2 y un punto (P_1, P_2) que no le pertenece (fig. 173), estamos en condiciones de encontrar el plano que pasando por P es paralelo al plano α.

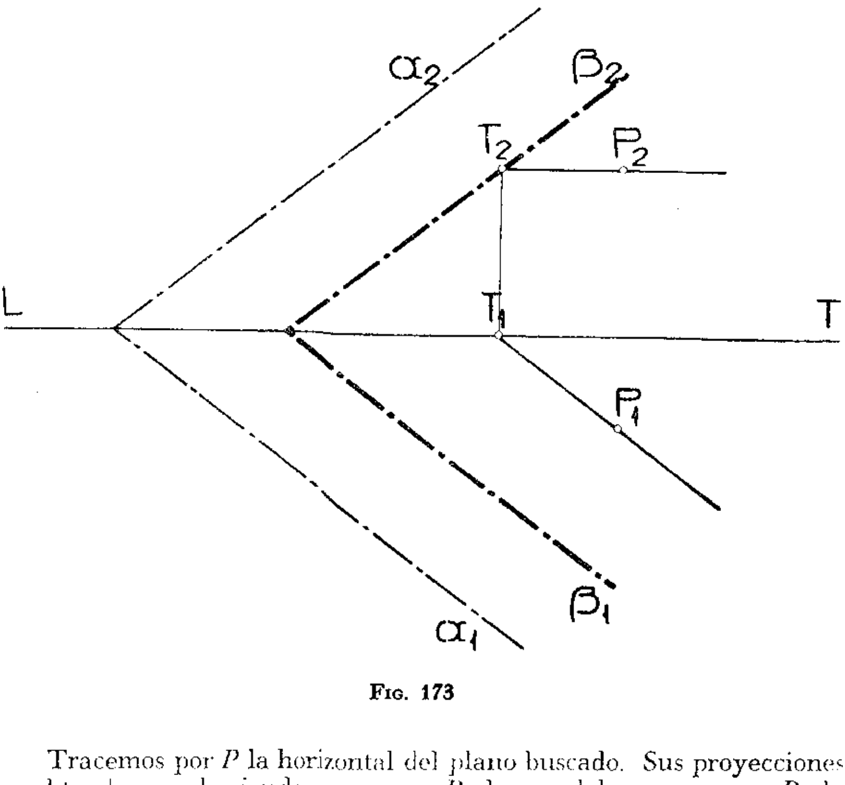


Fig. 173

Tracemos por P la horizontal del plano buscado. Sus proyecciones las obtendremos haciendo pasar por P_1 la paralela a α_1 y por P_2 la paralela a LT. La traza vertical T_2 de esta recta es un punto de la traza vertical del plano que se busca; es posible entonces construir sin dificultad las trazas β_2, primero, y β_1, después, del plano β que contiene el punto P y es paralelo al plano α.

§ 35. PERPENDICULARIDAD

1. — Para resolver los problemas de perpendicularidad recordemos los siguientes principios de *Geometría Sólida Elemental*:

1º La condición necesaria y suficiente para que una recta sea perpendicular a un plano es que ella sea perpendicular a dos rectas del plano.

2º La condición necesaria y suficiente para que dos planos sean perpendiculares entre sí es que uno de ellos contenga una recta perpendicular al otro plano.

3º La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares entre sí es que sean perpendiculares entre sí sus proyecciones sobre un plano paralelo a una de ellas.

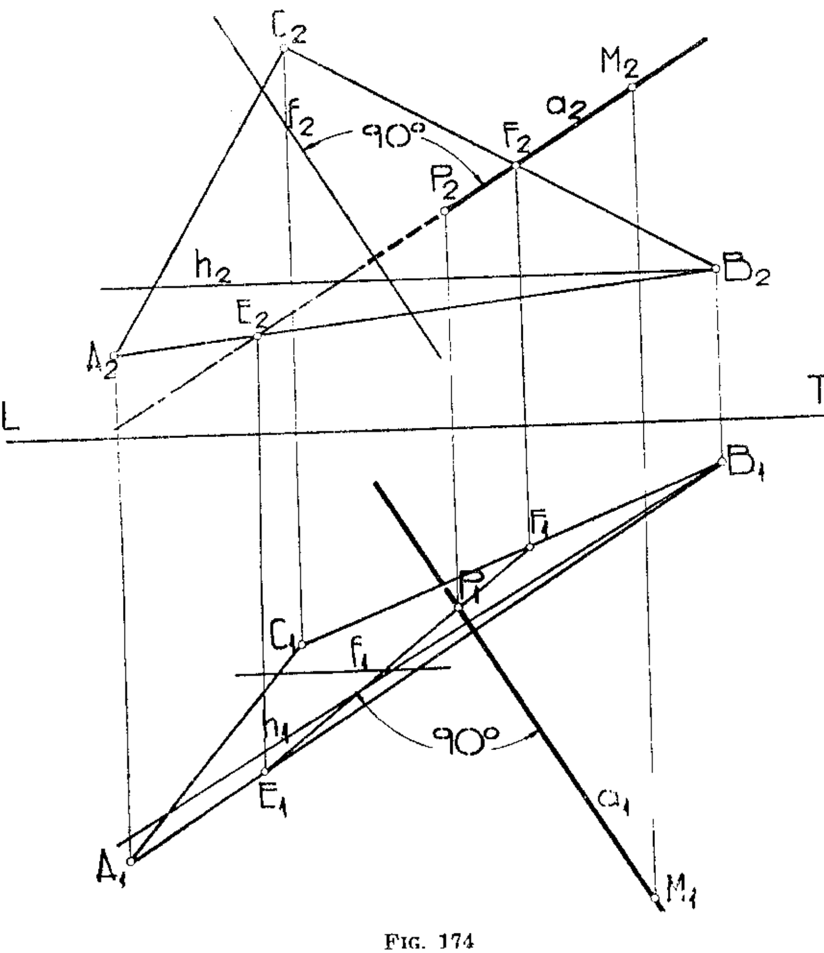


FIG. 174

2. — Resolvamos ahora el problema siguiente:

Conducir por el punto $M \equiv (M_1, M_2)$ la perpendicular al plano $ABC \equiv (A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2)$ (fig. 174).

Si a es la recta pedida, ella será perpendicular a dos rectas cualesquiera del plano (1er principio). En particular, será perpendicular a una horizontal y a una frontal del plano.

Pero, por el 3er principio, las proyecciones a_1 y a_2 son, respectivamente, perpendiculares a las proyecciones h_1 de la horizontal y f_2 de la frontal del plano.

Basta conducir entonces por M_1 la perpendicular a h_1 y por M_2 la perpendicular a f_2. El punto P es el pie de la perpendicular.

Si el plano es dado por sus trazas, la construcción del problema anterior es más simple.

Las trazas α_1 y α_2 del plano (fig. 175) no son sino una horizontal y una frontal del plano. Basta entonces conducir por M_1 y M_2 las perpendiculares a_1 y a_2 a las trazas α_1 y α_2, respectivamente.

El punto P es el pie de la perpendicular.

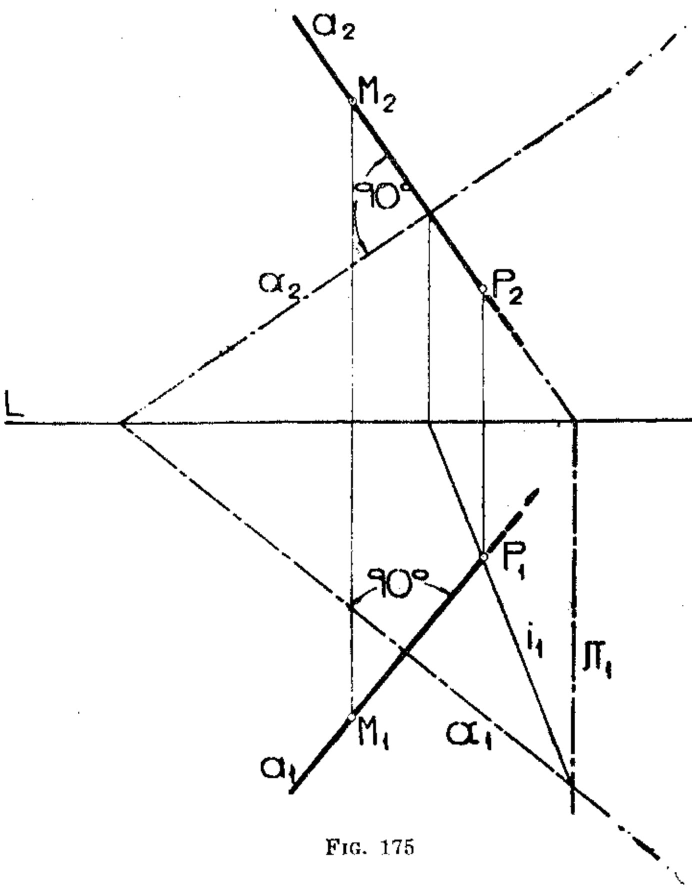


FIG. 175

3. — Trátese ahora de hacer pasar por un punto el plano perpendicular a una recta dada.

Sean $A \equiv (A_1, A_2)$ el punto y $a \equiv (a_1, a_2)$ la recta (fig. 176).

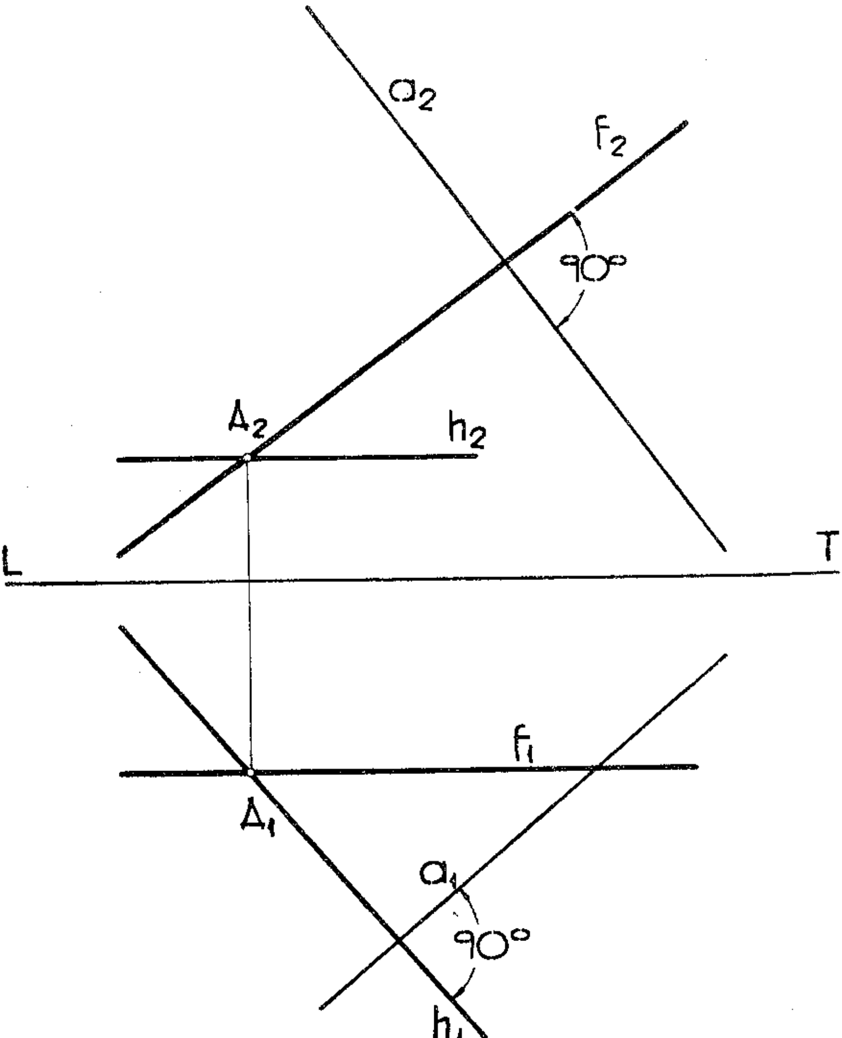


FIG. 176

Hagamos pasar por A una horizontal y una frontal del plano buscado, trazando $h_1 \perp a_1$ y $f_2 \perp a_2$. El plano buscado es el de las rectas (h_1, h_2), (f_1, f_2).

Si el plano debe ser dado mediante sus trazas, se conduce primero por A una horizontal del plano, haciendo $h_1 \perp a_1$. La perpendicu-

lar por B_2 a la proyección a_2 da la traza vertical del plano buscado La traza horizontal es paralela a h_1 (fig. 177).

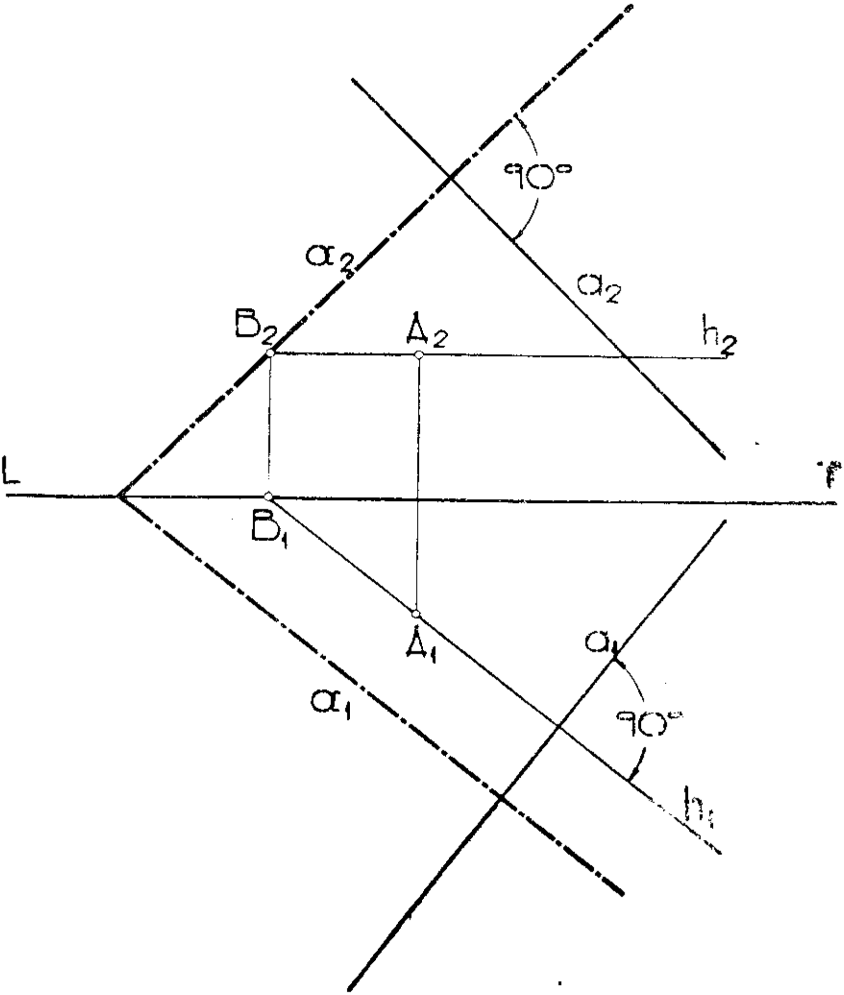


Fig. 177

4. — Hacer pasar por una recta $a \equiv (a_1, a_2)$ el plano perpendicular a un plano dado por dos rectas concurrentes (o paralelas) $b \equiv (b_1, b_2)$ y $c \equiv (c_1, c_2)$ (**fig. 178**).

El plano pedido, en virtud del 2º principio, es el determinado por la recta a y por la perpendicular al plano dado, conducida desde un punto cualquiera P de a.

Marcadas entonces la horizontal h y la frontal f del plano dado

se trazan desde P las proyecciones de la recta d perpendicular a ese plano. Las rectas a y d determinan el plano pedido.

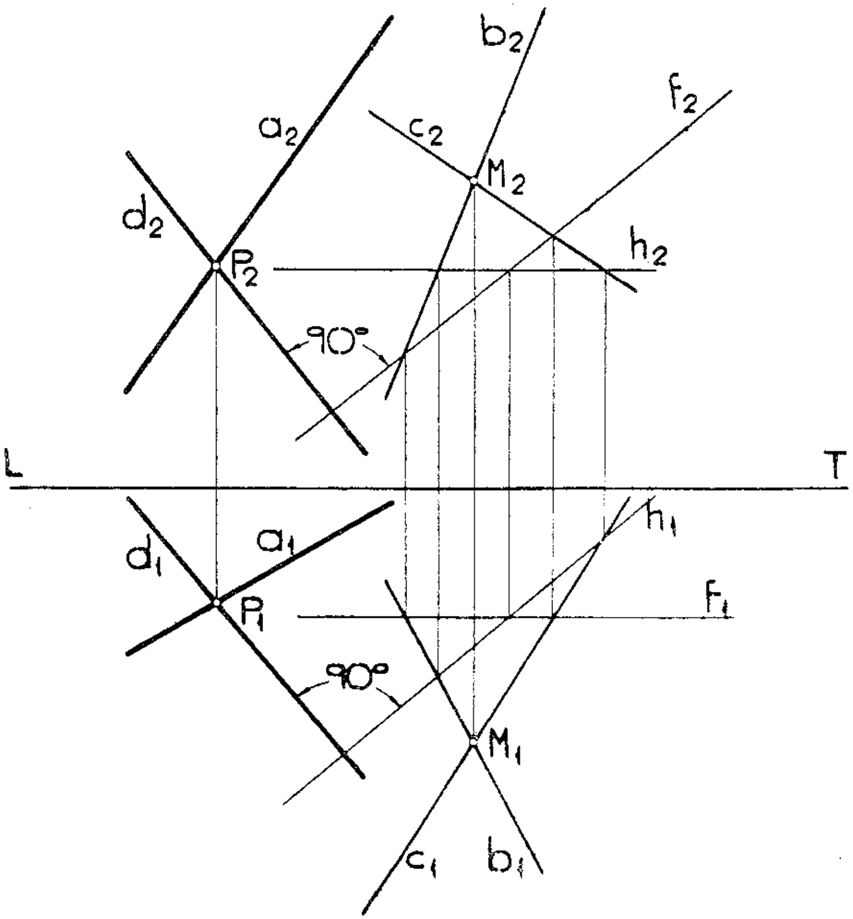


FIG. 178

La figura 179 resuelve el mismo problema cuando los planos son dados mediante sus trazas.

Por el punto P de la recta dada a se ha trazado la perpendicular b al plano α. Se hallaron después las trazas β_1 y β_2 del plano determinado por las rectas a y b.

El problema resuelto en este número tiene una sola solución si la recta dada a es coplanar, paralela u oblicua con respecto al plano dado; tiene, en cambio, infinitas soluciones si la recta a es perpendicular al plano.

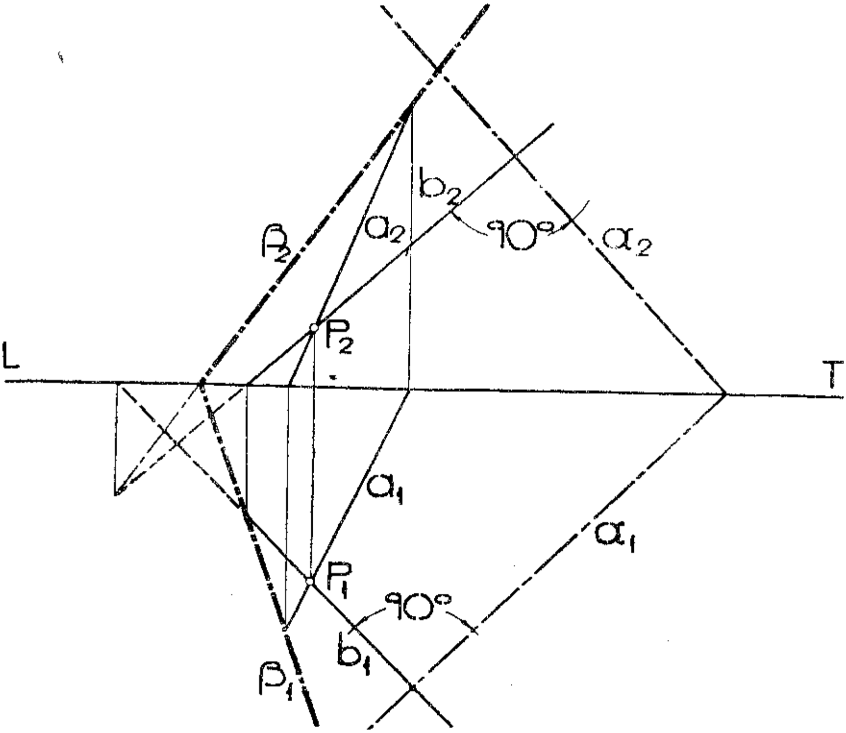


FIG. 179

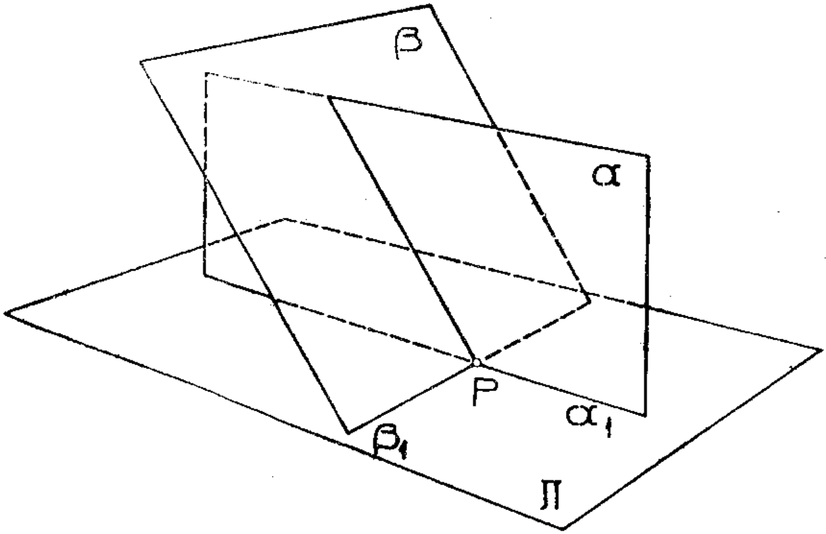


FIG. 180

5. — El problema anterior y el recuerdo de algunas nociones de *Geometría Sólida* hacen comprender que si dos planos son perpendiculares, no hay, en general, ninguna relación entre las posiciones relativas de sus trazas. Como caso particular consideremos dos planos α y β perpendiculares entre sí, siendo, además, α perpendicular al plano π (fig. 180).

Por ser α perpendicular a β y a π es perpendicular a su intersección β_1. Esta será entonces perpendicular a todas las rectas de α que pasan por el pie P; lo será entonces a la intersección α_1 de α y π. En consecuencia, *las trazas de igual nombre de dos planos perpendiculares entre sí forman un ángulo recto si por lo menos uno de ellos es perpendicular al plano que corresponde a las trazas consideradas.*

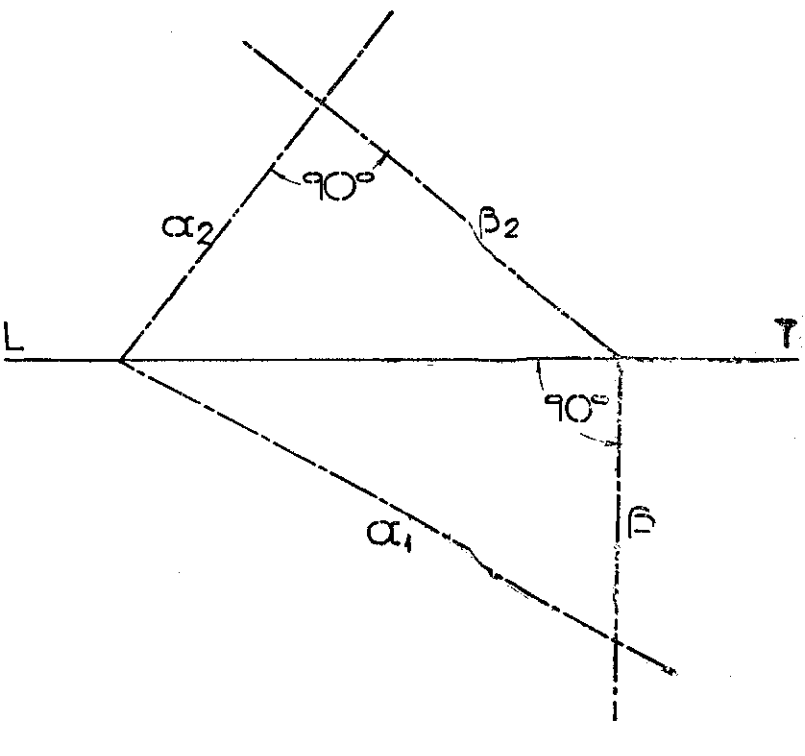


FIG. 181

La figura 181 da la representación de dos planos α y β perpendiculares entre sí. El plano β es además perpendicular al plano π_2. Las trazas α_2 y β_2 son perpendiculares entre sí.

6. — Nos falta considerar el problema de la perpendicular desde un punto dado $P \equiv (P_1, P_2)$ a una recta dada $a \equiv (a_1, a_2)$.

La recta pedida puede obtenerse conduciendo por P el plano α perpendicular a la recta dada a (fig. 182), determinando el punto de intersección Q y uniendo luego P con Q

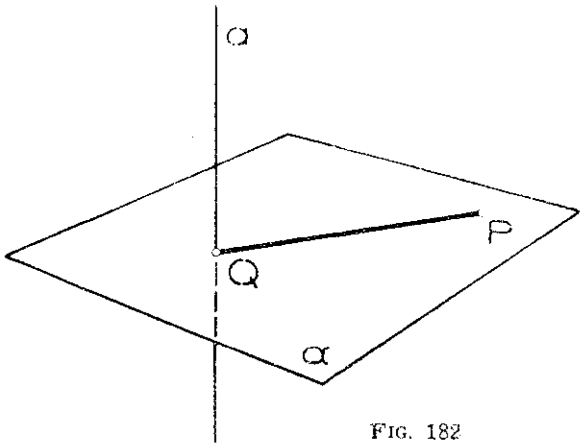


FIG. 182

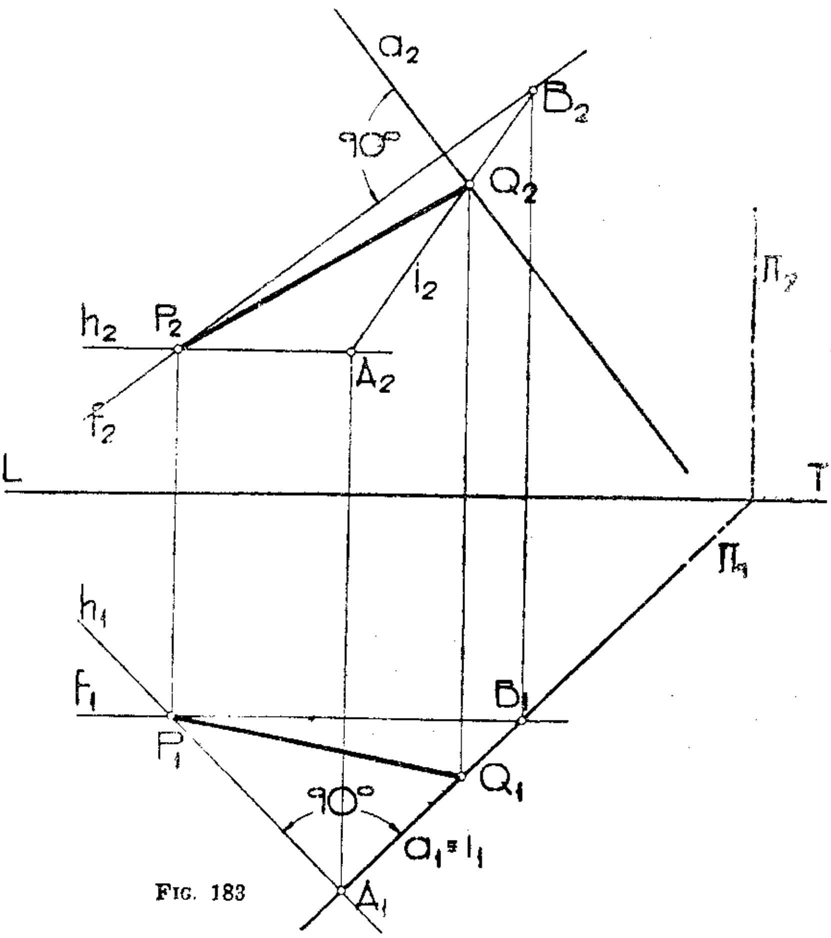
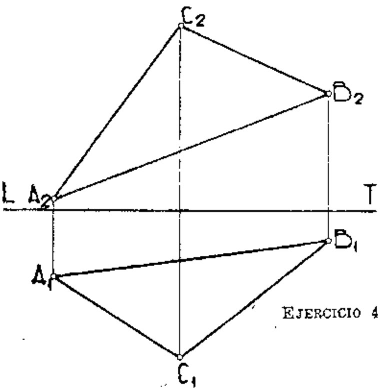


FIG. 183

Es lo que se ha hecho en la representación de la figura 183. Mediante una horizontal y una frontal se determinó el plano α perpendicular a la recta a. El punto de intersección de a con α es Q. La recta PQ es la buscada.

EJERCICIOS

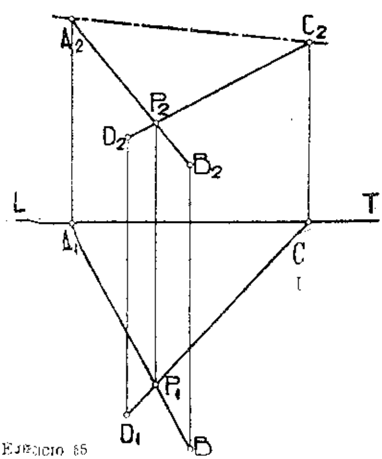
48. Dados los puntos A, B, C, D, mediante sus proyecciones, construir la perpendicular desde D al plano ABC. Hallar el pie de la perpendicular.



EJERCICIO 49

49. El triángulo ABC es la base inferior de un prisma recto, cuya altura aparece en proyección vertical según 1 cm. Completar las proyecciones del prisma.

50. Hacer pasar por un punto dado, un plano perpendicular a una recta dada.
51. Trazar por un punto un plano perpendicular a una recta de perfil.
52. Conducir por una recta, el plano perpendicular a un plano dado.
53. Un plano α es dado por los puntos A, B, C. Representar el plano mediante sus trazas y conducir luego desde un punto P la perpendicular al plano; determinar el pie de la perpendicular.
54. Por un punto dado P, hacer pasar un plano α perpendicular a una recta dada r. Determinar las trazas del plano α.
55. Las barras AB y CD que se cortan en P, están conectadas al plano vertical. En P se coloca otra barra perpendicular al plano de las dos primeras, que debe conectarse con el plano horizontal. Hallar las proyecciones de la barra adicional, así como el punto en que debe conectarse.



EJERCICIO 55

CAPÍTULO VII

CAMBIOS DE PLANOS DE PROYECCION

§ 36. INTRODUCCION

1. — A menudo la representación de las piezas y de las construcciones hechas sobre ellas es más simple, y a veces inmediata, como ya tuvimos la oportunidad de ver, cuando las figuras ocupan posiciones particulares con respecto a los planos de proyección. Así, vimos que una figura paralela a un plano de proyección se proyecta sobre éste en verdadera magnitud. Por lo tanto, dada una figura en una posición general, es útil, y a veces necesario, reducirla a tener, con respecto a los planos de proyección, aquella posición especial que más convenga a la cuestión que se estudia.

2. — Los procedimientos que permiten obtener la posición más conveniente de la figura que se considera reciben el nombre de *métodos gráficos* de la *Geometría Descriptiva*. Ellos comprenden:

1º El método de los *cambios de planos de proyección*.

2º El método de las *rotaciones* y, como caso particular, el método de los *rebatimientos*.

En el primer método los datos quedan fijos y se desplazan los planos de proyección.

En el segundo método los planos de proyección quedan fijos y la figura es desplazada.

§ 37. EL METODO DE LOS CAMBIOS DE PLANOS DE PROYECCION

1. — Sean P_1 y P_2 las proyecciones de un punto P del espacio (fig. 184). Mantengamos el plano π_1 y consideremos otro plano vertical π'_2. La recta $L'T'$ es la nueva línea de tierra y P_1, P'_2 son las nuevas proyecciones del punto. Por otra parte,

$$\overline{P_oP_2} = \overline{P'_oP'_2},$$

pues cada uno de estos segmentos es la cota, invariable, del punto P. Rebatiendo entonces cada plano vertical se obtiene una representación en la cual $\overline{P_oP_2} = \overline{P'_oP'_2}$. Quiere decir que, cuando se cambia el plano vertical conservando el horizontal, la proyección horizontal de un punto cualquiera no varía, y la nueva proyección vertical es tal que su distancia a la nueva línea de tierra es igual a la distancia que había entre la anterior proyección vertical y la primitiva línea de tierra.

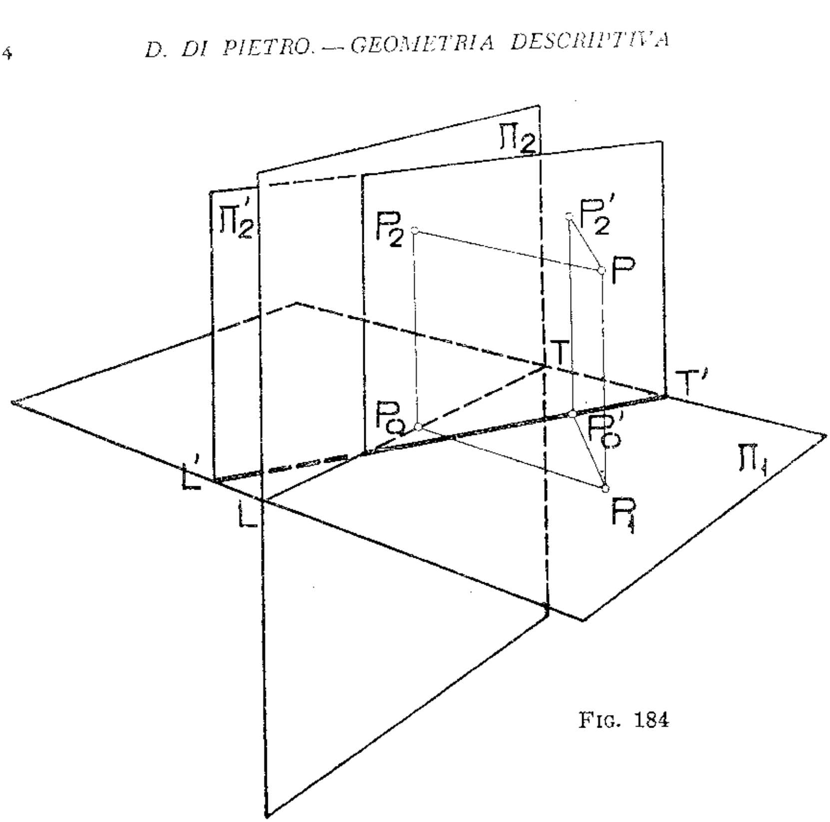


FIG. 184

2. — En las representaciones llamaremos $L'T'$, $L''T''$, etc., las nuevas líneas de tierra, y P'_2 P''_2, etc., por ejemplo, las nuevas proyecciones verticales. La disposición de las letras de $L'T'$, $L''T''$, etc., será tal que, leyéndolas de izquierda a derecha, la parte superior del nuevo plano vertical se encuentra encima de la línea de tierra.

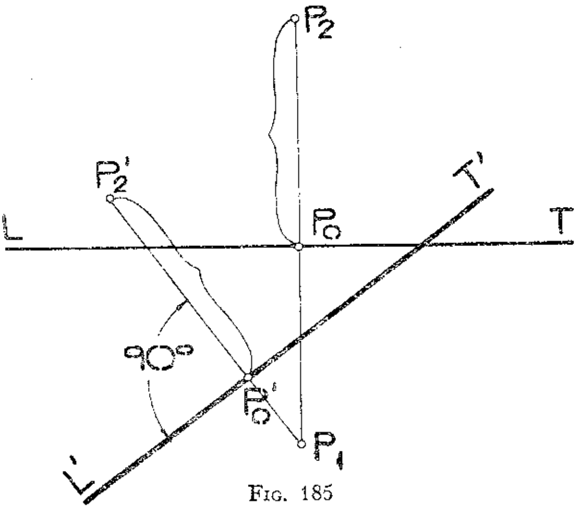


FIG. 185

3. — Consideremos la representación de un punto P del espacio y sean P_1 y P_2 sus proyecciones con respecto al sistema de planos π_1 y π_2 (fig. 185).

Supongamos que $L'T'$ sea la nueva línea de tierra correspondiente a un nuevo **plano vertical** π'_2. Queremos determi-

nar las nuevas proyecciones de P. Como el plano horizontal no ha cambiado, la proyección horizontal es siempre P_1. La nueva proyección vertical se encontrará sobre la perpendicular por P_1 a $L'T'$ y a una distancia de ésta,

$$\overline{P'_oP'_2} = \overline{P_oP_2}.$$

4. — En la figura 186 el nuevo plano vertical fué rebatido hacia la parte inferior del dibujo.

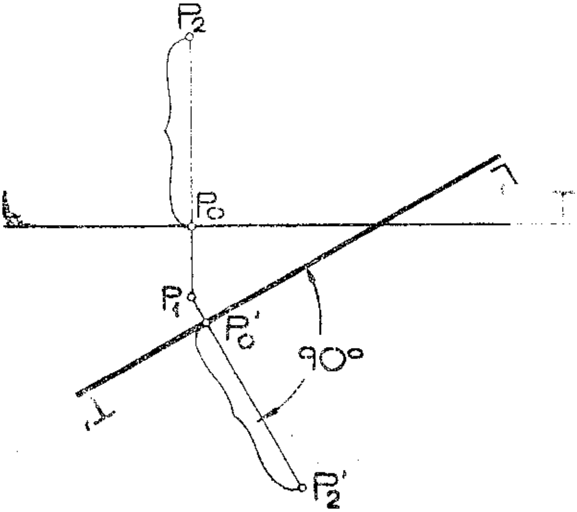


Fig. 186

5. — Cuando se reemplaza el plano horizontal por cualquier otro plano perpendicular al plano vertical se dice que se ha *cambiado el plano horizontal*. El nuevo plano de proyección, si bien *no horizontal*, conserva el nombre de *plano horizontal*.

Para comprender bien el mecanismo del cambio de plano horizontal consideremos la figura espacial de figura 187. Los planos primitivos son π_1 y π_2; el nuevo plano horizontal es π'_1; P_1 y P_2 son las proyecciones del punto P con respecto a los planos π_1 y π_2. Después del rebatimiento del plano π_2 sobre

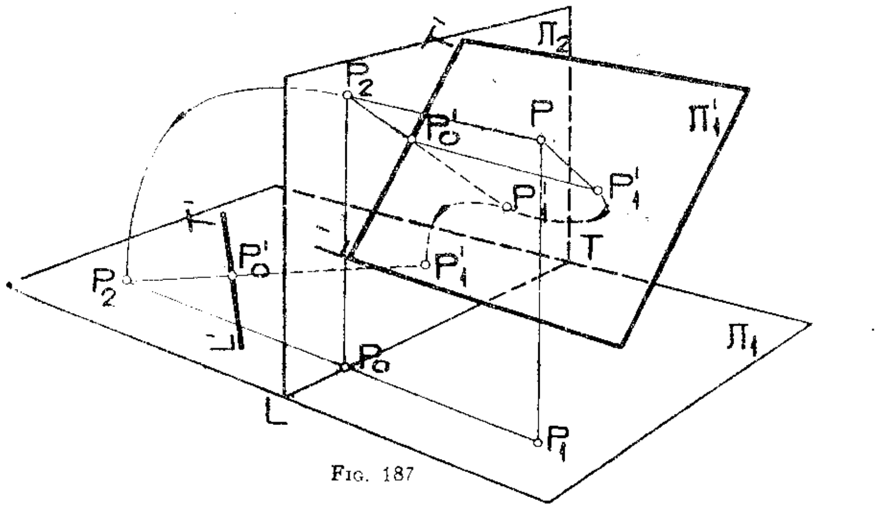


Fig. 187

π_1 la proyección P_2 se sitúa, como ya se sabe, sobre la perpendicular a LT por P_1.

Se trata ahora de determinar el punto P mediante sus proyecciones con respecto a los planos π_2 y π'_1. La proyección de P sobre π_2 es siempre P_2. La proyección sobre π'_1 es P'_1. Con un razonamiento análogo al hecho en 1 de este parágrafo se comprende que el plano determinado por las proyectantes PP'_1 y PP_2 es perpendicular a $L'T'$ en el punto P'_o y que $\overline{P_2P} = \overline{P'_oP'_1}$ (alejamiento de P). Si rebatimos el plano π'_1 sobre el π_2 alrededor de $L'T'$ en el sentido indicado en la figura, por ejemplo, el punto P'_1 se colocará sobre la prolongación de la perpendicular $P_2P'_o$ a la nueva línea de tierra $L'T'$ y a una distancia de ésta igual al alejamiento. Si ahora se rebate el plano π_2 sobre el π_1 para estar de acuerdo con las convenciones establecidas, se obtiene la representación o figura descriptiva.

La figura 188 da la representación para un punto dado (P_1, P_2). Por P_2, que no cambia, se ha trazado la perpendicular a $L'T'$, tomándose luego $\overline{P'_oP'_1} = \overline{P_oP_1}$. Los puntos P'_1 y P_2 son las proyecciones de P con respecto al nuevo sistema de planos.

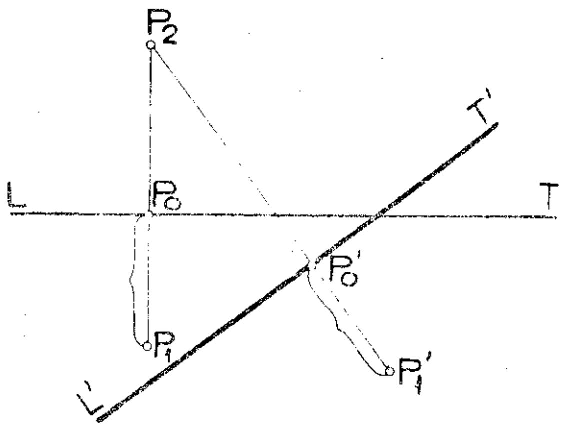


FIG. 188

El sentido del rebatimiento del plano π'_1 sobre π_2 es arbitrario. Se puede rebatir, pues, si así se desea, hacia la parte superior del dibujo.

§ 38. PROYECCIONES DE UNA RECTA CUANDO SE CAMBIA UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

1. — Conocida una recta por sus dos proyecciones, se obtiene su proyección sobre un nuevo plano, hallando las nuevas proyecciones de dos de sus puntos.

2. — Sean A_1B_1, A_2B_2 las proyecciones de la recta (fig. 189). Consideremos un nuevo plano vertical y sea $L'T'$ la nueva línea de tierra. La proyección A_1B_1 no varía. Para encontrar $A'_2B'_2$, nueva proyección vertical, hállanse las nuevas proyecciones verticales de los puntos A y B.

3. — Para la recta de proyecciones A_1B_1, A_2B_2, dada en la figura 190, se ha hecho un cambio de plano horizontal. La proyección ver-

tical es siempre A_2B_2; la nueva proyección horizontal es $A_1'B_1'$ obtenida en la forma indicada en la figura.

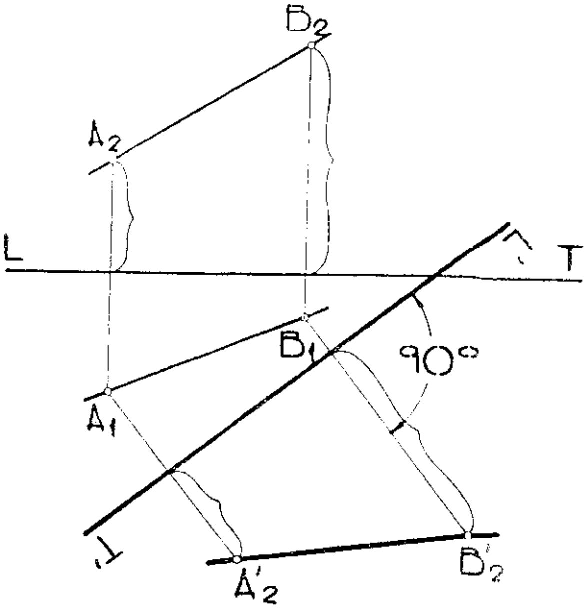


FIG. 189

4. — Con un cambio de planos puede hacerse que una recta dada resulte paralela a uno de los planos de proyección. Al vertical, por ejemplo.

Cuando una recta es paralela a uno de los planos de proyección la proyección de nombre contrario es paralela a la línea de tierra. En nuestro caso, si la recta dada (A_1B_1, A_2B_2) (fig. 191) debe resultar paralela al plano vertical, es necesario que A_1B_1 sea paralela a la nueva línea de tierra. Basta, así, trazar $L'T'$ paralela a A_1B_1 y encontrar la nueva proyección vertical $A_2'B_2'$. El segmento $\overline{A_2'B_2'}$ da entonces la verdadera magnitud del segmento $\overline{AB}$ del espacio.

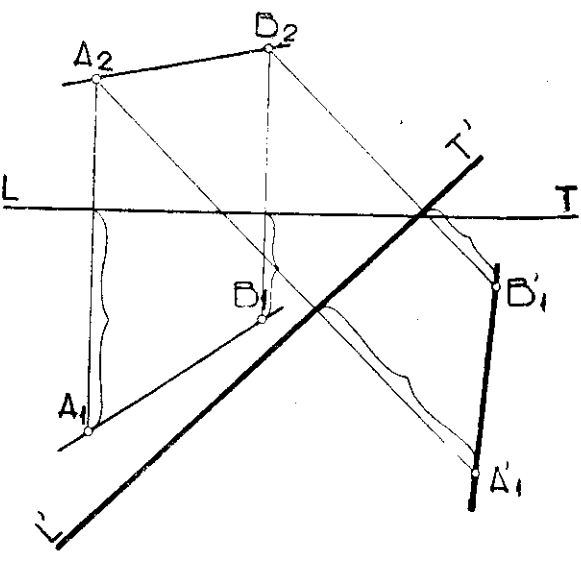


FIG. 190

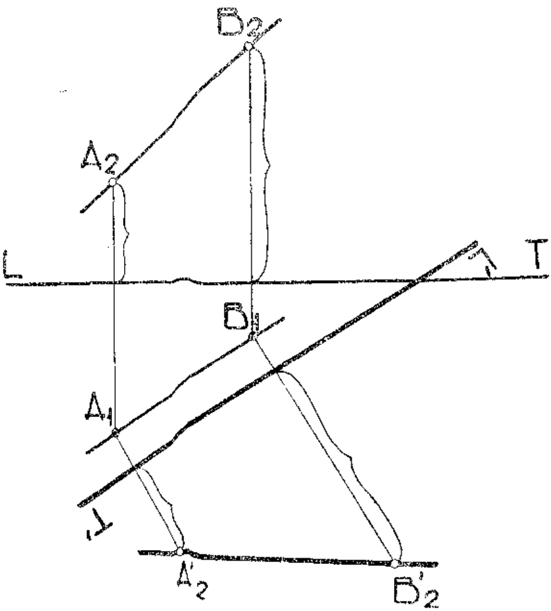


FIG. 191

Se comprende que para simplificar se puede hacer que $L'T'$ coincida con A_1B_1. Resultan entonces las representaciones de la figura 192.

5. — En la figura 193 se ha hecho que la recta AB, dada por sus proyecciones A_1B_1 y A_2B_2, resulte paralela al plano horizontal. Elegido $L'T'$ paralelo a A_2B_2, el segmento $\overline{A_1'B_1'}$ da la verdadera magnitud del segmento $\overline{AB}$ del espacio.

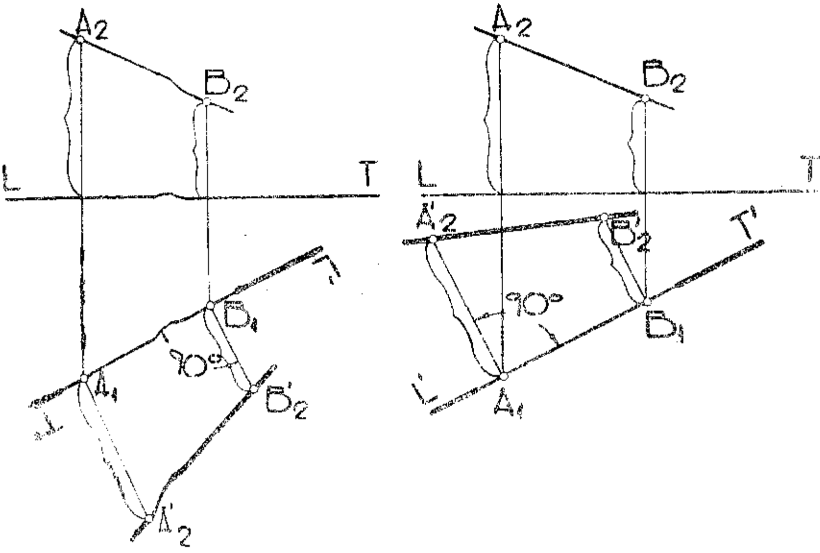


FIG. 192

6. — Dada una recta mediante sus proyecciones A_1B_1, A_2B_2 (fig. 194), nos proponemos llevar sobre ella, a partir de uno de sus puntos, una longitud dada. Trátese, por ejemplo, de llevar 10 mm a partir del punto (A_1, A_2).

Después de haber proyectado la recta sobre un nuevo plano vertical paralelo a ella, o que la contenga, se marca, en la escala de longitudes perteneciente al dibujo, el segmento $\overline{A_2'C_2'} = 10$ mm; luego

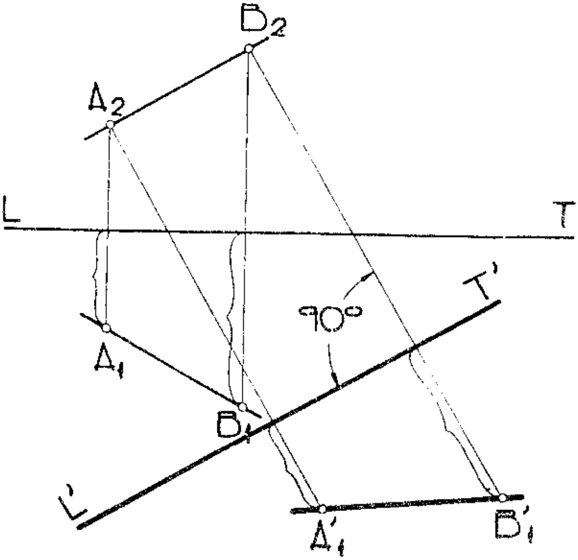


FIG. 195

desde C_2' se traza la perpendicular a $L'T'$ y se obtiene el punto C_1. La perpendicular a LT permite obtener C_2. El punto (C_1, C_2) es el punto buscado.

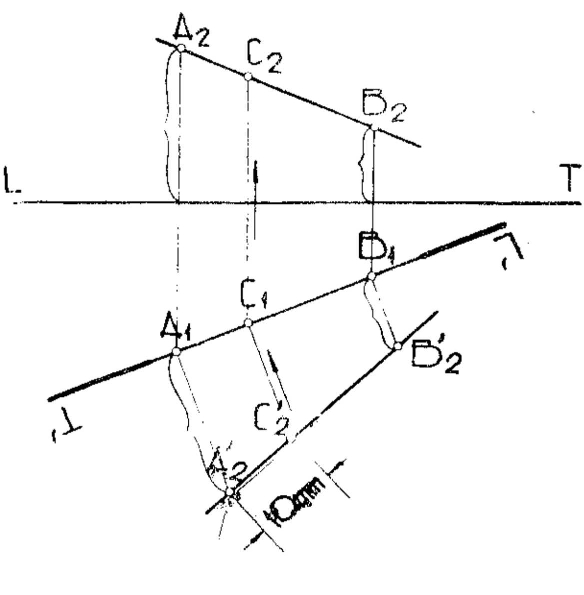


FIG. 194

§ 39. PROYECCIONES DE RECTAS DE UN PLANO CUANDO SE CAMBIA UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

1. — Resueltos para los puntos y las rectas los problemas concernientes a cambios de planos de proyección, no es difícil su aplicación a planos dados por varias cualesquiera de sus

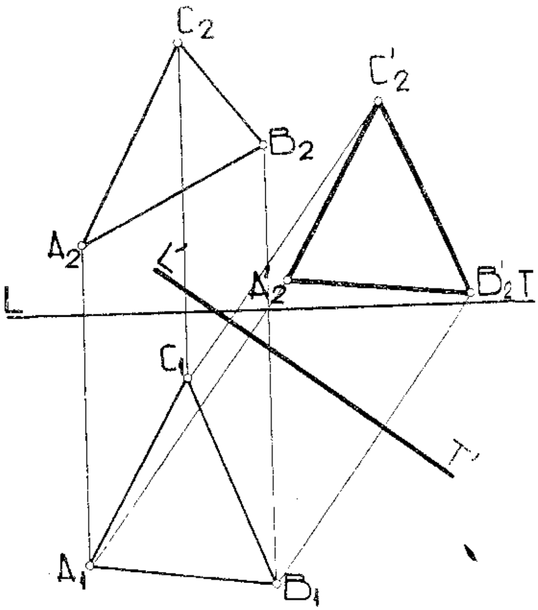


FIG. 195

rectas o en particular, por sus dos trazas.

Trátese, por ejemplo, del plano del triángulo ABC (fig. 195), dado mediante las proyecciones $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$. Cambiado el plano vertical por otro cuya intersección con π_1 es $L'T'$ (nueva línea de tierra) se obtuvo como nueva proyección vertical la figura $A'_2B'_2C'_2$.

En la figura 196 se ha cambiado el plano horizontal. La nueva proyección es $A'_1B'_1C'_1$.

2. — Para una misma figura pueden efectuarse varios cambios sucesivos de planos de proyección. Es lo que se ha hecho con el triángulo ABC de la figura 197.

Eligióse primero una nueva línea de tierra $L'T'$ paralela al lado $\overline{C_1B_1}$ de la primitiva proyección horizontal.

El triángulo $A'_2B'_2C'_2$ es la nueva proyección vertical. Hay algo interesante en este triángulo, y es que el segmento $\overline{C'_2B'_2}$ da la verdadera magnitud del segmento

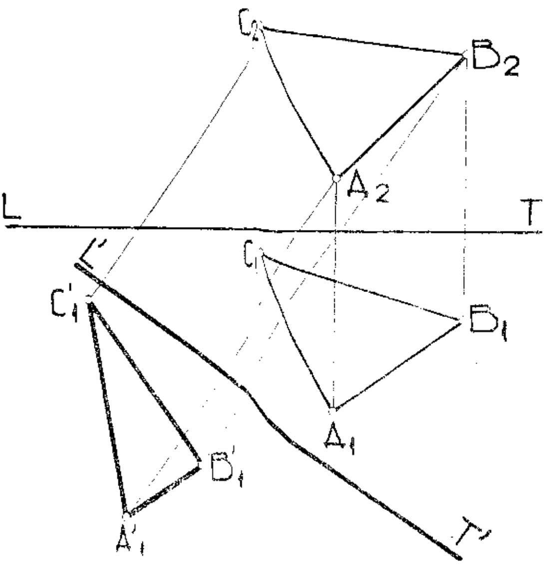


FIG. 196

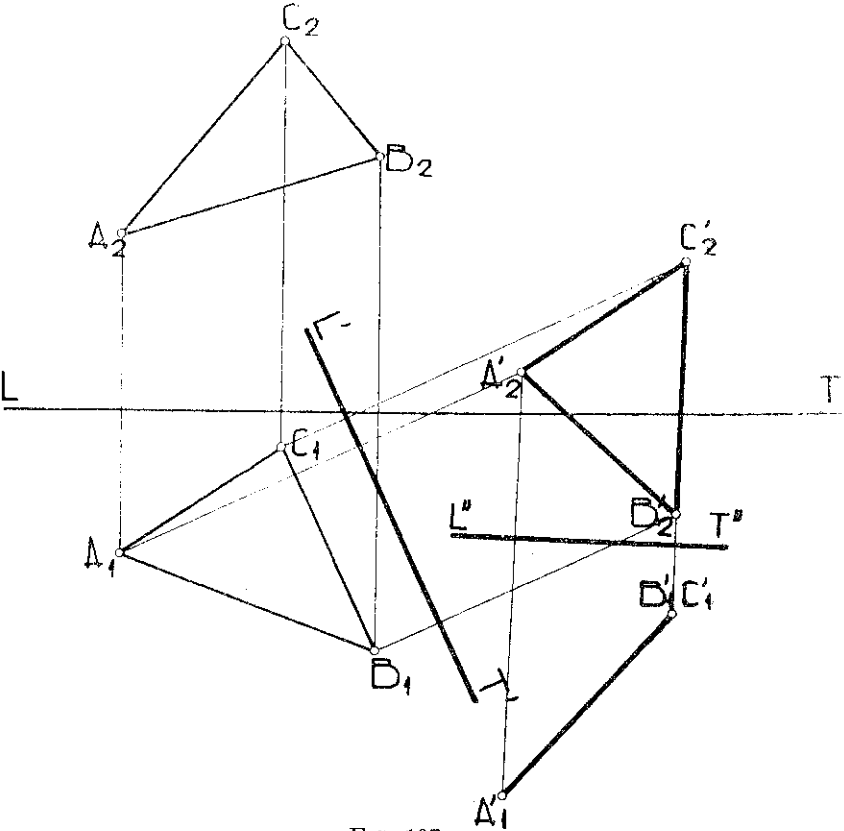


FIG. 197

CB del espacio. Débese esto a que C_1B_1 es paralelo a $L'T'$ (2, § 15).

Se eligió después otro plano horizontal, siendo $L''T''$, esto es, la nueva línea de tierra, perpendicular a $C'_2B'_2$. La nueva proyección horizontal del triángulo es ahora el segmento $A'_1C'_1B'_1$. El lado $\overline{CB}$ ha resultado así perpendicular al nuevo plano horizontal, siendo el punto $C'_1B'_1$ su proyección sobre este plano.

Esta doble transformación, que conduce a la obtención de un segmento como una de las proyecciones de una figura plana genérica del espacio, es utilizada a menudo para resolver con facilidad numerosos problemas prácticos. En su aplicación conviene recordar que el primer paso debe dar, mediante una cualquiera de las proyecciones, la verdadera magnitud de uno de los segmentos de la figura.

3. — La construcción de la figura 197 puede ser simplificada cuando se recurre no a una recta cualquiera AB del plano dado, sino a una de sus rectas particulares: una horizontal, por ejemplo, o una frontal.

Consideremos la horizontal (A_1D_1, A_2D_2) (fig. 198). El segmento AD, por ser paralelo al plano π_1, aparece en $\overline{A_1D_1}$ según su ver-

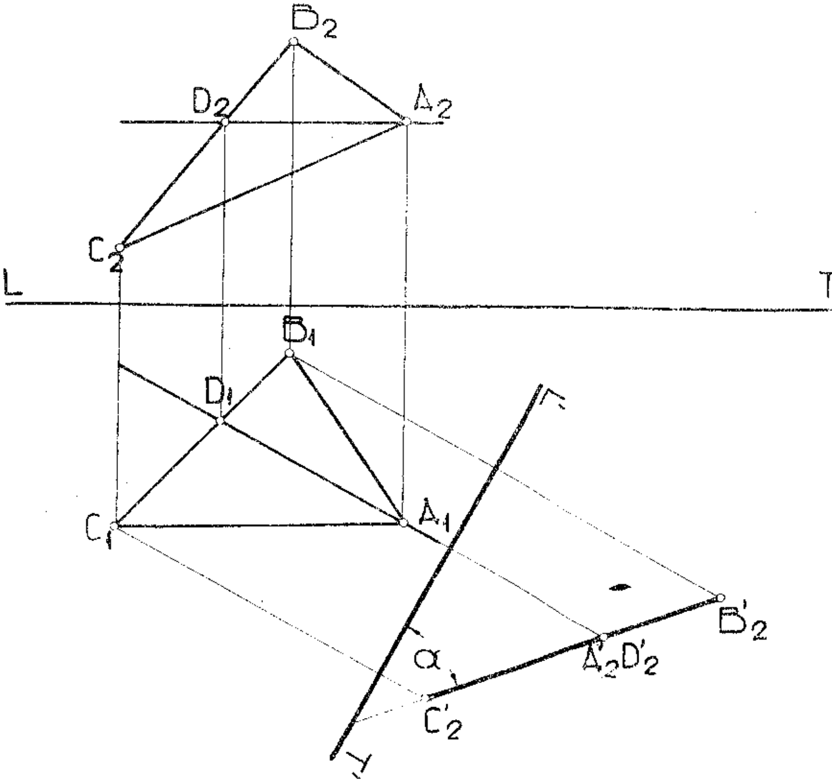


Fig. 198

dadera magnitud. Cambiemos de plano vertical tomando $L'T'$ perpendicular a la proyección A_1D_1. El nuevo plano vertical, por ser perpendicular a la recta AD, es perpendicular al plano ABC (1, § 35); la nueva proyección vertical del triángulo será, pues, un segmento, el $\overline{C'_2A'_2D'_2B'_2}$.

El ángulo α es el que forma el plano ABC con el plano π_1.

§ 40. TRAZAS DE UN PLANO CUANDO SE CAMBIA UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

1. — Al cambiar solamente uno de los planos de proyección es evidente que una de las trazas no cambia. Para obtener la nueva traza se puede, de un modo general, considerar tres puntos del plano dado, determinarlos con respecto al nuevo sistema de planos de proyección y hallar entonces la nueva traza del plano.

El procedimiento es evidentemente largo. Se puede proceder en forma más rápida teniendo en cuenta que la nueva traza es la intersección del plano dado con el nuevo plano de proyección.

2. — Trátese, por ejemplo, del plano (α_1, α_2) (fig. 199). Se desea cambiar el plano vertical. Sea $L'T'$ la nueva línea de tierra. La traza α_1 no varía; la nueva traza vertical es la intersección del plano (α_1, α_2)

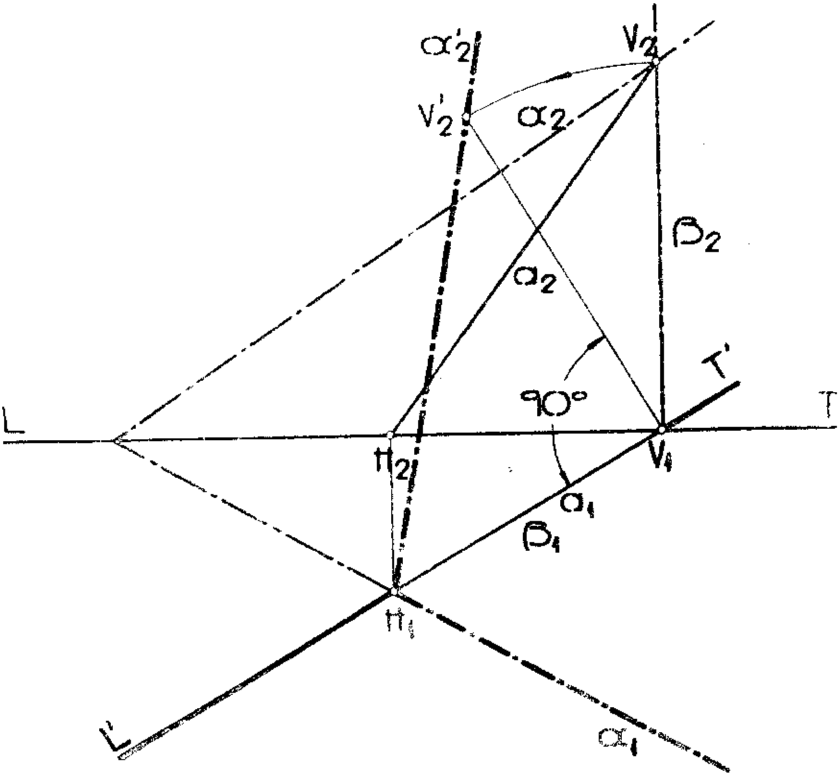


Fig. 199

con el nuevo plano vertical (β_1, β_2). En el sistema primitivo esta intersección es la recta (a_1, a_2). Para definirla en el nuevo sistema basta hallar las proyecciones verticales de dos de sus puntos, (H_1, H_2) y (V_1, V_2), por ejemplo. Como el punto (H_1, H_2) tiene cota nula, su nueva proyección vertical coincide con H_1. La nueva proyección vertical de (V_1, V_2) está, en cambio, en V'_2, sobre la perpendicular por V_1 a $L'T'$ y a una distancia $V_1V'_2 = V_1V_2$. La nueva traza vertical α'_2 del plano dado es, pues, la recta que une H_1 y V'_2.

3. — Otro procedimiento es dado en la figura 200. Se ha tomado una horizontal (h_1, h_2) del plano y se ha hecho el cambio de esta recta, que continuará siendo horizontal y a la misma distancia $\overline{A_1 A_2}$ del plano horizontal. La nueva posición de la proyección vertical de

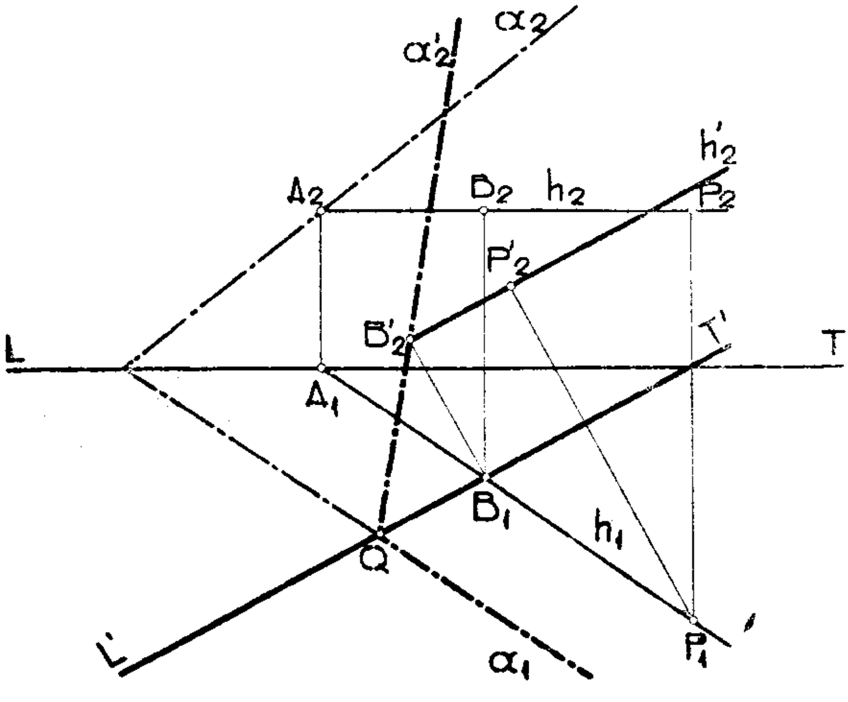


FIG. 200

la horizontal h ha sido obtenida considerando uno de sus puntos (P_1, P_2). El punto (B_1, B'_2) es la nueva traza vertical de la horizontal h. Uniendo entonces B'_2 y Q se obtiene α'_2.

4. — La figura 201 corresponde a un cambio de plano horizontal.

5. — Al cambiar uno de los planos de proyección el nuevo plano puede ser elegido de modo que resulte perpendicular al plano dado, como ya lo hicimos en el número 3 del parágrafo anterior.

Deseamos, por ejemplo, cambiar el plano horizontal por otro normal al plano dado (α_1, α_2) (fig. 202).

El nuevo plano horizontal debe ser perpendicular al plano vertical y también al (α_1, α_2). Será entonces perpendicular a su inter-

sección α_2. En consecuencia, la nueva línea de tierra $L'T'$ debe ser tomada perpendicularmente a α_2. La nueva traza α'_1 se obtiene como en los números precedentes.

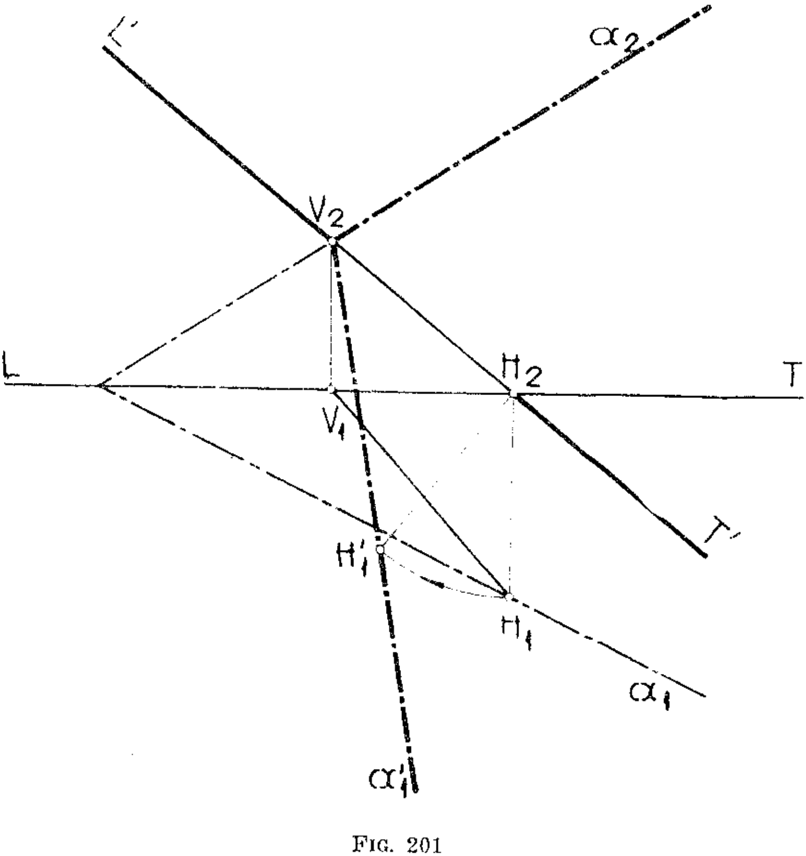


FIG. 201

141. APLICACIONES

1. — El cuadrilátero $(A_1B_1C_1D_1,\ A_2B_2C_2D_2)$ de la figura 203 está situado en un plano perpendicular al plano horizontal. Hallar su verdadera magnitud.

Si se toma como nuevo plano vertical el mismo plano que contiene el cuadrilátero dado, la nueva proyección vertical $A'_2A'_2C'_2D'_2$ da la verdadera magnitud pedida.

2. — Determinar la longitud de la arista $\overline{AB}$ del techo indicado en la figura 204, siendo $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{A_2B_2}$ sus proyecciones. Encontrar también la verdadera magnitud de la falda $ABCD$ del techo.

Cambiando el plano vertical, con $L'T'$ como nueva línea de tierra, $\overline{A'_2B_1}$ es la longitud de la arista $\overline{AB}$.

Como $\overline{DC}$ aparece en tamaño real en $\overline{D_2C_2}$, es fácil la construcción en tamaño real de la falda $ABCD$.

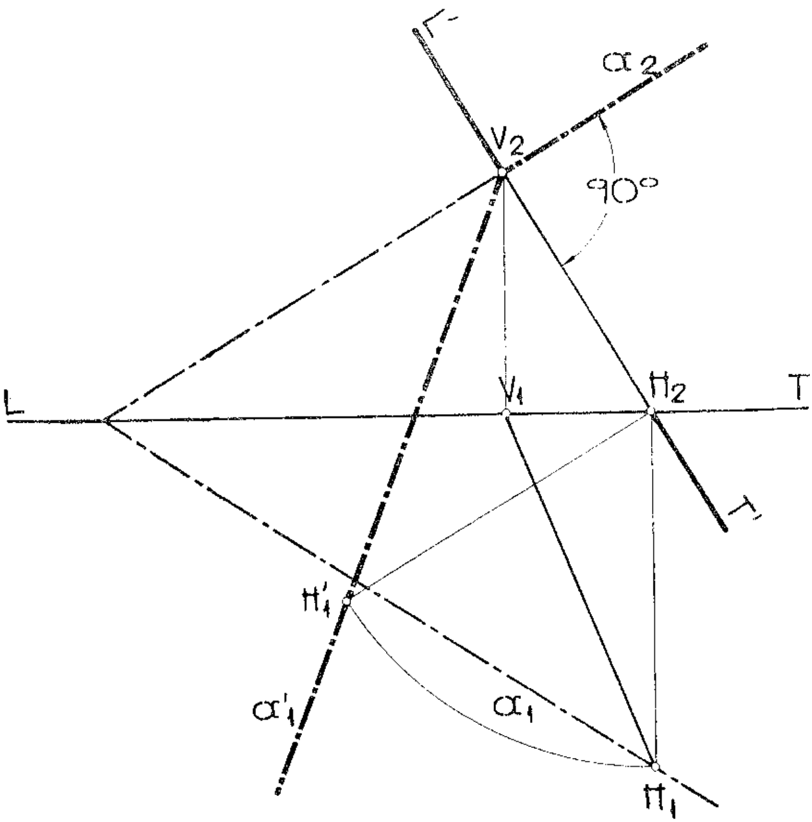


Fig. 202

3. — Las patas de un caballete aparecen en proyección vertical y de perfil en la figura 205. Hallar los ángulos de corte de cada una de sus caras.

Podemos considerar el perfil como una proyección horizontal, siendo LT la línea de tierra. Cambiando el plano vertical por otro plano paralelo a la cara $ABCD$ se obtiene $A'_2B'_2C'_2D'_2$, que da la cara $ABCD$ en tamaño real. De ella pueden sacarse los ángulos pedidos

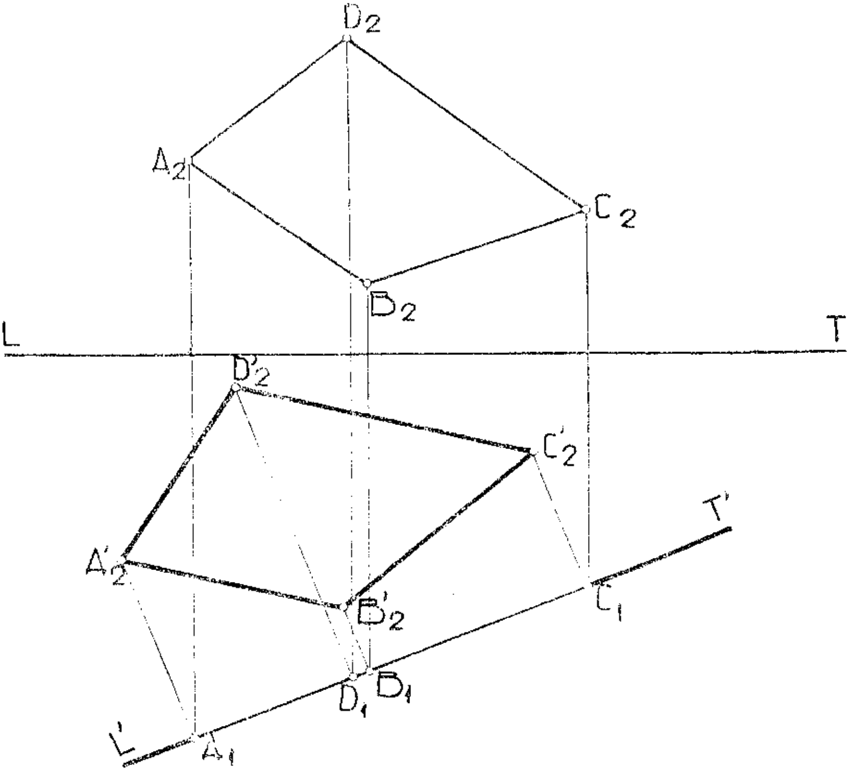


FIG. 203

4. — En los ejemplos anteriores hemos hallado la verdadera magnitud de figuras pertenecientes a planos perpendiculares a uno de los planos de proyección. Una de las proyecciones de la figura ha sido, pues, siempre un segmento. Si se tratase de figuras situadas en un plano cualquiera, haremos primero que éste se vuelva perpendicular a uno de los planos de proyección mediante un cambio oportuno (2 y 3 de § 39), continuando después como en los ejemplos anteriores.

Trátese de hallar la verdadera magnitud del triángulo $(A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2)$ dado en la figura 206.

Determinada la horizontal (h_1, h_2) del plano ABC, se cambia de plano vertical, siendo $L'T'$ la nueva línea de tierra. Se obtiene así el segmento $\overline{B_2'C_2'}$ como proyección vertical del triángulo. Con $L''T''$ paralela a $\overline{B_2'C_2'}$ se cambia de plano horizontal. La figura $A_1''B_1''C_1''$ da la verdadera magnitud del triángulo dado.

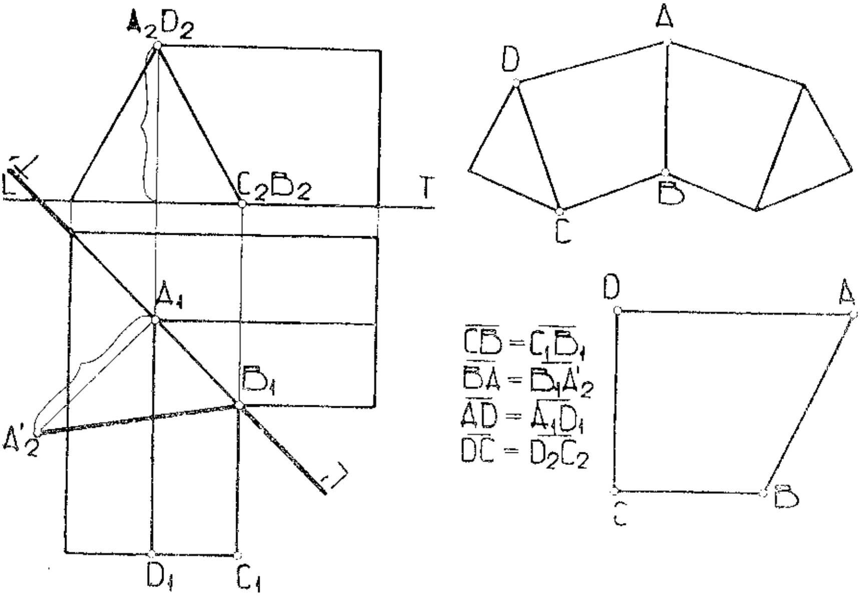


FIG. 204

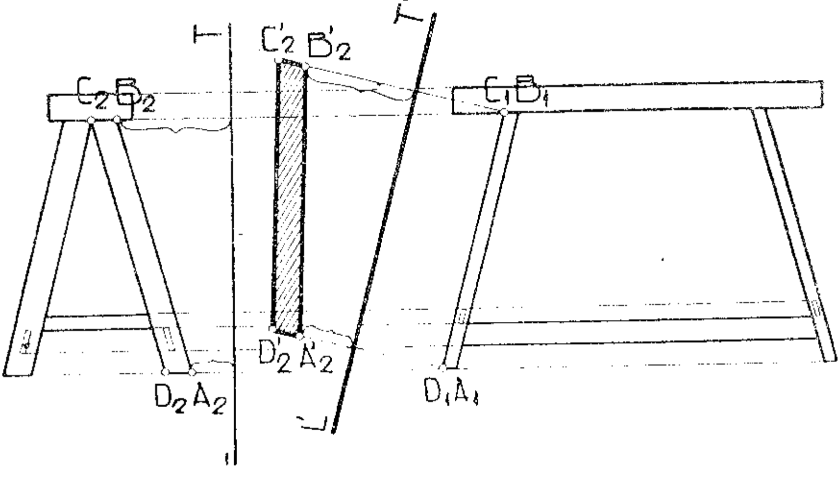


FIG. 205

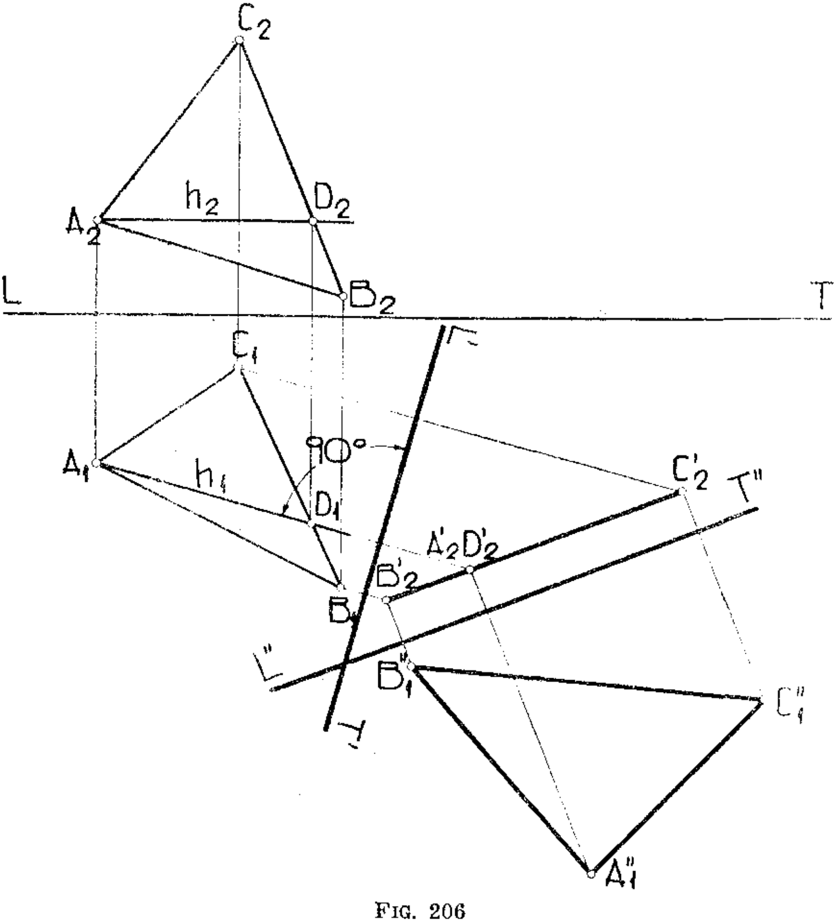


FIG. 206

5. — En forma análoga podemos hallar la verdadera magnitud de la falda *ABCD* del techo indicado en la figura 207.

Considerada la horizontal (D_1C_1, D_2C_2) se cambió de plano vertical tomando $L'T'$ perpendicular a D_1C_1. La figura *ABCD* resulta así situada en un plano perpendicular al nuevo plano vertical y se proyecta sobre éste según el segmento $(\overline{A'_2B'_2})$ $(\overline{C'_2D'_2})$. Un cambio de plano horizontal, con $L''T''$ paralelo al segmento anterior, permite hallar en $A''_1B''_1C''_1D''_1$ la verdadera magnitud pedida.

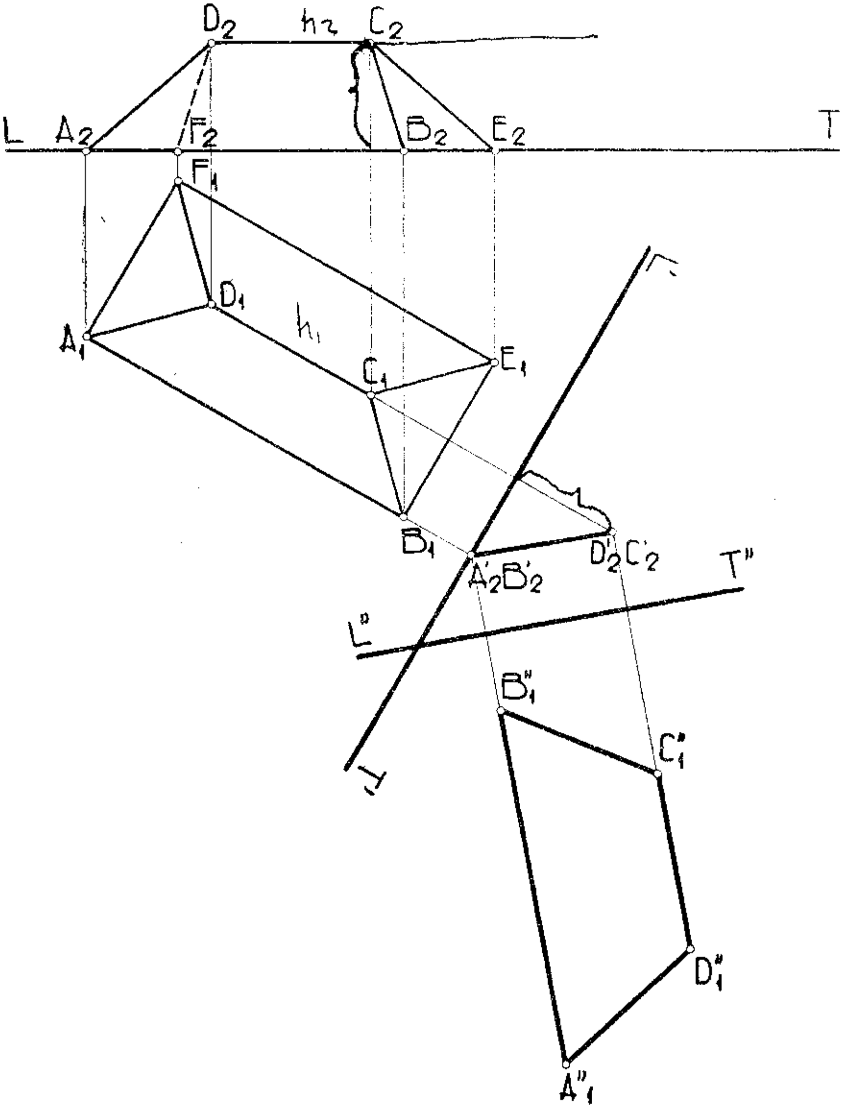


Fig. 207

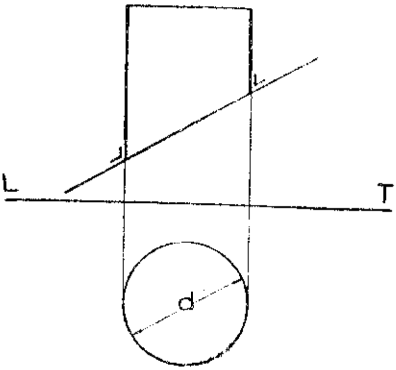
EJERCICIOS

56. Dadas las proyecciones de un punto, cambiar el plano horizontal.
57. Dadas las proyecciones de una recta, cambiar el plano horizontal.
58. Dado un punto, cambiar ambos planos de proyección.

59. Dada una recta, cambiar ambos planos de proyección.

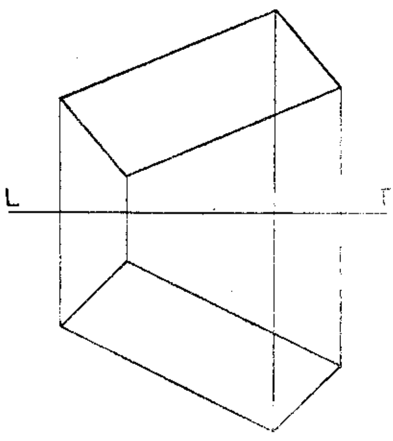
60. Dado un plano mediante sus trazas, cambiar el plano horizontal.

61. En la figura que sigue se tienen las proyecciones de una chimenea tronco cilíndrica. Hacer el desarrollo de su superficie y dar la verdadera magnitud de la abertura a practicar en el techo. El desarrollo de la superficie no ofrece dificultades. Para hallar la verdadera magnitud de la abertura, divídase la circunferencia en cierto número de partes iguales y cámbiese luego de plano de proyección horizontal.



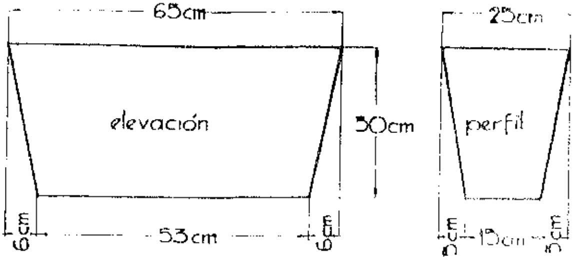
EJERCICIO 61

62. La figura que sigue da las proyecciones de un paralelogramo. Hallar su verdadera magnitud. Para resolver este problema procédase así: cambiar el plano vertical por otro, perpendicular al plano del paralelogramo; cambiar luego el plano horizontal por otro paralelo al que proyecta verticalmente la figura.

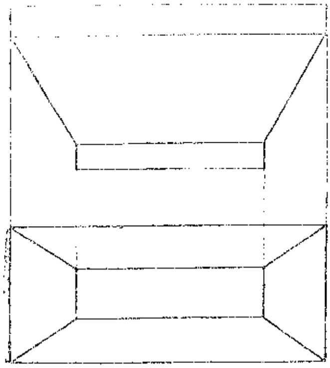


EJERCICIO 62

63. La figura que sigue corresponde a un cristalizador, en chapa. Hallar la longitud de una de las aristas laterales y dibujar después una de las caras del cristalizador.



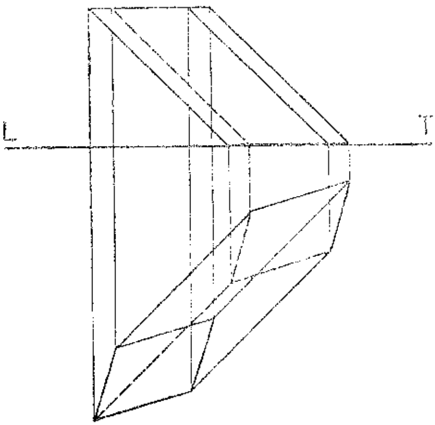
EJERCICIO 63



EJERCICIO 64

64. Dibujar en tamaño real las caras del recipiente cuyas proyecciones se dan en la figura.

65. Conocidas las proyecciones de un tirantillo oblicuo con respecto a los dos planos de proyección, encontrar su verdadera longitud. Encontrar también las proyecciones de un punto situado sobre una de las aristas, a una distancia dada de uno de los extremos.



EJERCICIO 65

CAPÍTULO VIII

ROTACIONES

§ 42. INTRODUCCION

1. — Dada la representación de una figura mediante el método Monge, conviene a veces encontrar la análoga representación de esta misma figura, después de hacerle describir un *movimiento de rotación* alrededor de un eje, generalmente perpendicular a uno de los planos de proyección.

Se sabe que entonces cada punto de la figura queda siempre a la misma distancia del eje.

2. — Si el eje elegido es perpendicular al plano horizontal, su proyección horizontal es, como ya sabemos, un punto; su proyección vertical es una recta perpendicular a la línea de tierra.

Si el eje es perpendicular al plano vertical, su proyección vertical es un punto; su proyección horizontal es perpendicular a la línea de tierra.

§ 43. ROTACION DE UN PUNTO

1. — Se sabe que cuando una figura hállase animada de un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, todos sus puntos describen arcos de circunferencias cuyos planos son perpendiculares al eje de rotación y cuyos centros están sobre este eje. Además, los radios vectores de los distintos puntos describen ángulos centrales iguales durante tiempos iguales.

Imaginemos que la figura gira de un ángulo de rotación θ alrededor de un eje vertical y que P sea uno de sus puntos (fig. 208).

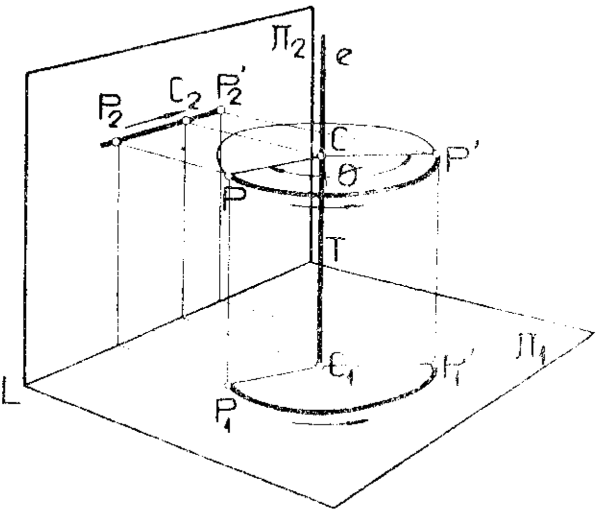


FIG. 208

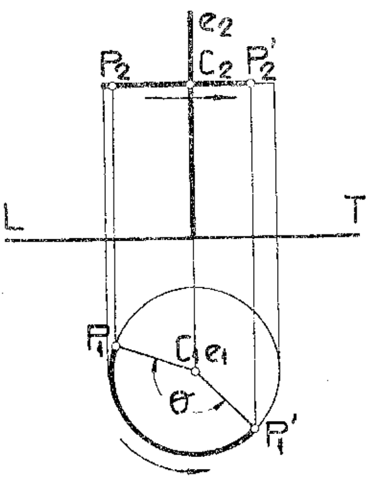


Fig. 209

Observamos que el punto P, al moverse para describir un arco de amplitud θ con centro en C y radio $\overline{CP}$, permanece en un plano paralelo al plano horizontal, y como toda figura paralela a un plano se proyecta sobre éste en verdadera magnitud, el arco $\widehat{PP'}$ tiene como proyección horizontal $\widehat{P_1P_1'} = \widehat{PP'}$; su proyección vertical es, en cambio, el segmento de recta $\overline{P_2P_2'}$ paralelo a $\overline{LT}$. Quiere decir entonces que, cuando el punto P del espacio describe un arco de amplitud θ y radio $\overline{CP}$, su proyección horizontal P_1 describe un arco de centro C_1, amplitud θ y radio $\overline{C_1P_1} = \overline{CP}$; su proyección vertical P_2 se traslada, mientras tanto, paralelamente a LT.

La representación es dada por la figura 209.

2. — Es fácil comprender que si el punto P gira alrededor de un eje perpendicular al plano vertical, resulta una representación como la indicada en la figura 210.

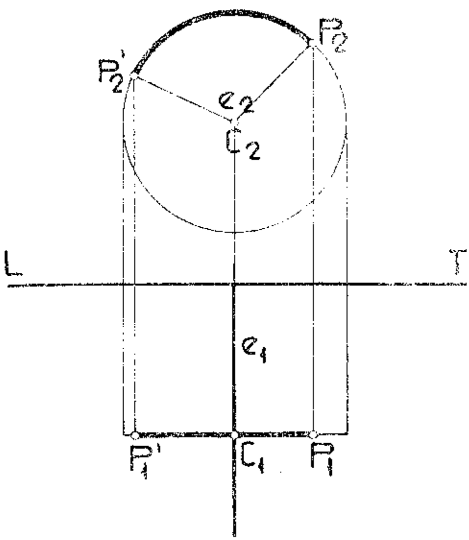


Fig. 210

§ 44. ROTACION DE UNA RECTA

1. — Como dos puntos determinan una recta, basta, evidentemente, hacer girar estos puntos para tener la nueva representación de la recta.

Sea (r_1, r_2) la recta dada, (e_1, e_2) el eje de rotación y $\theta = 205°$ el ángulo de rotación. Elegidos dos puntos cualesquiera de la recta, (A_1, A_2) y (B_1, B_2), por ejemplo, se aplica a cada uno de ellos la construcción indicada en el parágrafo anterior y se obtienen las nuevas proyecciones (r_1', r_2') de la recta (fig. 211).

2. — El problema anterior puede ser resuelto en otra forma. Consiste en hacer girar el pie de la perpendicular común a la recta dada y al eje. Como el eje es vertical, la perpendicular común es

horizontal y sus proyecciones son C_1P_1 y C_2P_2 (fig. 212), siendo (P_1, P_2) el pie de la perpendicular. Despues de la rotación (P_1, P_2) se vuelve (P'_1, P'_2). Como la perpendicular común sigue siendo horizontal, la nueva proyección horizontal r'_1 de la recta dada será perpendicular a $C_1P'_1$. Para determinar r'_2 se hace girar otro punto de r, por ejemplo, la traza (H_1, H_2). La nueva proyección horizontal H'_1 de H debe estar sobre r'_1 y de tal modo que $\overline{C_1H_1} = \overline{C_1H'_1}$.

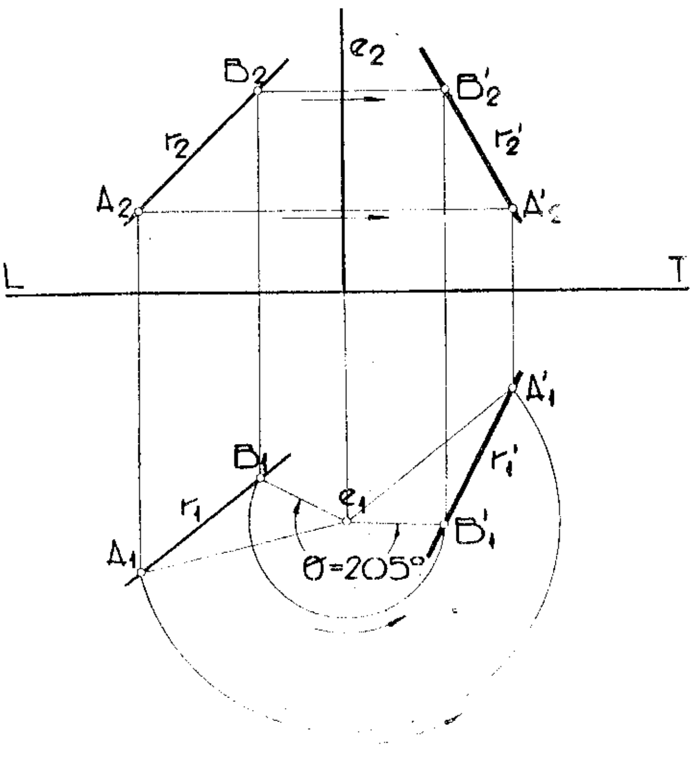


FIG. 211

Los triángulos rectángulos $C_1P_1H_1$ y $C_1P'_1H'_1$ son iguales por tener $\overline{C_1P_1} = \overline{C_1P'_1}$ y $\overline{C_1H_1} = \overline{C_1H'_1}$, luego, $\overline{P_1H_1} = \overline{P'_1H'_1}$, igualdad que permite encontrar en forma directa H'_1.

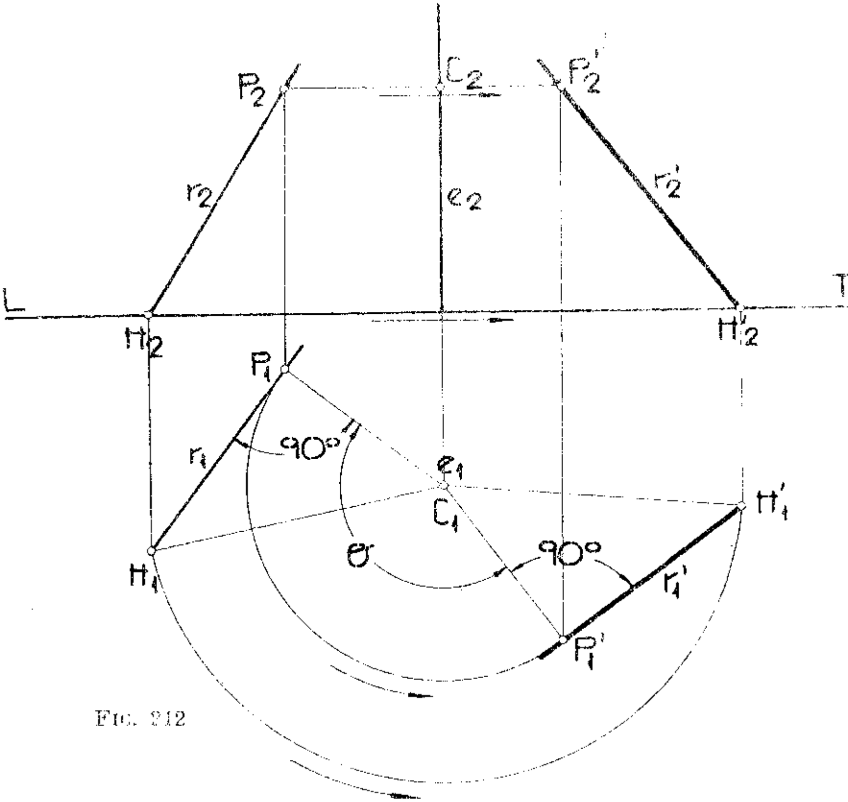


FIG. 212

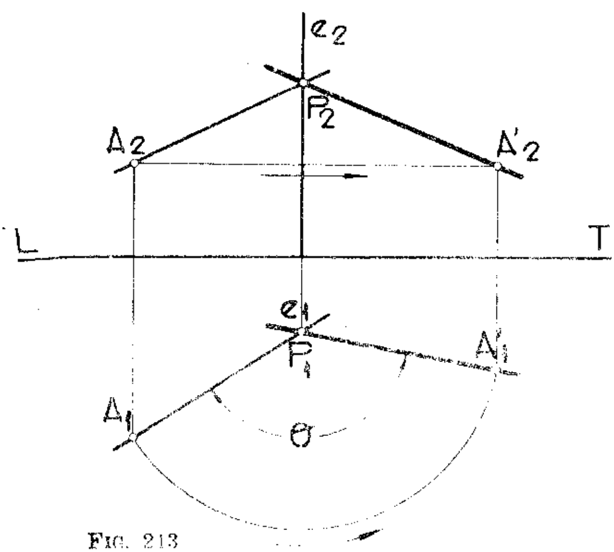


FIG. 213

3. — Convie ne, para simplifi car, elegir un eje vertical que en cuentre la recta dada (fig. 213).

El punto de intersección (P_1, P_2) queda inmó vil, y entonces basta hacer girar solamente un pun to de la recta da da, el (A_1, A_2) por ejemplo.

§ 45. ROTACION DE UN PLANO

1. — La rotación de un plano se obtiene haciendo girar los elementos geométricos que lo determinan, esto es: tres puntos no situados en línea recta, una recta y un punto, dos rectas del plano. Las nuevas proyecciones de estos elementos definen el plano en la nueva posición.

Así, por ejemplo, el plano dado por las rectas (a_1, a_2) y (b_1, b_2) de figura 214 es definido después de una rotación de 120° alrededor del eje vertical (e_1, e_2) por las nuevas proyecciones (a'_1, a'_2) y (b'_1, b'_2) de sus rectas a y b.

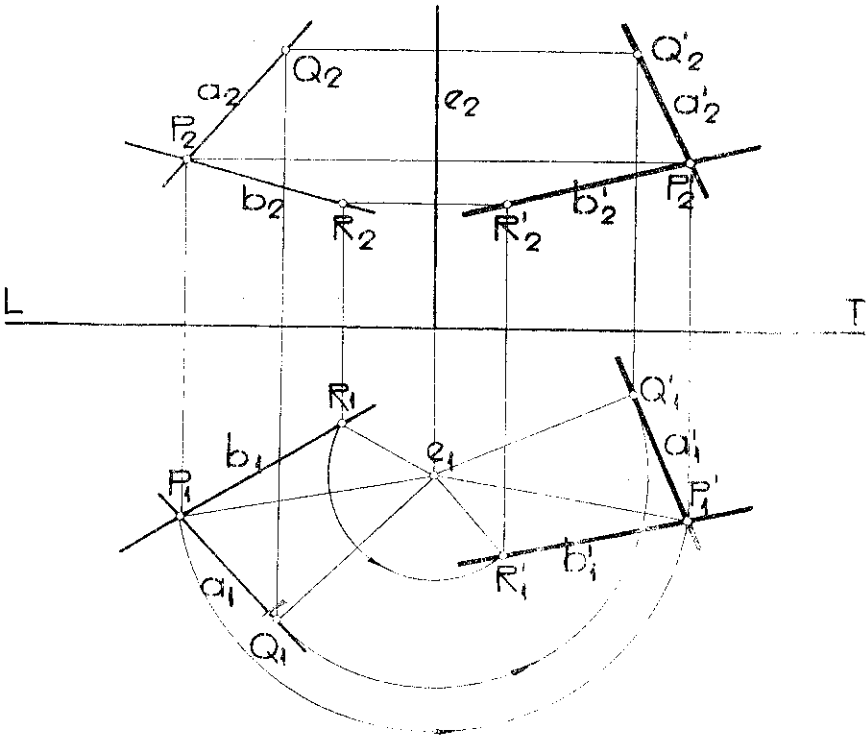


FIG. 214

2. — En numerosos problemas resulta útil a veces necesario, que una figura situada en un plano aparezca, después de una rotación, con una de sus proyecciones reducida a un segmento, en forma análoga a lo que se ha hecho en 2, § 39. La rotación a efectuar es, como se comprende, aquella capaz de hacer que el plano de la figura se vuelva perpendicular a uno de los planos de proyección.

Trátese, por ejemplo, del triángulo $(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2)$ (fig. 215)

Nos proponemos, mediante una oportuna rotación, hacer que el plano ABC resulte perpendicular al plano vertical.

Elijamos como eje de rotación la recta vertical (e_1, e_2) que pasa por el vértice A.

Para que el plano ABC resulte perpendicular al plano π_2 basta que una recta de ABC sea perpendicular al plano π_2. Considerando entonces la horizontal (h_1, h_2) de ABC ejecutemos una rotación tal

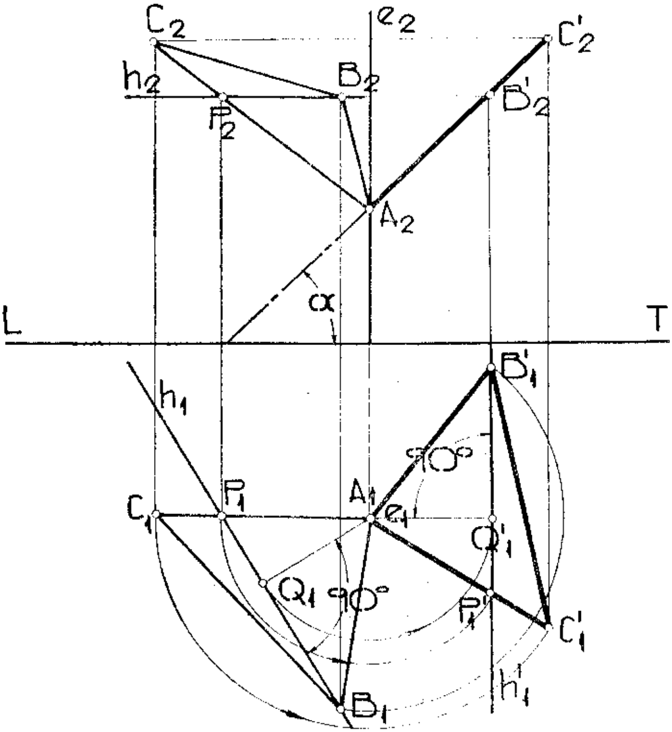


Fig. 215

que coloque a esa recta perpendicularmente al plano π_2. Para esto basta llevar la normal A_1Q_1 a la proyección h_1 hasta la posición $A_1Q'_1$ paralela a LT, y trazar luego h'_1 perpendicular a $A_1Q'_1$. Sobre h'_1 determínanse en seguida P'_1 y B'_1. Para ubicar C'_1 se halla el punto de intersección de $A_1P'_1$ y el arco de circunferencia con centro en A_1 y radio $\overline{A_1C_1}$. La nueva posición del triángulo dado es $A_1B'_1C'_1$. Como proyección vertical se obtiene el segmento $A_2B'_2C'_2$. El ángulo α que este segmento forma con LT es el ángulo que el plano del triángulo forma después de la rotación con el plano π_1.

3. — Mediante una segunda rotación alrededor de un eje perpendicular al plano π_2 puede obtenerse la verdadera magnitud del

triángulo ABC, ya girado en el número anterior. Basta rotar la posición obtenida hasta hacerla paralela al plano π_1. La proyección sobre este plano da la verdadera magnitud.

Es lo que se ha hecho en la figura 216.

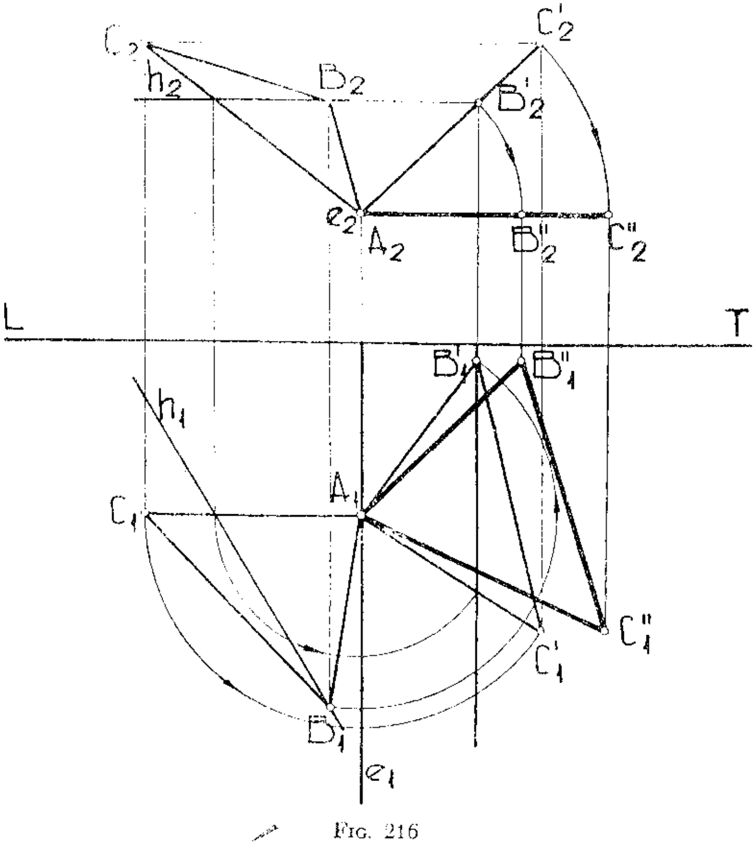


Fig. 216

4.—Los problemas de rotación de figuras planas resultan casi siempre simplificados cuando se conocen, cosa que no siempre ocurre, las trazas del plano de la figura.

Veamos entonces cómo se determinan las nuevas trazas de un plano cuando éste ha sufrido una determinada rotación.

En la figura 217 (α_1, α_2) es el plano dado. El eje es (e_1, e_2).

Para efectuar la rotación se hacen girar, en general, dos horizontales del plano (una de ellas puede ser su traza horizontal) o dos frontales (una de ellas puede ser su traza vertical). Si el punto en que el eje encuentra el plano es conocido, como él permanece inmóvil durante la rotación, se hace girar solamente una recta del plano.

En nuestro caso hemos determinado primero el punto P en que

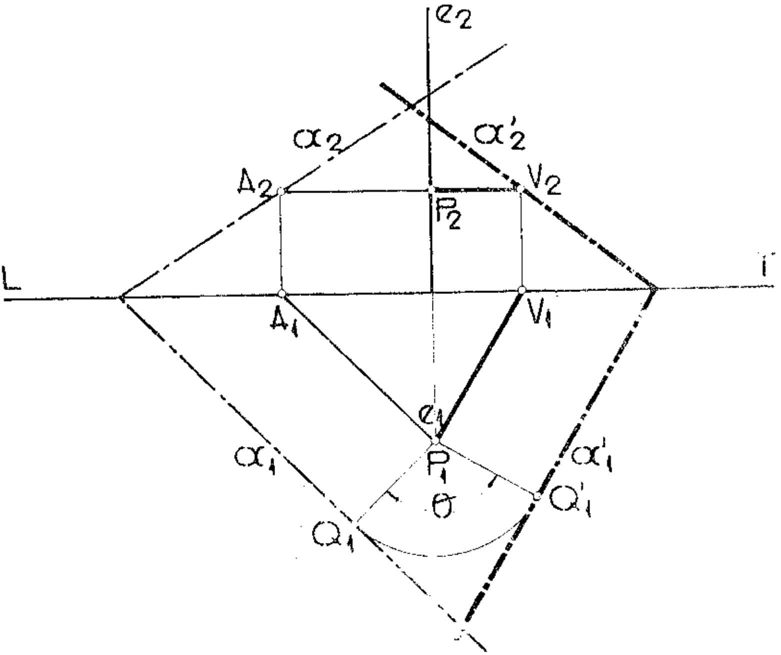


FIG. 217

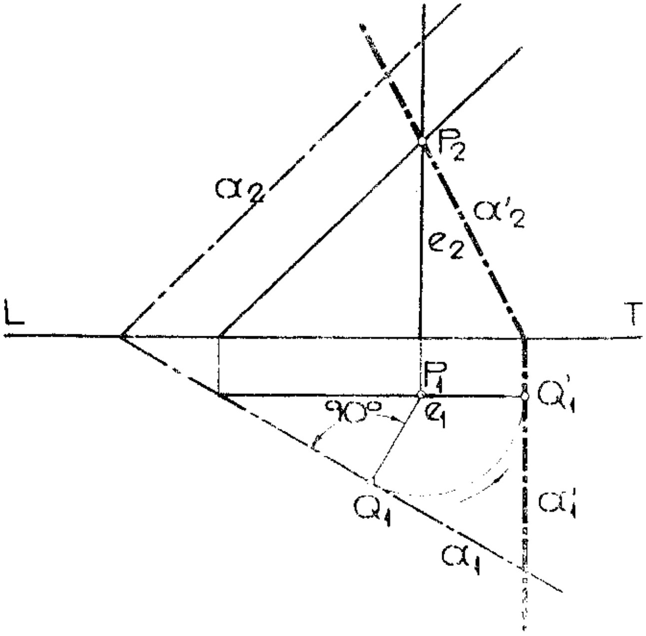


FIG. 218

el eje encuentra el plano. Girada la traza α_1 de un ángulo θ igual al dado el plano queda definido en su nueva posición por α'_1 y el punto (P_1, P_2). Es fácil fijar entonces la posición de la nueva traza vertical α'_2.

5. — Dado un plano mediante sus trazas α_1 y α_2, resolvamos mediante una conveniente rotación un problema análogo al considerado en el punto 2 de este mismo parágrafo; es decir, hagamos que el plano resulte, en su nueva posición, perpendicular a uno de los planos de proyección, al vertical, por ejemplo.

El eje de rotación debe ser vertical (fig. 218), girándose la traza α_1 hasta obtener α'_1 perpendicular a LT. La nueva traza vertical pasa por la proyección vertical del punto P en que el eje encuentra al plano α.

§ 46. APLICACIONES

1. — Hacer que una recta resulte paralela al plano vertical.

Cuando una recta es paralela al plano vertical su proyección horizontal es paralela a LT. Si la recta dada es entonces (r_1, r_2) (fig. 219), basta considerar un eje de rotación vertical, el (e_1, e_2), por ejemplo, y hacer girar la recta hasta que su proyección horizontal r'_1 resulte paralela a LT. Las nuevas proyecciones de la recta dada son r'_1 y r'_2, y un segmento cualquiera de esta recta, el $\overline{PA}$, por ejemplo, aparece en tamaño real en $\overline{P_2 A'_2}$.

Tenemos así un procedimiento para hallar la verdadera magnitud de un segmento de recta dado por sus proyecciones (fig. 200).

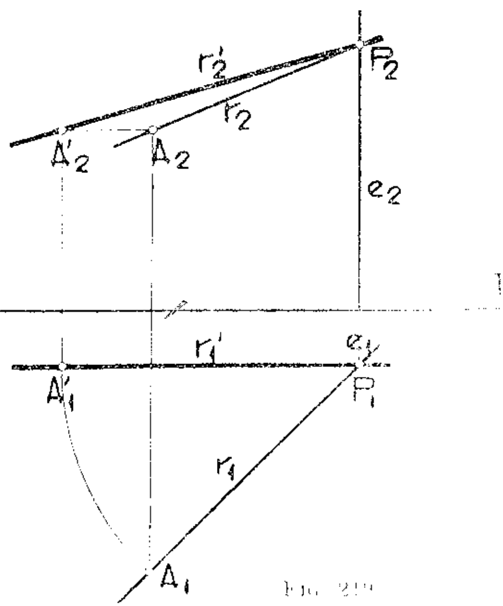


Fig. 219

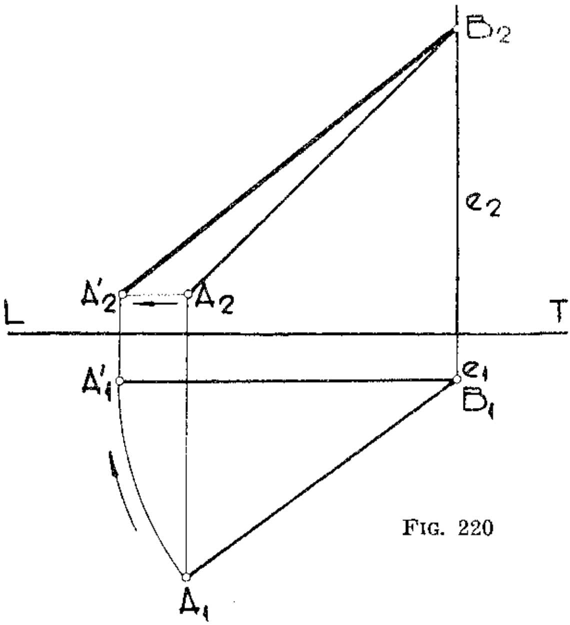


FIG. 220

2. — Hacer que una recta resulte paralela al plano horizontal.
En general, una recta es horizontal si su proyección vertical es paralela a la línea de tierra. Se comprende entonces sin dificultad la

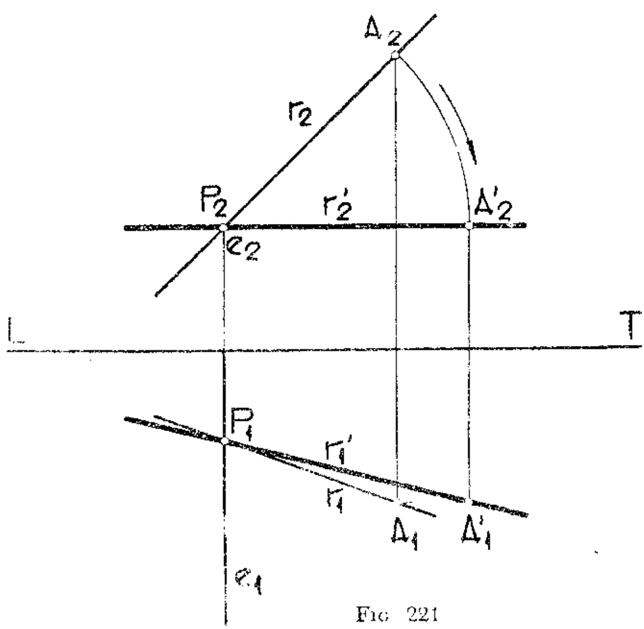


FIG. 221

representación de la figura 221, en la cual la recta (r_1, r_2) se ha vuelto horizontal. Las nuevas proyecciones de la recta son r'_1 y r'_2 y un segmento cualquiera de ella, $\overline{PA}$, por ejemplo, tiene como verdadera magnitud $\overline{P_1A'_1}$.

Dado, pues, un segmento cualquiera por sus proyecciones $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{A_2B_2}$, por ejemplo, su tamaño real es el segmento $\overline{A_1B'_1}$ (fig. 222).

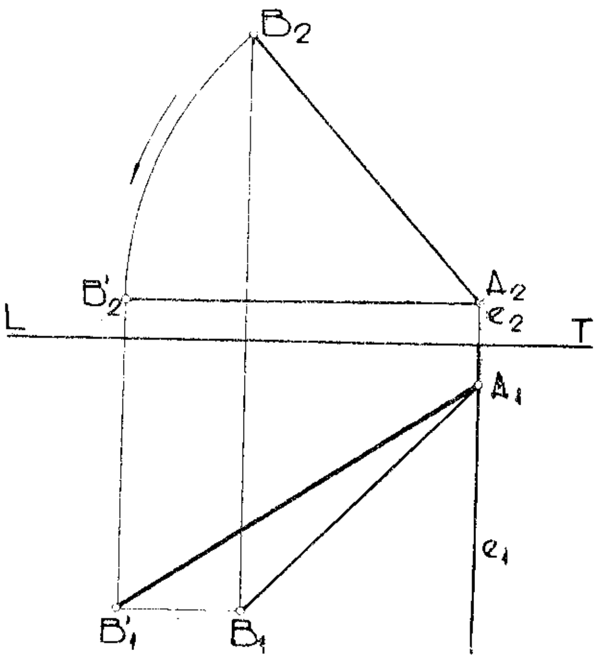


Fig. 222

3. — Hallar la verdadera magnitud de una figura plana por triangulación.

Veamos primero un triángulo cualquiera ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$) (figura 223). El problema de encontrar su verdadera magnitud ya lo hemos resuelto en 3 del parágrafo anterior. En forma muy simple puede llegarse al mismo resultado usando para cada lado el procedimiento indicado en los números 1 y 2.

Construído el triángulo en ABC (fig. 224), este triángulo es igual al triángulo del espacio.

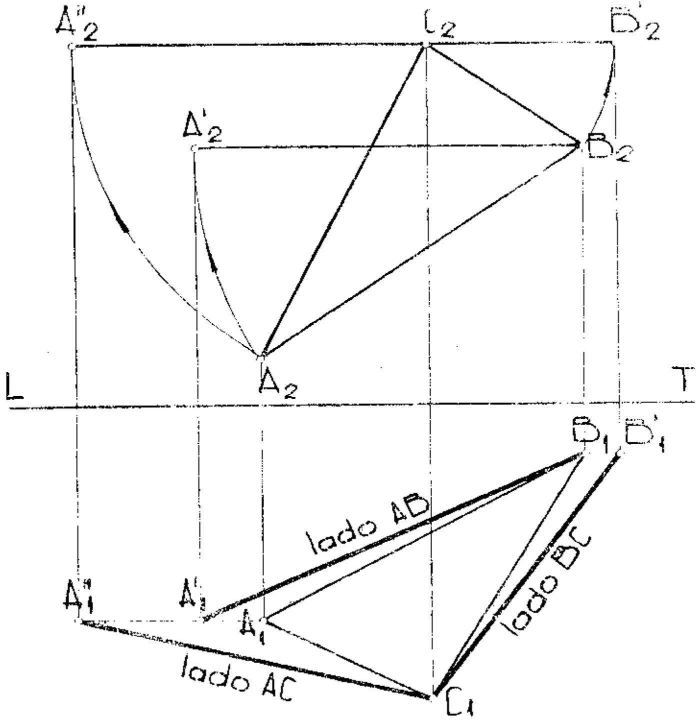


FIG. 223

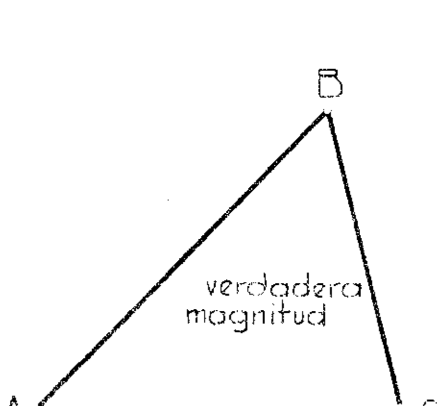


FIG. 224

Tratándose de un polígono puede conseguirse su verdadera magnitud dividiéndolo en trián gulos y hallando la verdadera magnitud de cada uno de ellos.

El procedimiento de la triangulación aplícase en importantes problemas de desarrollo de superficies.

4. — Encontrar la verdadera magnitud de una figura cuando se conocen las trazas del plano al cual pertenece.

Trátese, por ejemplo, del triángulo $(A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2)$ contenido en el plano de trazas α_1 y α_2 (fig. 225).

Mediante una primera rotación se lleva el plano α a la posición $\boldsymbol{\alpha'} \equiv (\alpha'_1,\ \alpha'_2)$, perpendicularmente al plano vertical. El eje utilizado es una recta (e_1, e_2) de este plano. L... nuevas proyecciones del trián

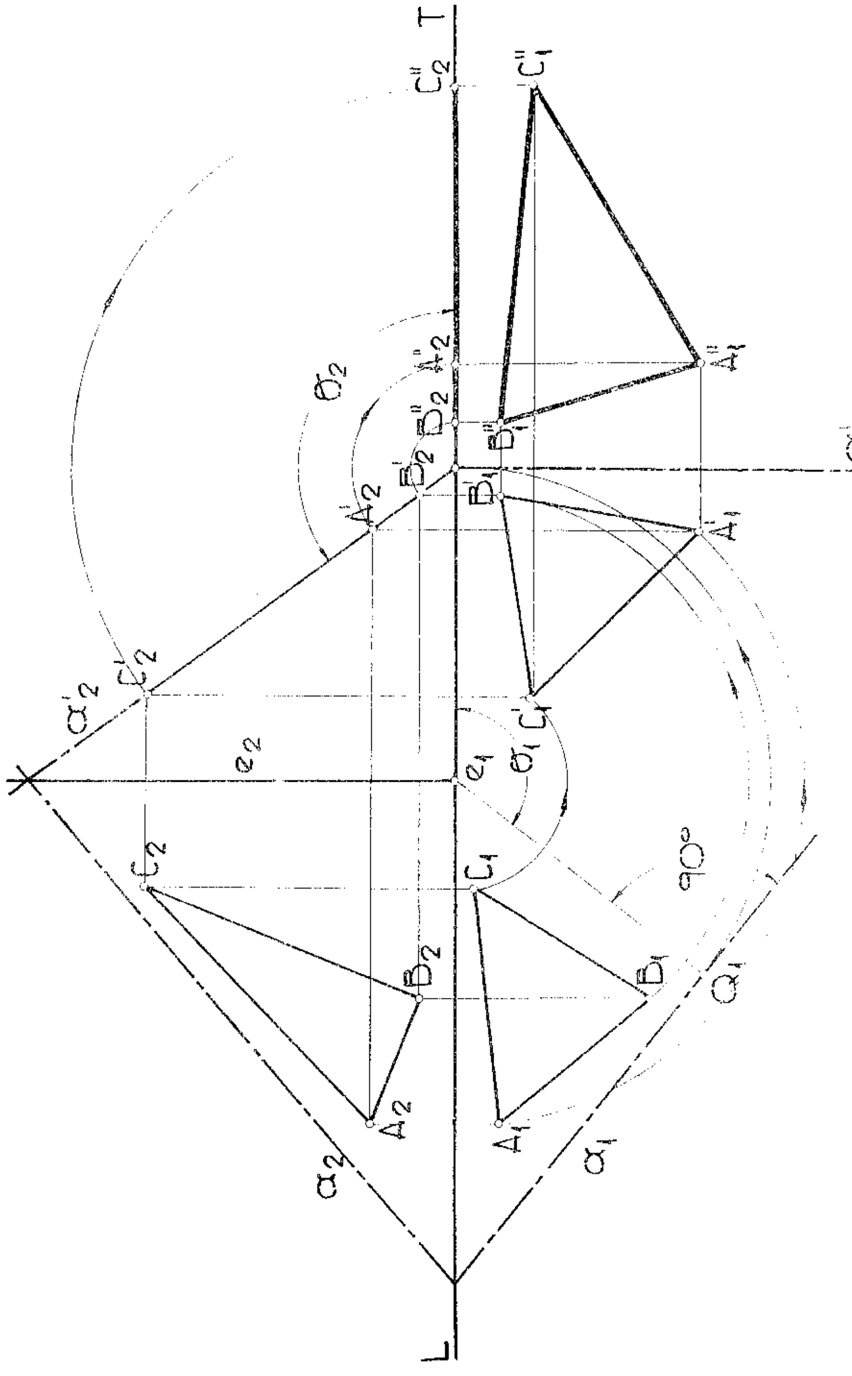

L
T
α2
α'2
α1
α'1
A2
B2
C2
A'2
B'2
C'2
A1
B1
C1
A'1
B'1
C'1
A''1
B''1
C''1
B''2
C''2
A''2
e2
e1
90°

Fig. 225

gulo son ($A'_1B'_1C'_1$, $A'_2B'_2C'_2$). Luego se hace una segunda rotación utilizando como eje la traza α'_1 hasta que el plano α coincida con el plano horizontal. El triángulo aparece según su verdadera magnitud en $A''_1B''_1C''_1$.

5. — En la figura 226 se da la planta y la elevación de un techo. Se pide el dibujo en tamaño real de cada falda, así como su pendiente. La altura $\overline{MA}$ de la falda ABC aparece en verdadera magnitud en $\overline{M_2A_2}$. Conocidas la base $\overline{B_1C_1}$ y la altura $\overline{M_2A_2}$ puede construirse el triángulo $C_2B'_2A''_2$.

La pendiente es

$$p_1 = \frac{\overline{N_2A_2}}{\overline{C_2N_2}} = \operatorname{tg}\alpha.$$

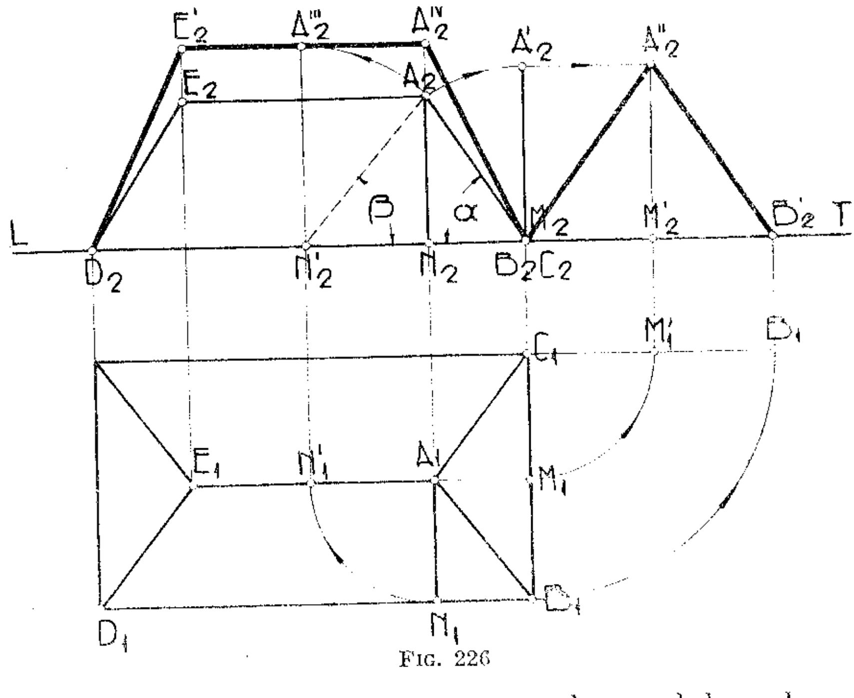


FIG. 226

Para la falda $AEDB$ observemos que su altura es dada por las proyecciones $\overline{N_1A_1}$ y $\overline{N_2A_2}$. Mediante una rotación alrededor de un eje perpendicular al plano horizontal se tiene en $\overline{N'_2A_2}$ su verdadera magnitud. Conocidas las bases $\overline{D_2C_2}$ y $\overline{E_2A_2}$ y la altura $\overline{N'_2A_2}$, puede construirse en $D_2C_2A^{IV}_2E'_2$ el tamaño real de la falda. Su pendiente es

$$p_2 = \frac{\overline{N_2A_2}}{\overline{N'_2N_2}} = \operatorname{tg}\beta.$$

Generalmente se hace

$$\overline{C'_2N_2} = \overline{N'_2N_2},$$

debiéndose tener entonces

$$p_1 = p_2,$$

para lo cual basta que B_1A_1, C_1A_1, ..., sean bisectrices de los ángulos B_1, C_1, ...

6. — Determinar el ángulo que forman dos rectas.

Sean $a \equiv (a_1, a_2)$ y $b \equiv (b_1, b_2)$ las rectas dadas (fig. 227).

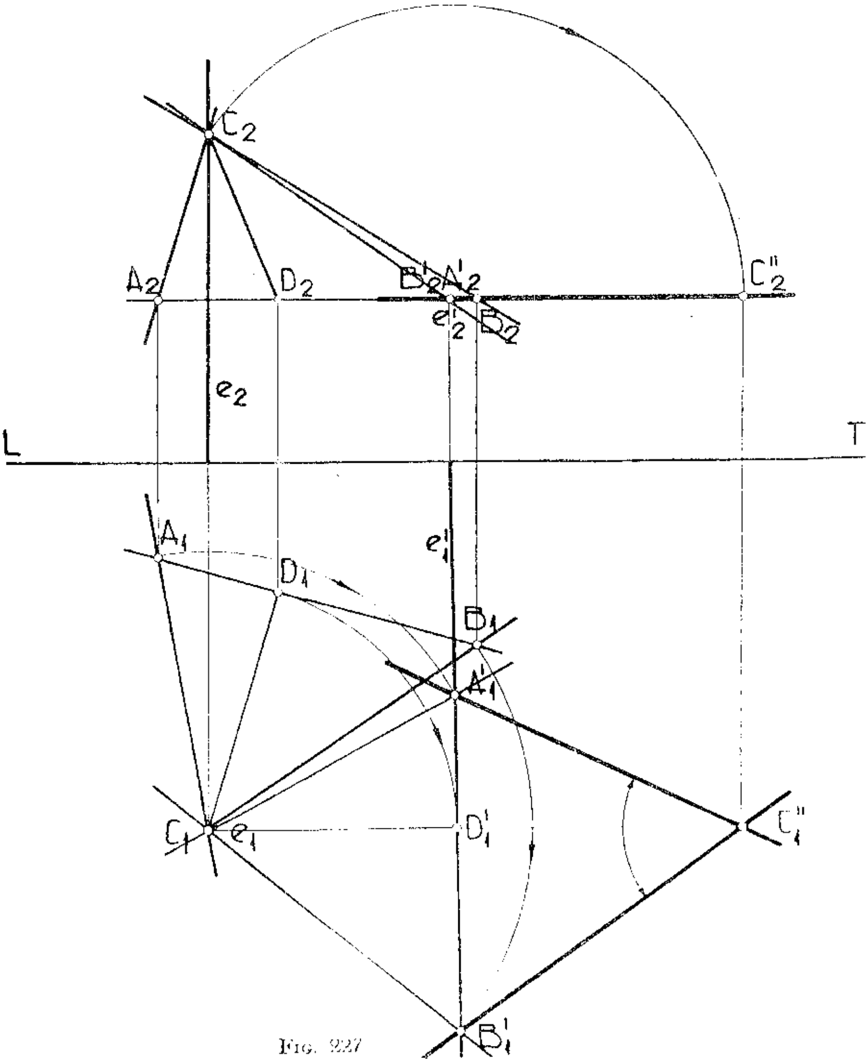
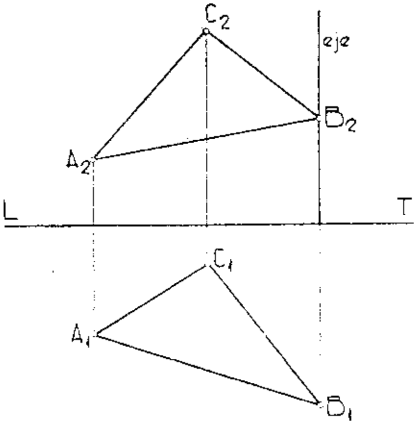


FIG. 227

Mediante una rotación alrededor del eje (e_1, e_2) perpendicular al plano horizontal se hace que el plano del ángulo se proyecte verticalmente según el segmento $C_2B'_2$. Una segunda rotación alrededor del eje (e'_1, e'_2), que pasa por B'_2 y es perpendicular al plano vertical, permite obtener en $A'_1C''_1B'_1$ la verdadera magnitud del ángulo pedido.

EJERCICIOS



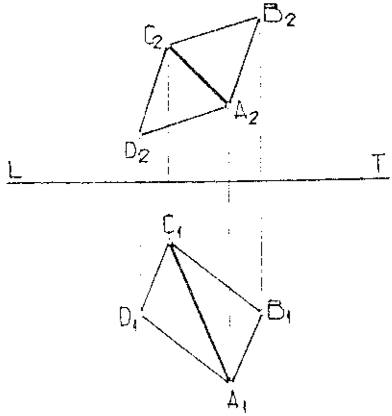
EJERCICIO 66

66. Dado el triángulo ABC, por sus proyecciones, hacer mediante una rotación alrededor del eje vertical que pasa por B, que se proyecte según un segmento sobre el plano vertical de proyección.

67. Resuelto el problema anterior, hacer que el triángulo ABC aparezca **en verdadera** magnitud.

68. Dado un plano, hacerlo girar hasta que pase por un punto dado.

69. Dado el cuadrado $ABCD$, por sus proyecciones, hacer mediante una rotación, que su diagonal $\overline{AC}$ aparezca horizontal.



EJERCICIO 69

CAPÍTULO IX

REBATIMIENTOS

§ 47. OPERACIONES GENERALES

1. — Dada una figura F perteneciente a un plano α, se llama *rebatimiento* de F sobre otro plano β la posición (F) que adquiere la figura F cuando el plano α gira alrededor de su intersección con β, en un sentido u otro, hasta coincidir con el mismo plano β.

Generalmente se toma β paralelo a uno de los planos de proyección, y entonces, efectuado el rebatimiento, la figura F aparece según verdadera magnitud en una de sus proyecciones.

La operación inversa, es decir, la que vuelve la figura rebatida (F) a su posición primitiva F, recibe el nombre de *relevamiento*.

2. — Supongamos un plano α determinado, por ejemplo, por dos de sus rectas a y b (fig. 228). Mediante una rotación alrededor de una de sus horizontales h es posible colocar α paralelo al plano hori-

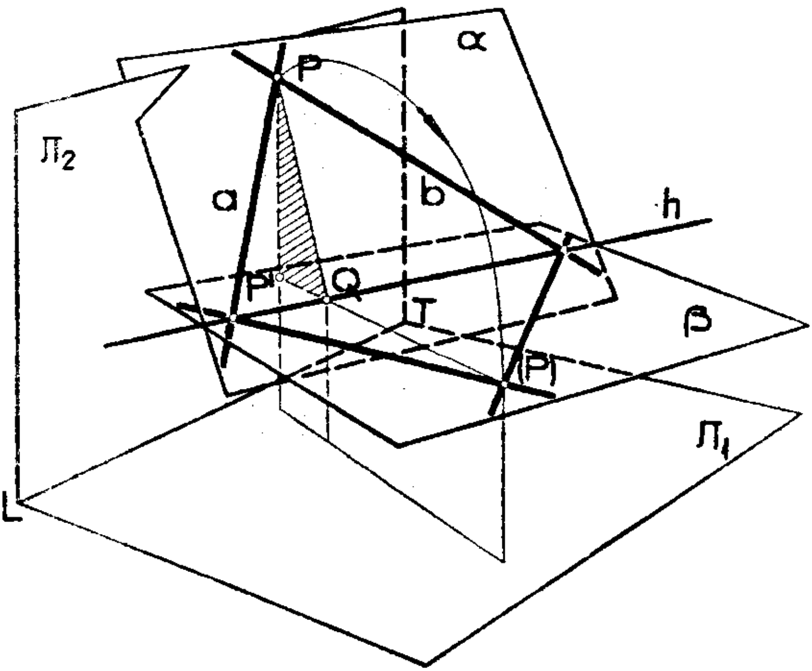


FIG. 228

zontal de proyección. Habremos rebatido así el plano α sobre el plano horizontal β que pasa por h.

Sea P un punto de α. Deseamos encontrar la posición de P cuando α, girando alrededor de h, ha coincidido con β.

Bajada la perpendicular PQ a la horizontal h, el punto P describe, al efectuar el rebatimiento, un arco de circunferencia, de radio $\overline{QP}$, situada en un plano perpendicular a la recta h. Si entonces, desde Q, en el plano β, se conduce la perpendicular a h y se toma $\overline{Q(P)} = \overline{QP}$, el punto (P) es el rebatimiento de P. Es fácil notar que $\overline{QP}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son: $\overline{P'P}$ igual a la distancia de P al plano β, y $\overline{QP'}$ igual a la distancia entre el pie P' de la perpendicular por P al plano β, y Q, centro del arco que describe P al rebatirse el plano α.

3. — Las consideraciones anteriores nos permiten hacer la representación del rebatimiento de P (fig. 229).

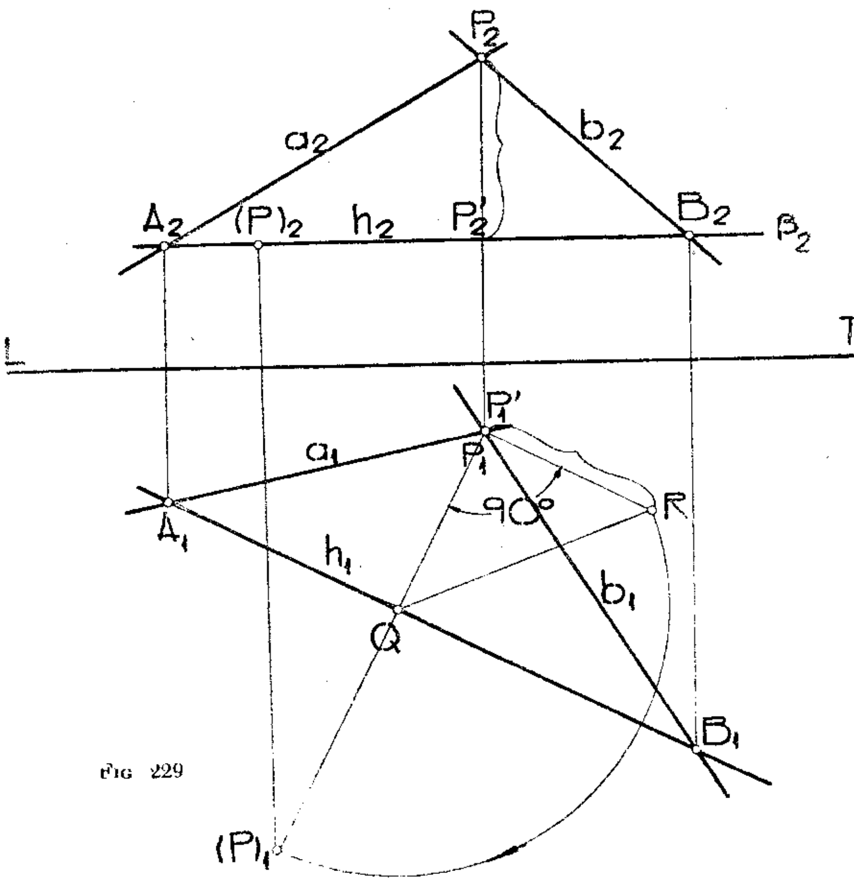


FIG 229

El arco descripto por P se proyecta horizontalmente según la perpendicular por P_1 a h_1. Sobre esta perpendicular debemos ubicar la proyección horizontal del rebatimiento de P. Construyamos entonces como figura auxiliar el triángulo rectángulo nombrado en el número anterior. Uno de sus catetos es $\overline{QP_1}$, distancia del pie P' al centro Q del arco. El otro cateto es el segmento $\overline{P_1R} = \overline{P'_2P_2}$, distancia de P al plano β. Llevado entonces sobre la recta P_1Q, a partir de Q, el segmento QR, se obtiene en $(P)_1$ la proyección horizontal de la nueva posición de P. Su proyección vertical es $(P)_2$.

4. — En forma análoga, mediante una rotación alrededor de una de sus frontales, puede obtenerse el rebatimiento de un plano sobre otro paralelo al plano vertical de proyección.

§ 48. REBATIMIENTO SOBRE UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

1. — El rebatimiento de una figura se hace casi siempre sobre uno de los planos de proyección, y entonces el eje de rotación no es sino la traza α_1 o α_2 del plano α que contiene la figura.

En la figura 230 se muestra el rebatimiento de un punto P del plano α cuando éste, girando alrededor de su traza horizontal α_1, llego a coincidir con el plano π_1.

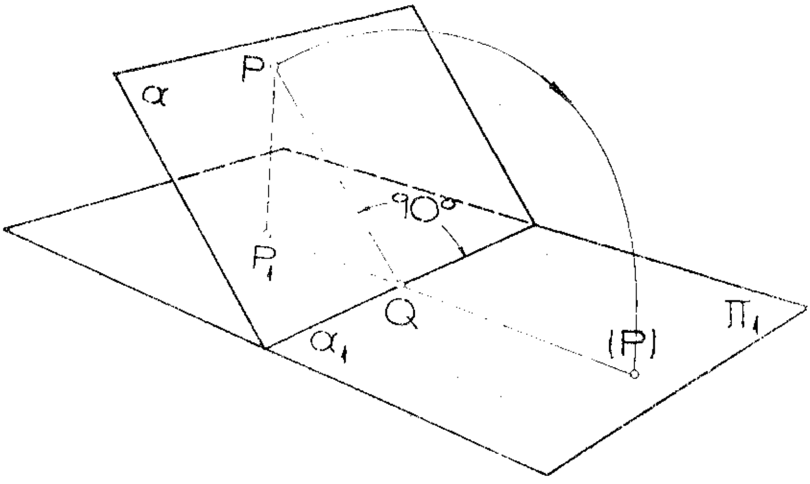


Fig. 230

Lo mismo que en el caso más general estudiado en el parágrafo anterior, el punto P describe un arco de circunferencia de radio $\overline{QP}$ situado en un plano perpendicular a la traza α_1. La posición final es (P) sobre la normal por Q a α_1 y a una distancia $\overline{Q(P)}$, que es dada por la hipotenusa del triángulo rectángulo QP_1P, cuyos catetos son:

$\overline{P_1P}$, igual a la cota del punto P, y $\overline{QP_1}$, igual a la distancia de la proyección horizontal P_1 a la traza horizontal α_1 del plano α.

Estamos en condiciones, así, de dibujar la figura descriptiva del rebatimiento de P.

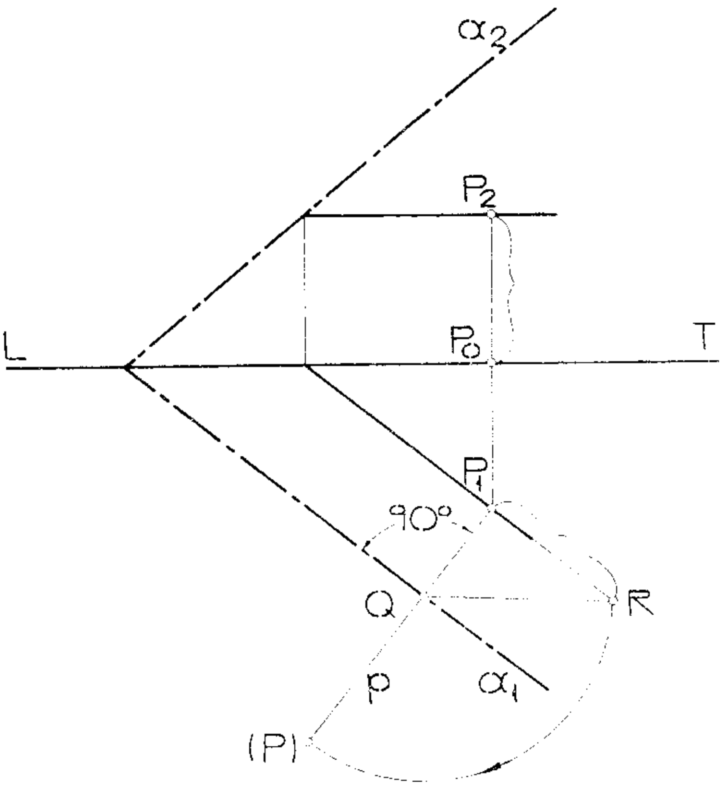


FIG. 231

Conducida por P_1 la perpendicular p a α_1, designado con Q el punto de intersección de esta perpendicular con α_1 y construído el triángulo rectángulo que tiene como catetos los segmentos $\overline{P_1Q}$ y $\overline{P_1R} = \overline{P_oP_2}$ (fig. 231), el rebatimiento (P) del punto P se encuentra sobre p a una distancia de α_1 igual a la hipotenusa $\overline{QR}$ del triángulo rectángulo construído.

El rebatimiento sobre el plano π_1 puede ser obtenido también girando α en sentido contrario al del caso anterior. La representación que resulta es entonces la indicada en la figura 232.

2. — En la figura 233 se ha hecho, en cambio, el rebatimiento del punto $P \equiv (P_1, P_2)$ sobre el plano vertical girando alrededor de α_2.

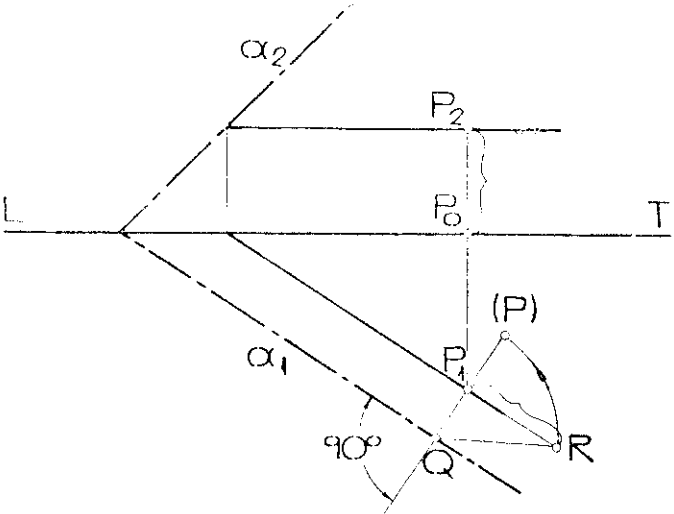


FIG. 232

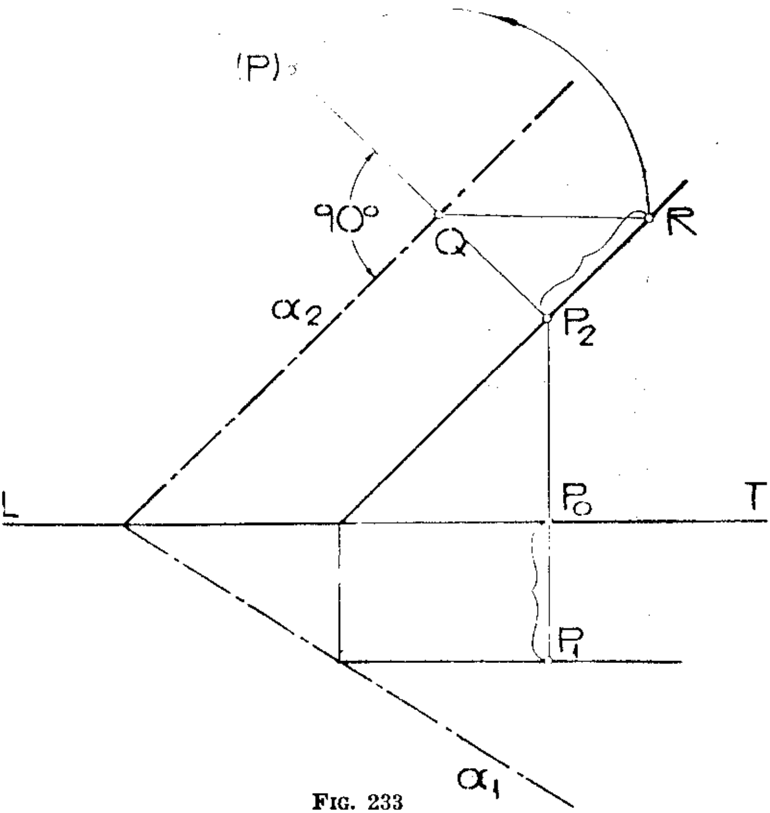


FIG. 233

3. — Dada una recta $r \equiv (r_1, r_2)$ (fig. 234) de un plano $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$, es fácil encontrar su rebatimiento (r) sobre uno de los planos de proyección, el horizontal, por ejemplo. Basta aplicar a dos cualesquiera de sus puntos el procedimiento indicado en 1. Para simplificar podemos observar que durante el rebatimiento la traza H_1 de la recta queda fija, y entonces el rebatimiento de r se obtiene en seguida uniendo H_1 con el rebatimiento (P) de un punto arbitrario P de la recta dada.

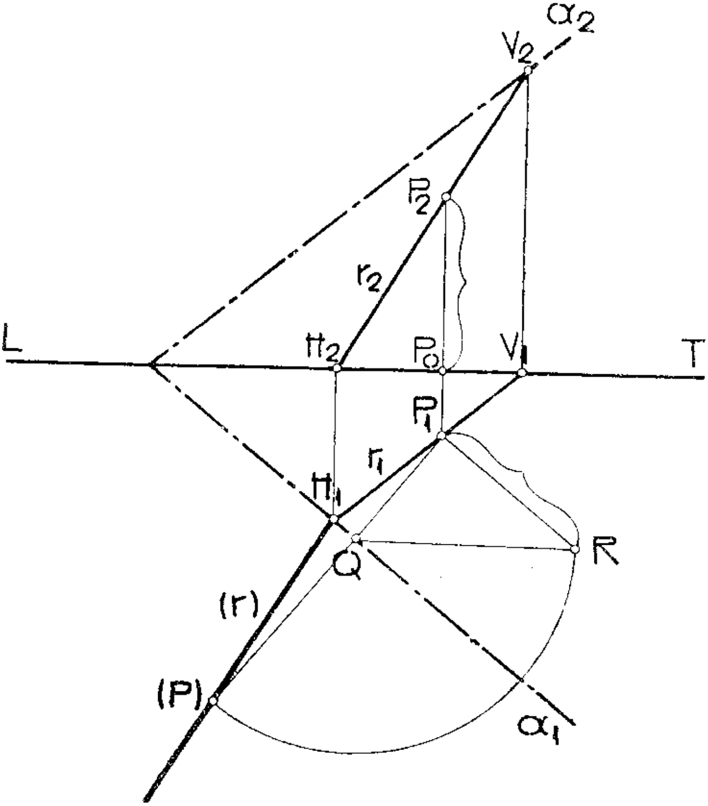


FIG. 234

En vez del punto arbitrario P de r puede elegirse su traza vertical. Es lo que se ha hecho en la figura 235. El segmento $\overline{H_1(V)}$ es la verdadera magnitud del segmento $\overline{HV}$ del espacio.

4. — Sea un plano $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$ (fig. 236). Queremos rebatirlo sobre el plano horizontal determinando la nueva posición de su traza vertical.

Al efectuar el rebatimiento alrededor de α_1 el punto O no se mueve. Para hallar el rebatimiento de α_2 basta entonces considerar otro cualquiera de sus puntos, el (P_1, P_2), por ejemplo. Su rebatimiento es (P). Uniendo O y (P) se tiene el rebatimiento (α_2) de la traza α_2. En cuanto a la traza α_1, su posición no ha variado.

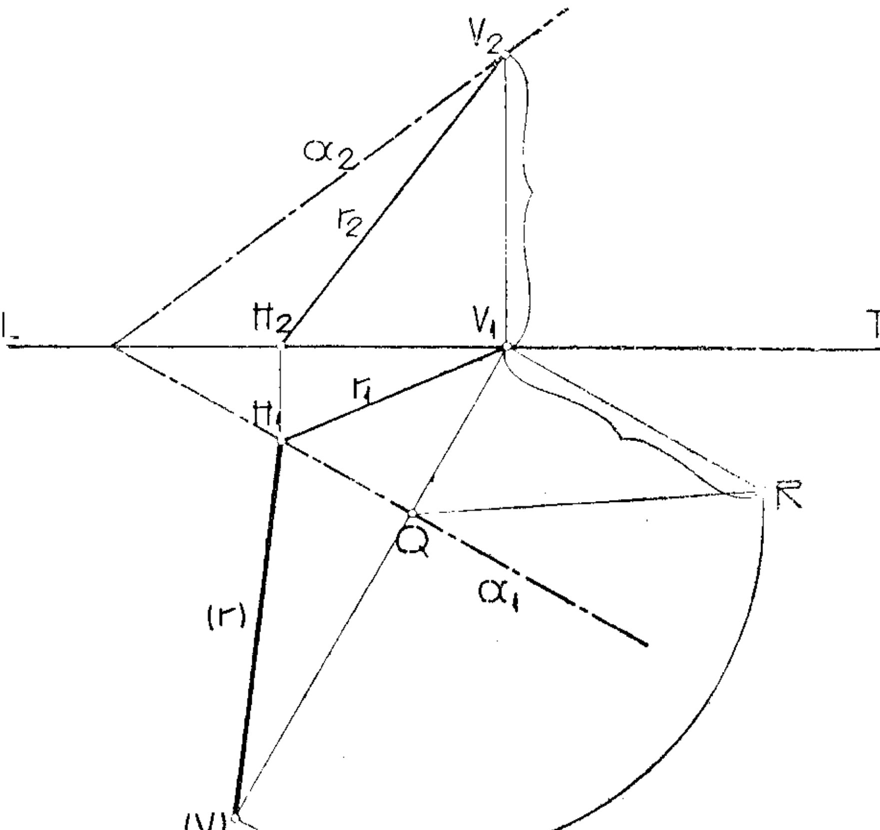


FIG. 235

Se tiene así en el ángulo de lados (α_2) y α_1 el rebatimiento de la porción de plano α comprendida entre sus dos trazas.

En la figura 237 se ha rebatido α sobre el plano vertical.

5. — Si se observa (fig. 236) que la distancia $\overline{OP_2}$ es igual a $\overline{O(P)}$, se comprende la construcción indicada en la figura 238, que da en forma simplificada el rebatimiento del plano α sobre el π_1.

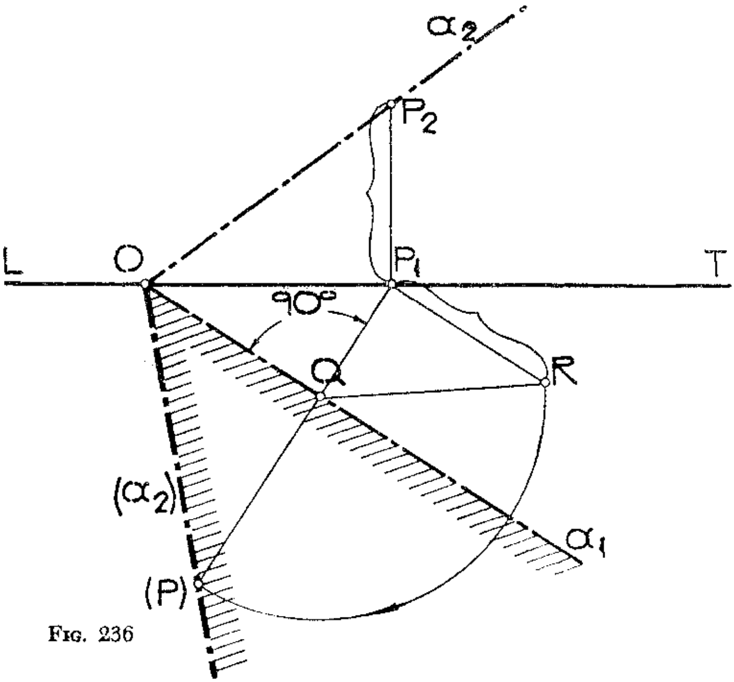


FIG. 236

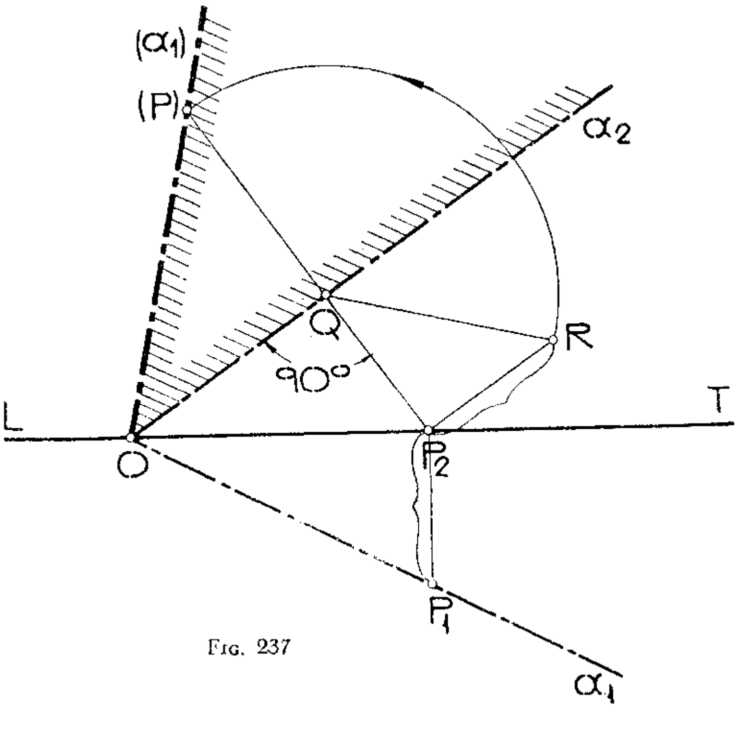


FIG. 237

Con centro en O y radio $\overline{OP_2}$ se ha cortado en (P_2) la perpendicular por P_1 a la traza α_1.

6. — Dados un plano α mediante sus trazas α_1 y α_2 y una de sus horizontales $h \equiv (h_1, h_2)$, es fácil rebatir esta recta sobre el plano π_1 de proyección.

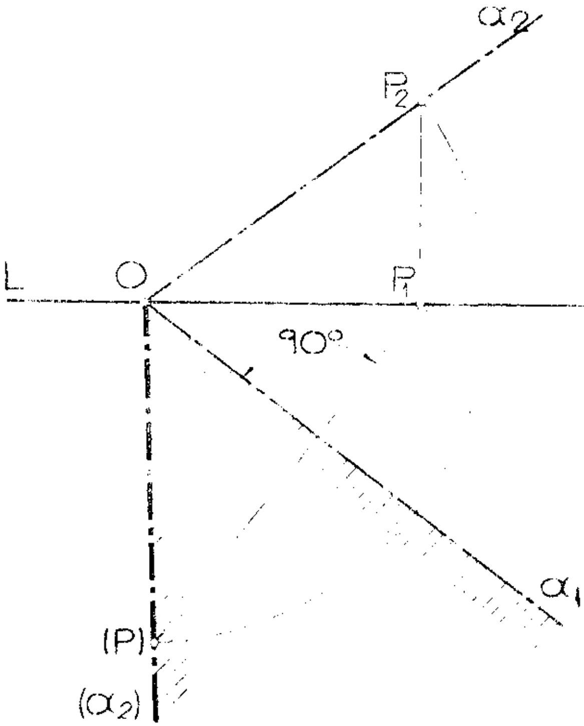


FIG. 238

Hallado el rebatimiento (V) de la traza vertical (fig. 239) resulta en seguida (α_2). La paralela por (V) a la traza α_1 da el rebatimiento (h) de la horizontal considerada.

149. RELEVAMIENTO DE UN PLANO

1. — Conocidas las dos trazas de un plano rebatido sobre el plano π_1, relevar ese plano, determinando la traza vertical.

Trátese del plano rebatido $[\alpha_1, (\alpha_2)]$ (fig. 240).

Para volver a encontrar α_2 basta rehacer en orden inverso las operaciones indicadas en los números 4 y 5 del parágrafo anterior.

Siguiendo las operaciones del número 4 se procede así:

1º Se traza por un punto cualquiera (P) de (α_2) la perpendicular a la traza horizontal α_1. Se marcan los puntos Q y P_1 en que esa perpendicular encuentra α_1 y LT.

2º Se construye el triángulo rectángulo RP_1Q, del cual conocemos el cateto $\overline{P_1Q}$ y la hipotenusa $\overline{QR} = \overline{Q(P)}$.

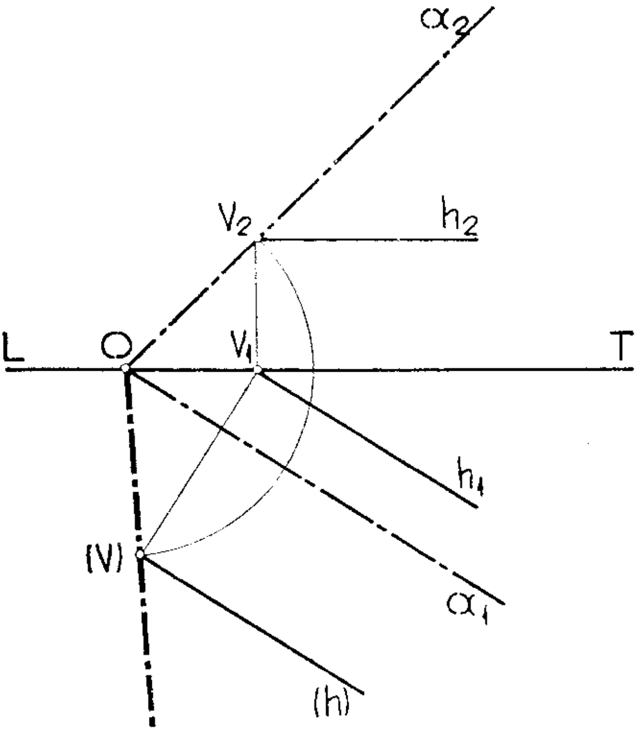


Fig. 239

3º Sobre la perpendicular por P_1 a LT se marca P_2 tomando $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1R}$.

4º Se une P_2 con O.

Siguiendo el procedimiento indicado en el número 5 se procede, en cambio, así:

1º Se traza (fig. 241) desde (P) la perpendicular a la traza α_1 y se marca el punto P_1 sobre LT.

2º Se levanta por P_1 la perpendicular a LT.

3º Con centro en O y radio $\overline{O(P)}$ se describe un arco hasta

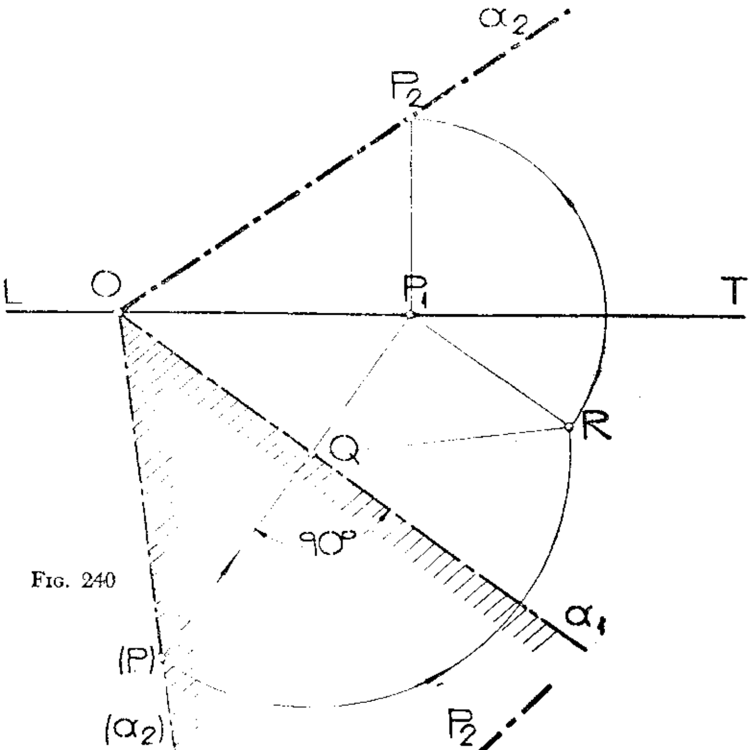


FIG. 240

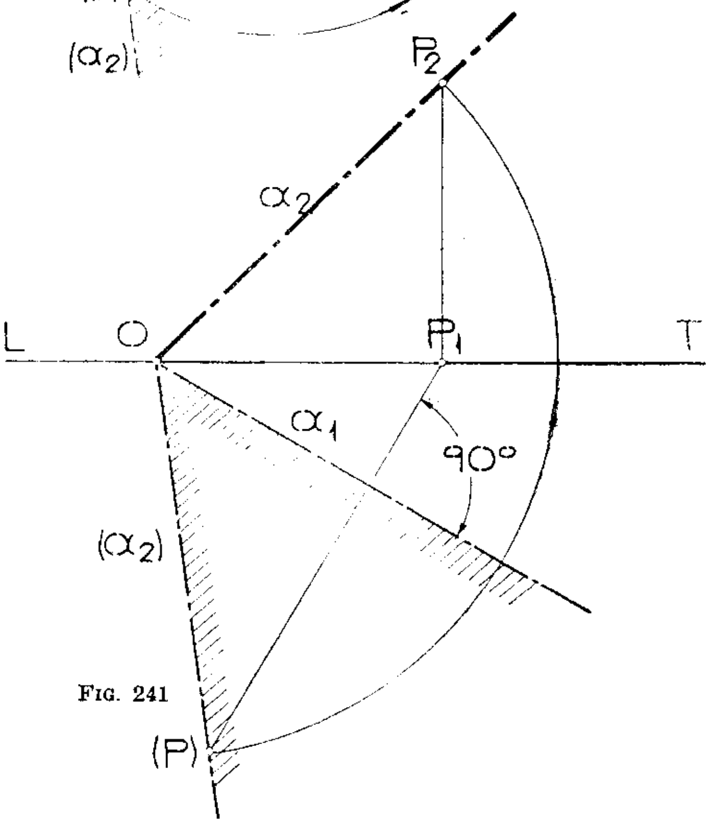


FIG. 241

determinar el punto P_2 sobre la perpendicular levantada por P_1.

4º Se une P_2 con O.

2. — Sea un punto (P) de un plano rebatido. Se desea hacer su relevamiento, es decir, hallar sus proyecciones P_1 y P_2.

Sean α_1 la traza horizontal del plano y (α_2) el rebatimiento de la traza α_2 (fig. 242). La proyección horizontal del punto estará sobre la perpendicular por (P) a la traza α_1. Por otra parte, el punto (R), intersección de esta perpendicular y de (α_2), es el reba-

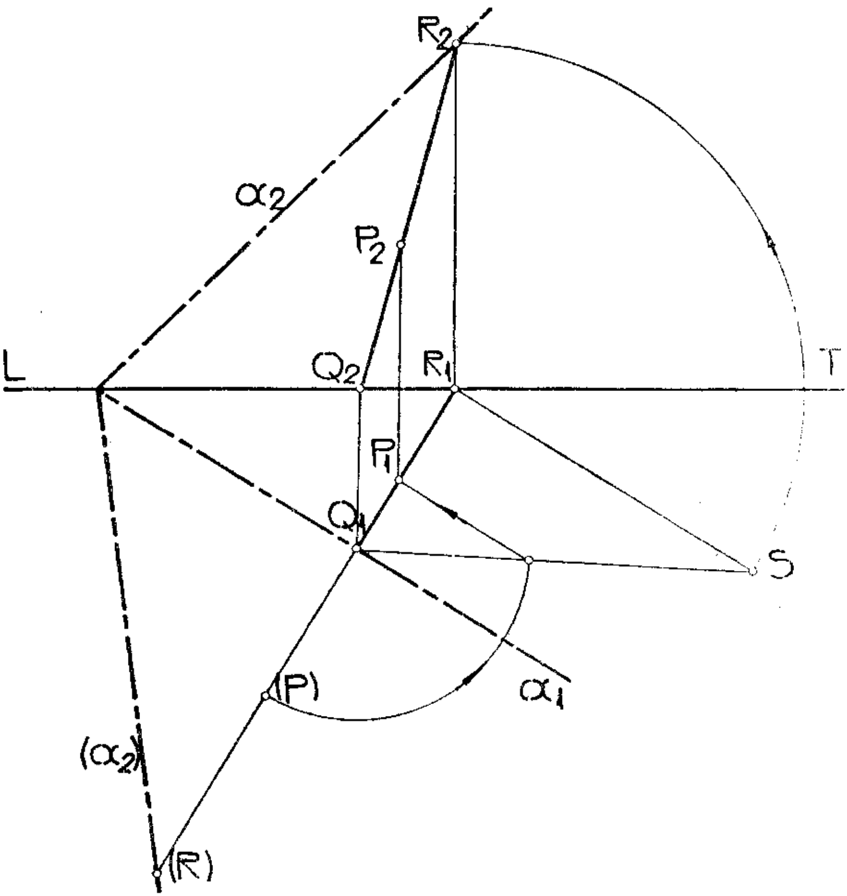


Fig. 242

timiento de un punto de la traza α_2, cuyas proyecciones podemos hallar fácilmente. Basta construir el triángulo rectángulo SR_1Q_1, del cual conocemos el cateto $\overline{Q_1R_1}$ y la hipotenusa $\overline{Q_1S} = \overline{Q_1(R)}$. Llevando sobre la perpendicular por R_1 a LT el segmento $\overline{R_1R_2} = \overline{R_1S}$ se tienen las dos proyecciones del punto R de la traza vertical α_2.

Considerada la recta cuyo rebatimiento es $(P)(R)$ es fácil determinar P_1 primero y P_2 después. Si se desea, puede completarse la representación haciendo pasar por R_2 la traza α_2.

3. — Más comúnmente se emplea otro procedimiento para relevar puntos de un plano rebatido.

Trátese del plano rebatido en α_1, (α_2) (fig. 243). Queremos relevar los puntos A, B y C del plano conociendo los rebatimientos (A), (B) y (C).

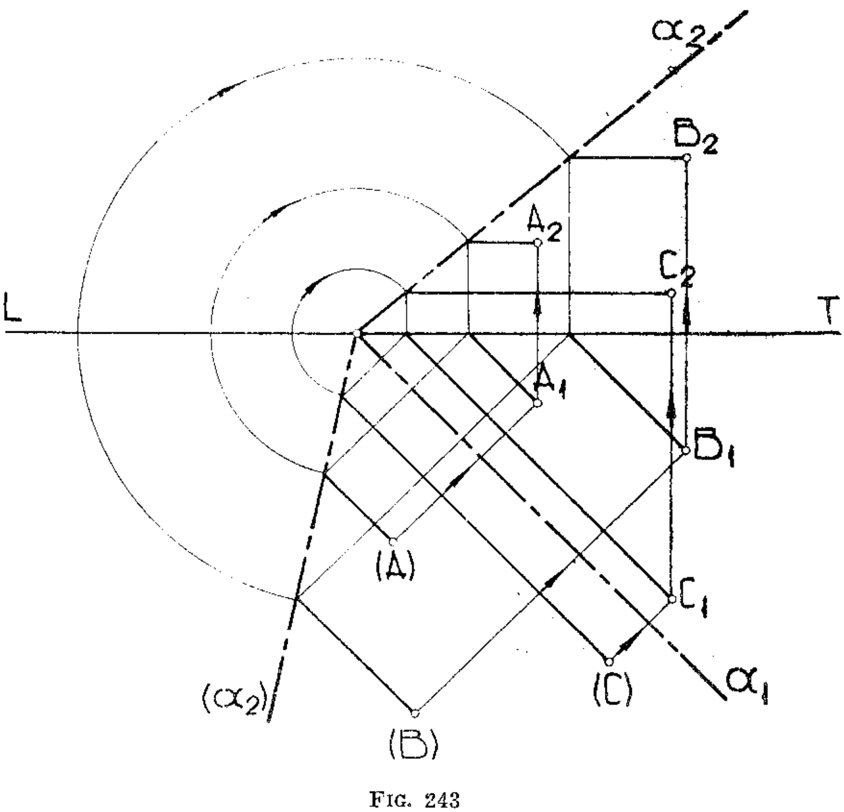


FIG. 243

Para hallar las proyecciones de A, B y C se consideran las horizontales correspondientes. Sus rebatimientos son paralelas a α_1 por (A), (B) y (C); sus proyecciones se obtienen fácilmente relevando sus trazas verticales. Llevando después desde (A), (B) y (C) perpendiculares a la traza α_1 se determinan A_1, B_1 y C_1. Líneas de inferencia fijan luego A_2, B_2 y C_2.

Puede completarse la representación trazando α_2.

§ 50. REBATIMIENTO DE UN PLANO PERPENDICULAR A UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

1. — **El** rebatimiento de puntos y rectas de un plano se simplifica **cuando éste es** perpendicular a uno de los planos de proyección.

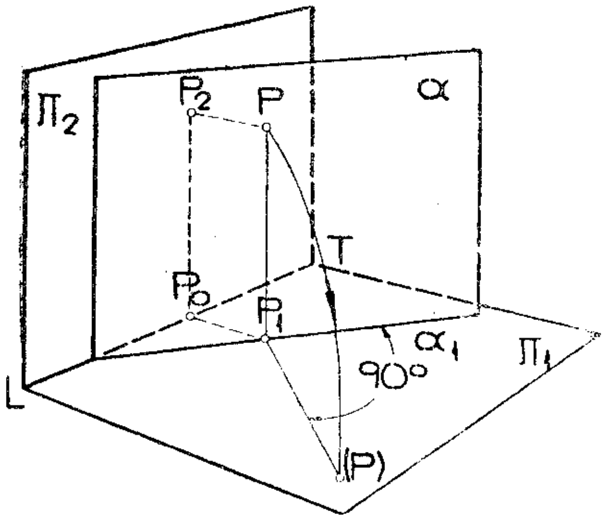


FIG. 244

La figura 244 muestra la nueva posición de un punto cuando es rebatido sobre π_1 el plano vertical α al cual pertenece.

El eje de rotación es α_1 y P se sitúa en (P), sobre la perpendicular a α_1 por P_1 y a una distancia $\overline{P_1(P)}$ igual a la cota $\overline{P_1P}$ del punto.

La representación está dada por **la figura** 245.

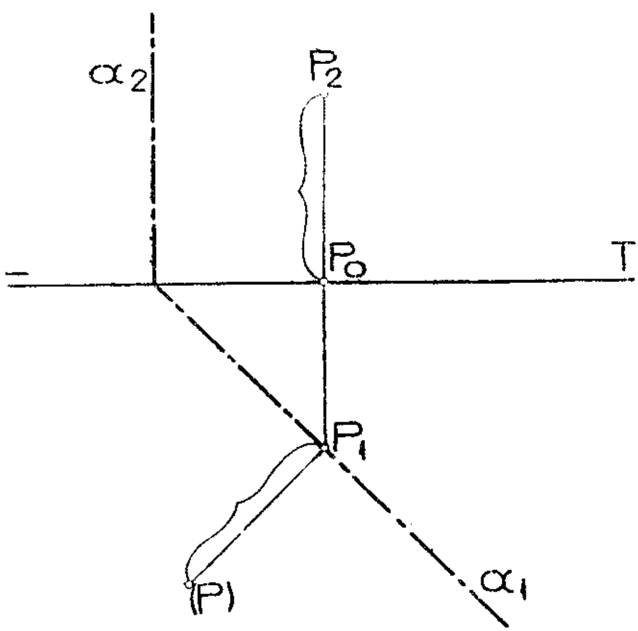


FIG. 245

2. — La figura 246 da, en cambio, el rebatimiento del mismo plano anterior sobre el plano π_2 de proyección.

El eje de rotación es α_2, siendo (P) la nueva posición del punto P.

3. — Sabiendo hallar el rebatimiento de un punto se está en condiciones de construir el rebatimiento de una figura de un plano.

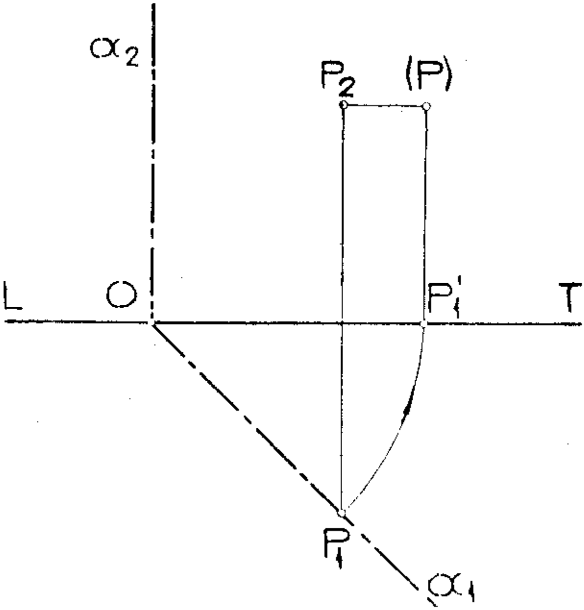


Fig. 246

En la figura 247 se ha hecho el rebatimiento del cuadrilátero *ABCD*, perteneciente a un plano perpendicular al plano horizontal. Sobre π_1 se obtuvo $(A)(B)(C)(D)$; sobre π_2, $(A)'(B)'(C)'(D)'$. Ambas figuras dan la verdadera magnitud del cuadrilátero *ABCD* del espacio.

4. — La figura 248 da el rebatimiento sobre cada uno de los planos de proyección de un cuadrilátero colocado en un plano perpendicular al plano vertical.

Los dos rebatimientos dan, como en el número anterior, las verdaderas dimensiones del cuadrilátero.

§ 51. RELEVAMIENTO DE UN PLANO PERPENDICULAR A UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

1. — Dada una figura cualquiera de un plano perpendicular a uno de los planos de proyección, hemos visto en el parágrafo prece-

dente cómo se obtiene su rebatimiento sobre el plano π_1 o sobre el plano π_2.

El problema inverso, que ahora consideraremos, consiste en encontrar las proyecciones de una figura de un plano perpendicular a

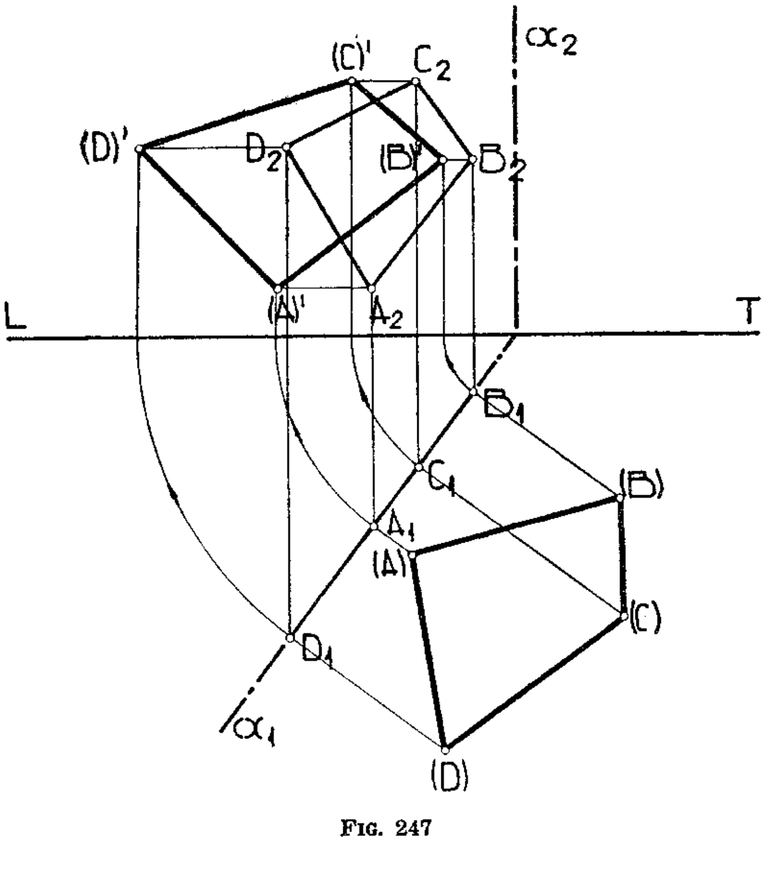


FIG. 247

uno de los de proyección cuando se conoce el rebatimiento de la figura sobre el plano π_1 o sobre el π_2.

2. — Supongamos que se ha rebatido un plano vertical α sobre el plano horizontal. Sea (P) un punto cualquiera de α (fig. 249). Queremos volver a encontrar la posición inicial del punto P.

Basta volver a ejecutar las mismas construcciones indicadas en a α_1 da P_1; luego, la perpendicular por P_1 a LT permite fijar P_2 a una distancia $\overline{P_oP_2}$ de LT, igual a $\overline{P_1(P)}$.
1 del § 50, pero en orden inverso; es decir, por (P) la perpendicular

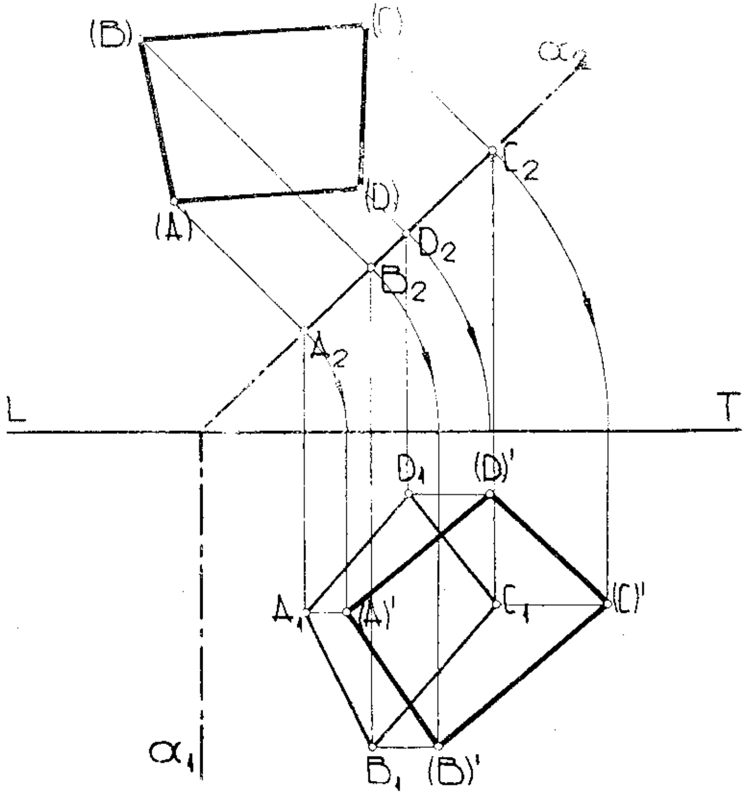


Fig. 248

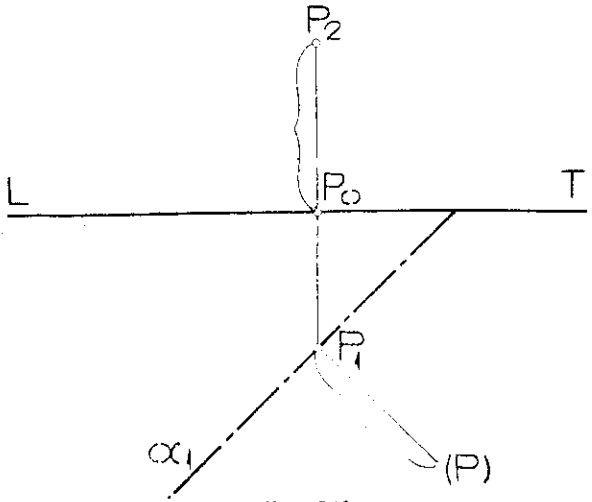


Fig. 249

3. — Como aplicación consideremos el problema siguiente: dado un plano perpendicular al plano vertical, construir las proyecciones de una circunferencia contenida en ese plano conociendo el centro y el radio.

Sean (fig. 250) (α_1, α_2) el plano, r el radio y (O_1, O_2) el centro.

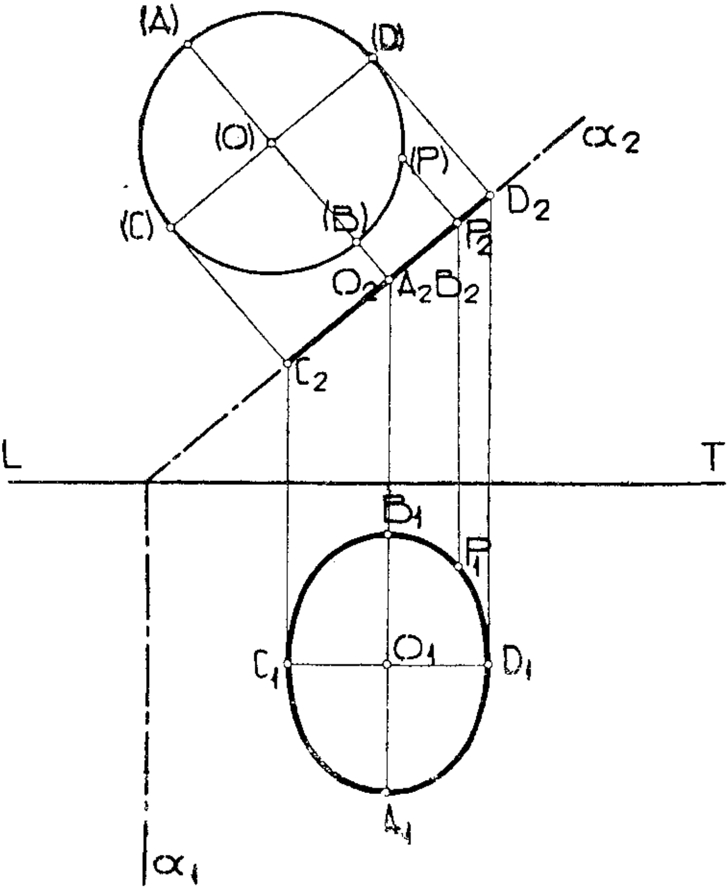


Fig. 250

Recordemos antes que la proyección de una circunferencia sobre un plano es una elipse cuyo eje mayor es la proyección del diámetro de la circunferencia paralelo al plano de proyección y cuyo eje menor es la proyección del diámetro perpendicular al primero.

Consideremos entonces como rebatido sobre π_2 el plano dado α. El centro O estará en (O) y la circunferencia de radio r aparecerá en verdadera magnitud.

Hagamos ahora el relevamiento.

La proyección vertical de la circunferencia es el segmento C_2D_2 de la traza α_2, igual al diámetro de la circunferencia.

El diámetro $\overline{(A)(B)}$ se proyecta horizontalmente en $\overline{A_1B_1}$, en tamaño real. Da el eje mayor de la elipse.

El diámetro $\overline{(C)(D)}$, perpendicular al anterior, da el eje menor $\overline{C_1D_1}$ de la elipse.

Un punto cualquiera (P) de la circunferencia rebatida tiene sus proyecciones en P_1 y P_2.

§ 52. APLICACIONES

1. — Encontrar la verdadera magnitud de un segmento de recta dado por las proyecciones de sus extremos (fig. 251).

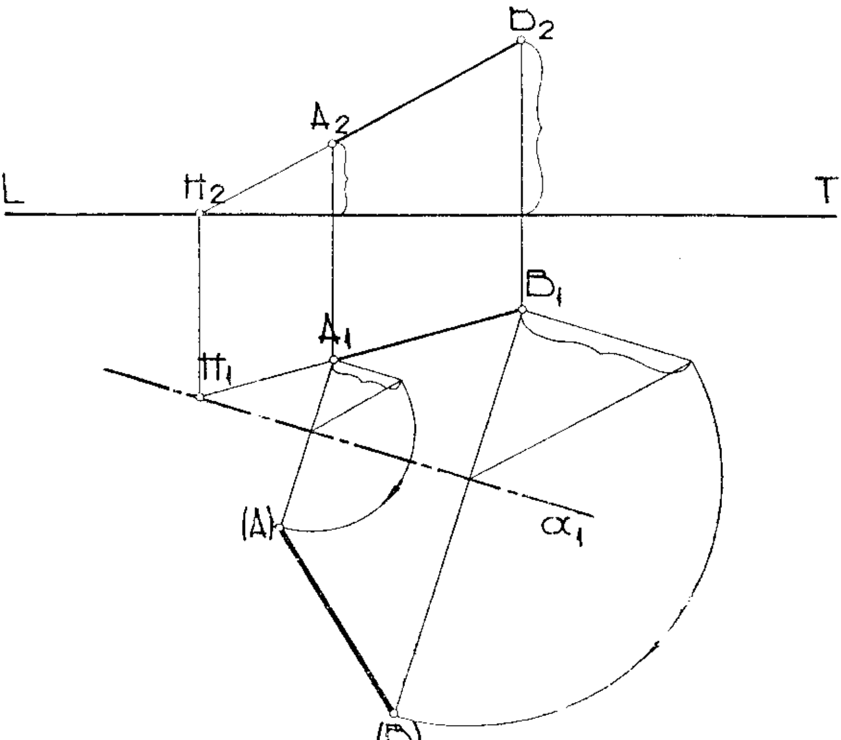


FIG. 251

Hallada la traza horizontal (H_1, H_2) de la recta que contiene el segmento se hace pasar por ella la traza horizontal α_1 de un plano cualquiera que contiene al segmento. Hecho el rebatimiento sobre el plano horizontal se obtiene $\overline{(A)(B)}$, verdadera magnitud del segmento considerado.

2. — Tratándose de un segmento aislado puede hallarse su verdadera magnitud mediante un procedimiento más simple. Consiste en rebatir el segmento haciéndolo girar alrededor de una de las trazas de uno de sus planos proyectantes.

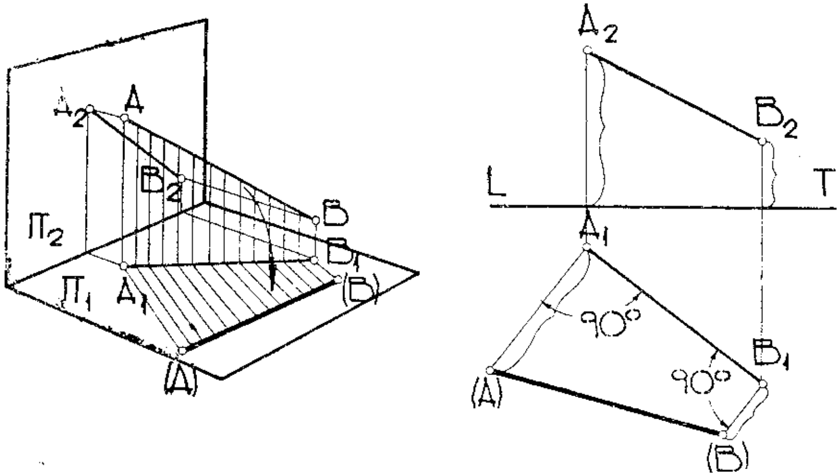


FIG. 252

Si entonces se rebate sobre el plano horizontal (fig. 252), basta construir sobre $\overline{A_1 B_1}$ el trapecio $A_1 B_1\ (B)(A)$.

Si se rebate sobre el plano vertical, basta construir, en cambio, sobre $\overline{A_2 B_2}$ (fig. 253) el trapecio $A_2 B_2\ (B)(A)$.

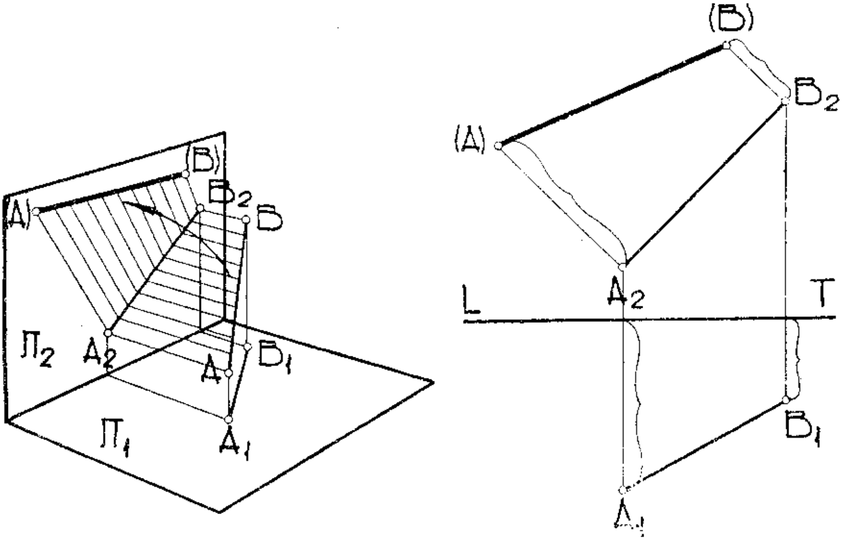


FIG. 253

3. — Rebatir un triángulo dado por sus proyecciones (fig. 254).

Sea ($A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$) el triángulo. Se determina la traza α_1 del plano que lo contiene, para lo cual basta unir las trazas horizontales de dos lados del triángulo. Los tres vértices pueden ser rebatidos entonces sucesivamente empleando el método general indicado en 1, es decir, construyendo para cada uno el conocido triángulo rectángulo. En la figura procedimos así solamente para el vértice C. Para el

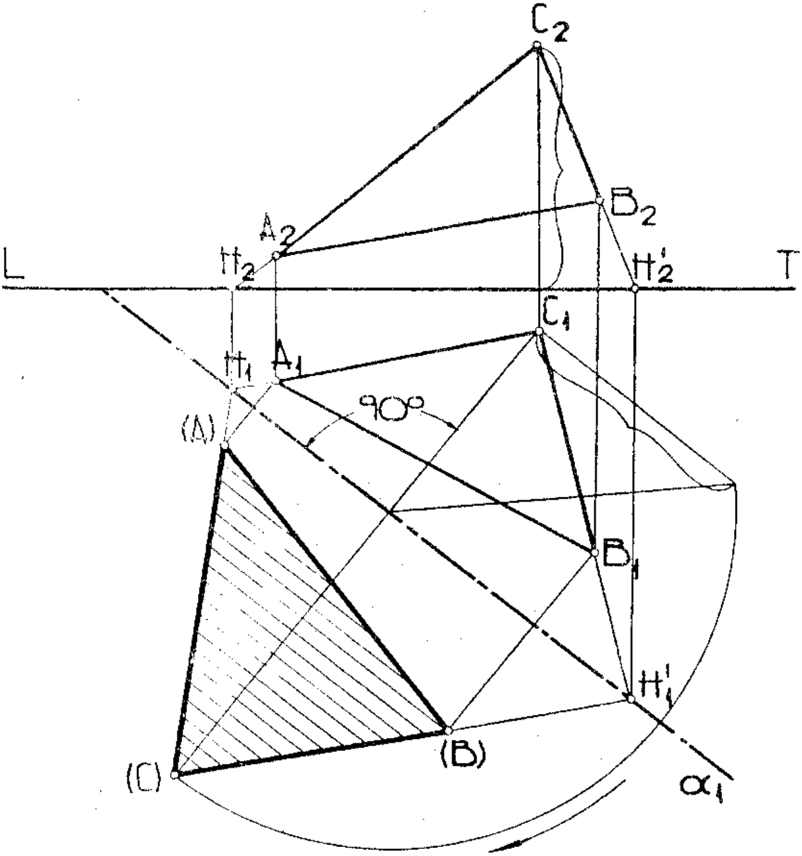


FIG. 254

punto A hemos pensado, como ya lo hiciéramos en 3, § 48, que, como la traza H_1 no se mueve durante la rotación alrededor de α_1, el rebatimiento de la recta AC se obtendrá uniendo H_1 con (C), y como el punto A debe situarse sobre la perpendicular trazada por A_1 a la traza α_1, la intersección (A) de esta perpendicular y de la recta $H_1(C)$ da el rebatimiento de A. En forma análoga se ha procedido para el punto B.

4. — Rebatido un plano cualquiera, hallar la posición de una figura contenida en él.

Sean (α_1, α_2) el plano y el cuadrilátero $(A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2)$ la figura. Queremos rebatir sobre el plano horizontal, por ejemplo. El eje de rotación será la traza α_1 (fig. 255). El rebatimiento de la figura *ABCD* puede ser obtenido, naturalmente, empleando el método general, o bien como en el ejercicio anterior. En la figura el punto (A) fué hallado considerando la horizontal (V_1A_1, V_2A_2) del plano α.

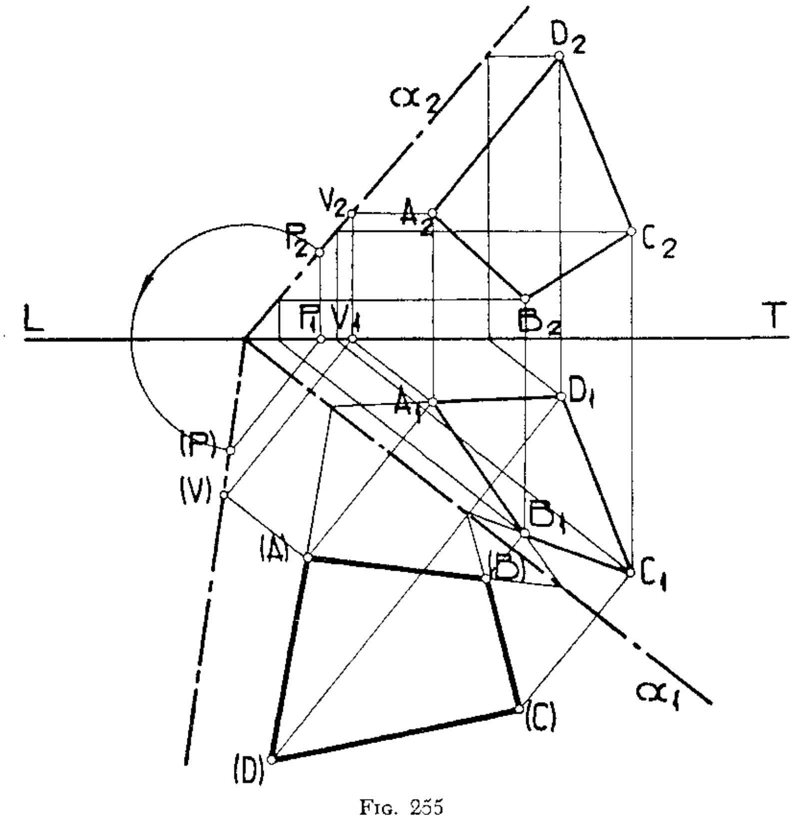


Fig. 255

Esta recta se sitúa, una vez hecho el rebatimiento, según la paralela por (V) a la traza α_1. Su intersección con la perpendicular por A_1 al eje de rotación fija el rebatimiento (A) del vértice A. En igual forma podría procederse para los demás vértices. No lo hicimos así en la figura. Hemos utilizado el método seguido en el ejercicio anterior. Así, para el punto D hemos unido la traza horizontal de la recta AD con (A), y entonces la perpendicular por D_1 al eje α_1 determinó (D).

La figura $(A)(B)(C)(D)$ da la verdadera magnitud del cuadrilátero considerado.

5. — Hallar la verdadera magnitud de la sección producida en un prisma recto por un plano cualquiera (fig. 256).

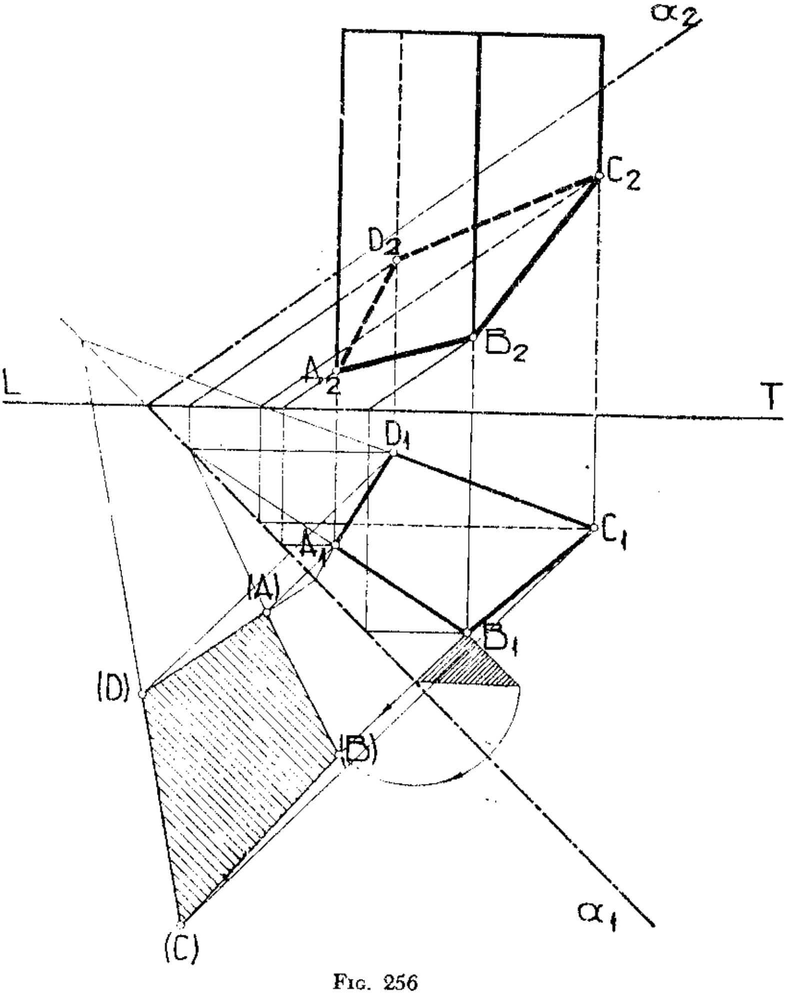


Fig. 256

Se determinan primero las proyecciones de la sección. La horizontal $A_1B_1C_1D_1$ coincide evidentemente con la proyección horizontal del prisma. La proyección vertical se obtiene aplicando el procedimiento indicado en 12, § 30. Se hace después el rebatimiento.

6. — Hallar la verdadera magnitud de cada una de las faldas del techo cuya planta y elevación se dan en la figura 257.

Rebatiremos cada falda sobre el plano horizontal $BCEF$. El rebatimiento de la falda ABC se obtiene haciéndola girar alrededor de B_1C_1. Como la altura $\overline{MA}$ del triángulo ABC aparece según su verdadera magnitud en $\overline{M_2A_2}$, basta llevar este segmento en $\overline{M_1(A)}$.

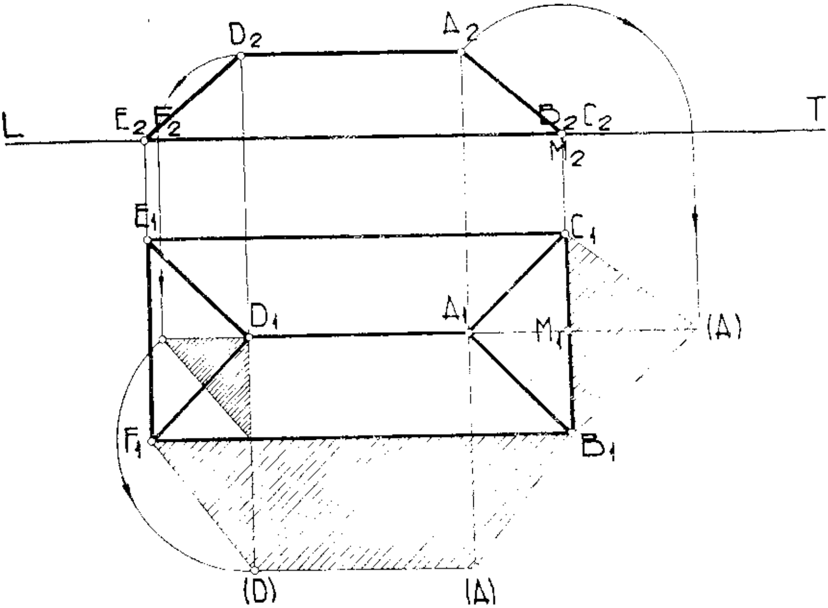


Fig. 257

Para la falda $BADF$ se ha hecho el rebatimiento del punto D utilizando como eje de rotación F_1B_1.

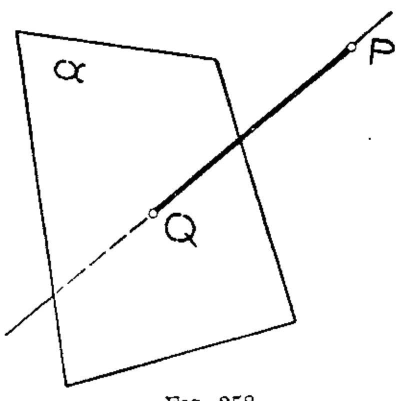


Fig. 258

7. — Hallar la distancia de un punto a un plano.

Sea un plano α y un punto P situado fuera de él (fig. 258).

Si desde P conducimos la perpendicular al plano y Q es el pie de esta perpendicular, $\overline{QP}$ será la distancia del punto al plano.

Supongamos entonces un plano dado por dos rectas paralelas a y b (fig. 259) y un punto exterior P. Empleando el procedimiento indicado en 2, § 35, tracemos desde P la perpendicular p al plano y determinemos su pie Q.

El segmento $\overline{QP} \equiv (\overline{Q_1P_1},\ \overline{Q_2P_2})$ es la distancia pedida. Para

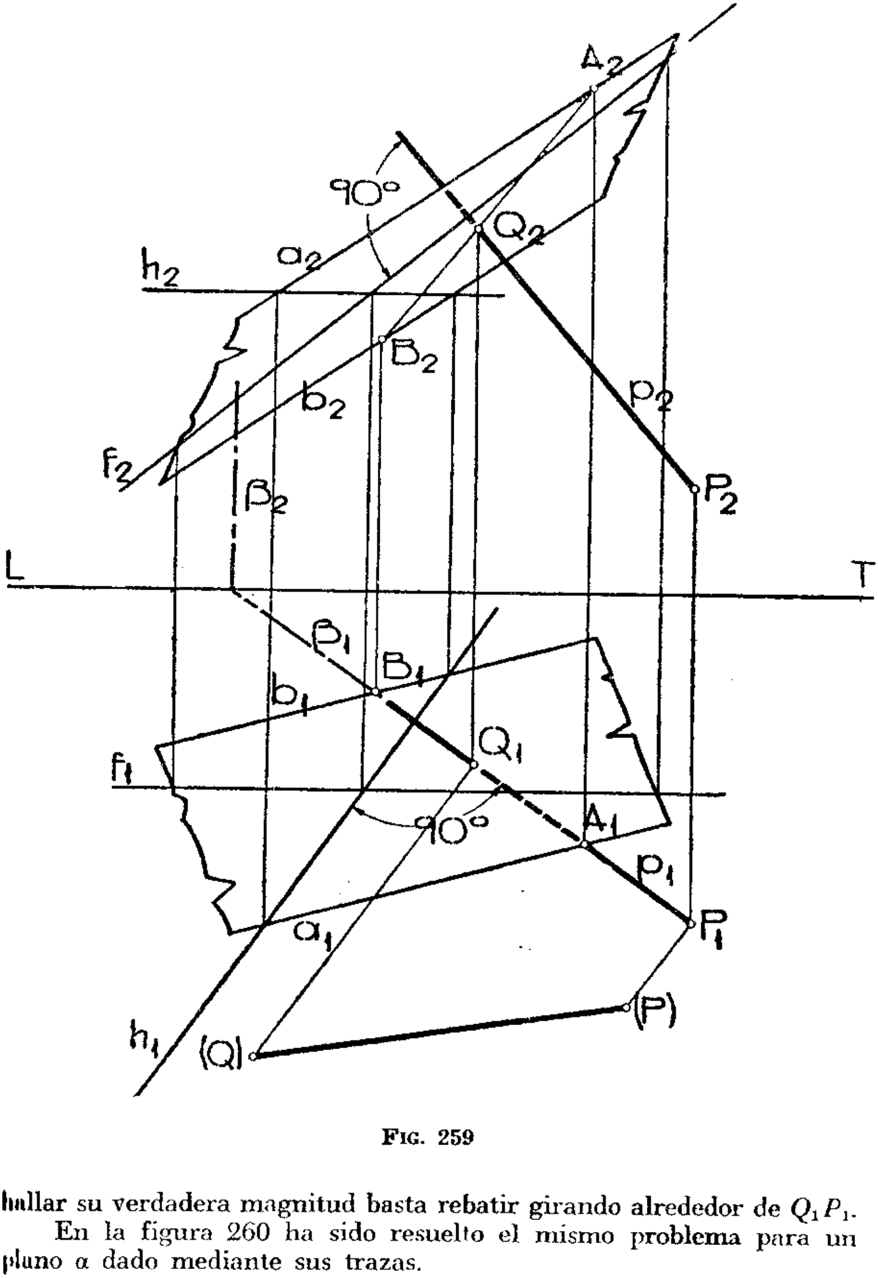


FIG. 259

hallar su verdadera magnitud basta rebatir girando alrededor de $Q_1 P_1$.

En la figura 260 ha sido resuelto el mismo problema para un plano α dado mediante sus trazas.

8. — Hallar la verdadera magnitud del ángulo formado por dos rectas.

Se rebate el plano del ángulo alrededor de una de sus trazas, la horizontal, por ejemplo. En las figuras 261 y 262 se dan las soluciones espacial y descriptiva.

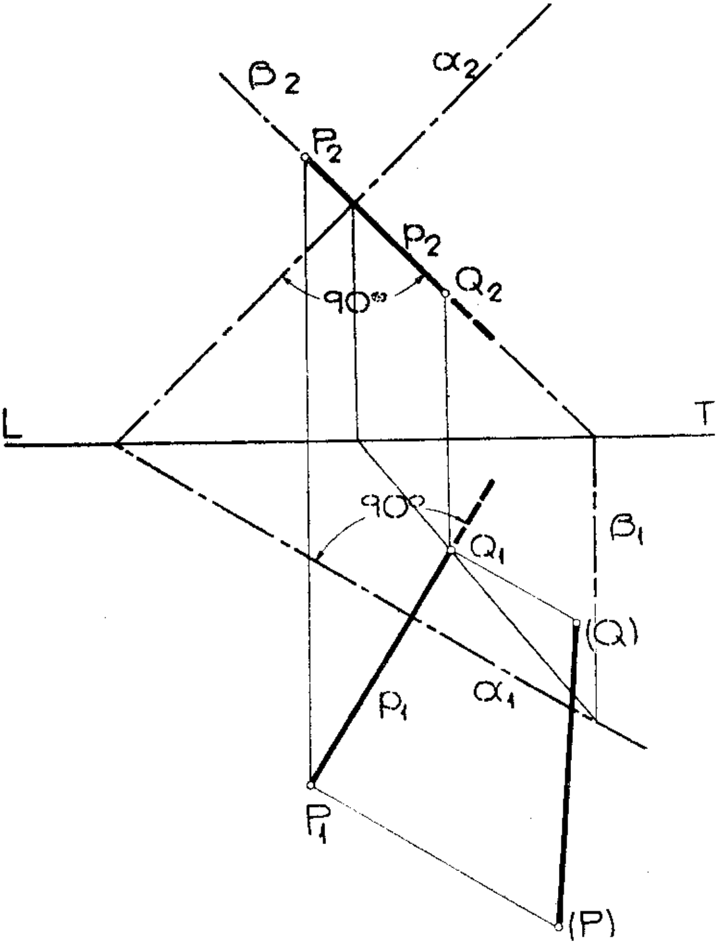


Fig. 260

Las rectas dadas son $r \equiv (r_1, r_2)$ y $s \equiv (s_1, s_2)$; sus trazas horizontales son (R_1, R_2) y (S_1, S_2). Al rebatir alrededor de la traza t_1 los puntos R_1 y S_1 no se mueven; el punto (O_1, O_2) es rebatido empleando el método general. El ángulo $R_1(O)S_1$ es el ángulo pedido

9. — Hallar la verdadera magnitud del ángulo formado por dos planos cualesquiera.

Se sabe que si se corta un diedro mediante un plano perpendicu

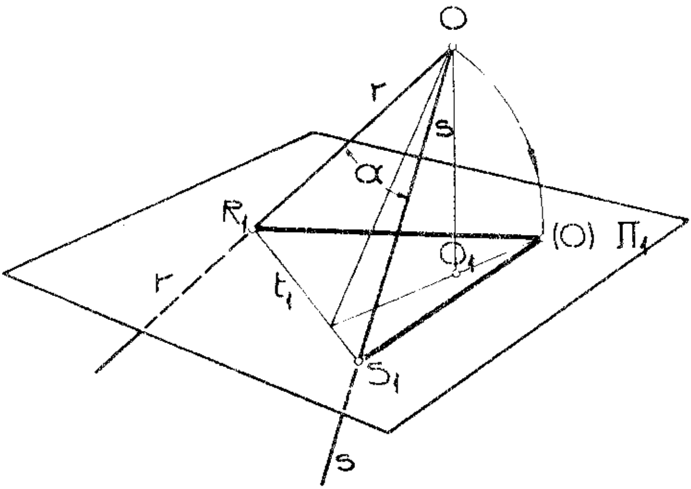


FIG. 261

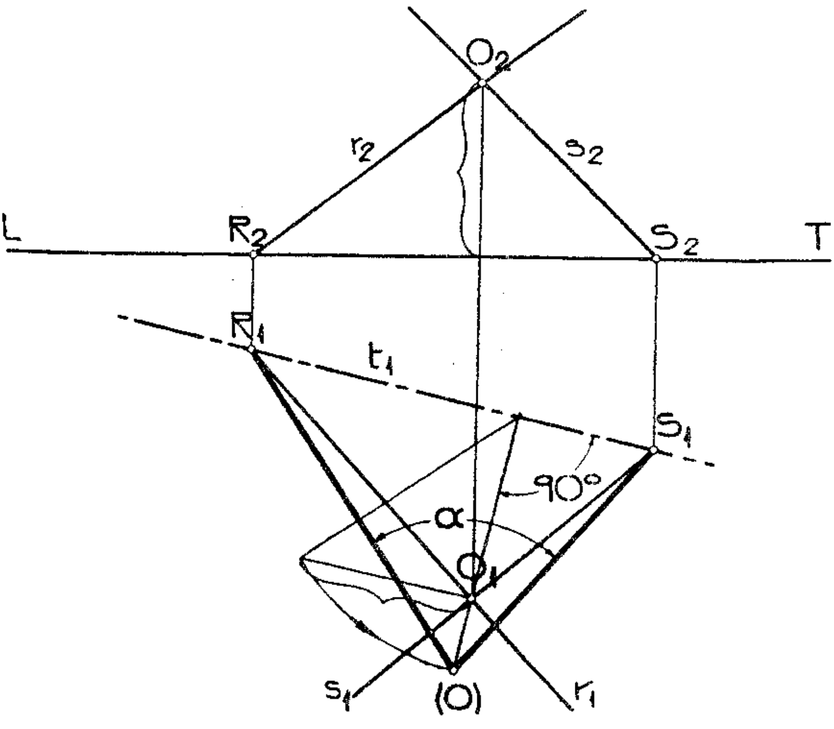


FIG. 262

lar a la arista, se obtiene un ángulo plano (sección normal), cuya medida es la medida del diedro. Se sabe también que los lados del ángulo son perpendiculares a la arista del diedro.

Sean entonces α y β los planos dados y MN su intersección (fig. 263). Cortemos el diedro formado, mediante el plano γ, perpendicular a MN.

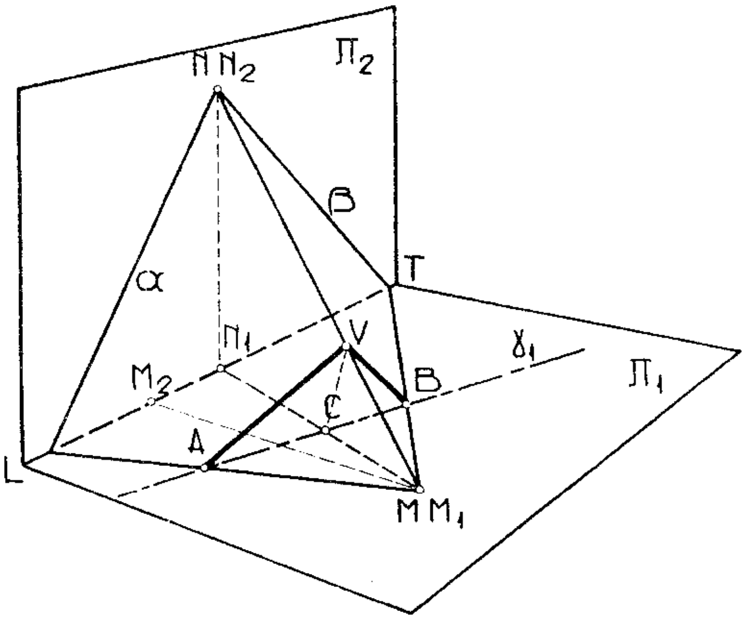


FIG. 263

La traza horizontal γ_1 del plano sector es perpendicular a la **proyección horizontal** M_1N_1 **de** MN (2 del § 35), y las intersecciones VA y VB de γ con α y β forman el ángulo pedido. Por otra parte, el segmento $\overline{CV}$ es perpendicular a la recta MN y también a la base $\overline{AB}$ del triángulo AVB. En efecto, como MN es perpendicular al plano del triángulo AVB, lo es a CV, y como AB es perpendicular a MN_1, lo es al plano proyectante NN_1M y, en consecuencia, a CV. El segmento CV resulta, de acuerdo con el último resultado, altura del triángulo AVB.

Veamos ahora cómo se procede en la figura descriptiva para hallar el ángulo pedido.

Los planos dados son (fig. 264): (α_1, α_2) y (β_1, β_2).

La proyección horizontal de la intersección, única utilizada, es M_1N_1. La traza horizontal del plano perpendicular a esta recta es γ_1 perpendicular a M_1N_1. Los vértices en la base del triángulo AVB son

A_1 y B_1. Desconocemos el tercer vértice, al que llamaremos **(V)**. Rebatido el triángulo $N_2N_1M_1$ del espacio resulta el triángulo $(N)N_1M_1$, y entonces la posición del segmento $\overline{CV}$ de la figura espacial será $\overline{C_1(V)}'$ perpendicular a $(N)M_1$. Se tiene así la verdadera magnitud de la altura del triángulo AVB, cuyo rebatimiento sobre el plano

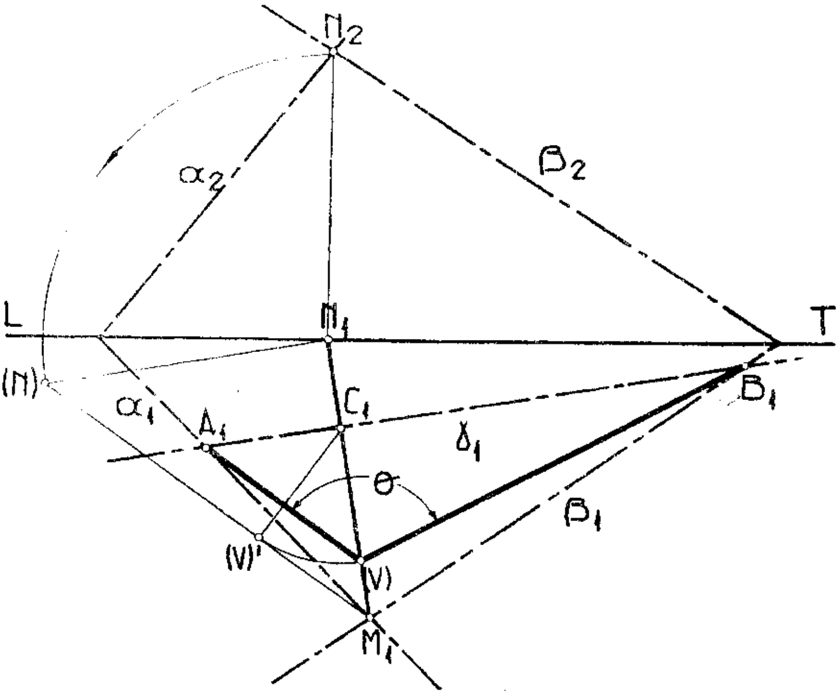


FIG. 264

horizontal, girando alrededor de γ_1, es ahora posible. Basta llevar el segmento $\overline{C_1(V)}'$ en $\overline{C_1(V)}$. El ángulo θ da entonces la verdadera magnitud del ángulo que forman los planos α y β.

10. — Hallar el ángulo que forman dos faldas de un techo (fig. 265).

Las faldas consideradas son QMN y PMN. Su intersección es el segmento $\overline{MN}$. Tracemos la recta γ_1 perpendicular a M_1N_1. Rebatido N en (N) se obtiene en $\overline{M_1(N)}$ la verdadera magnitud de la intersección $\overline{MN}$ de los dos planos. Tracemos ahora desde C_1 la perpendicular a $M_1(N)$ y marquemos $\overline{C_1(V)} = \overline{C_1(V)}'$. El ángulo buscado es $A_1(V)B_1$.

11. — En la aplicación anterior el ángulo considerado es saliente (lima tesa). Determinaremos ahora la verdadera magnitud del ángulo entrante (lima hoya) que forman dos faldas de un techo (figs. 266 y 267).

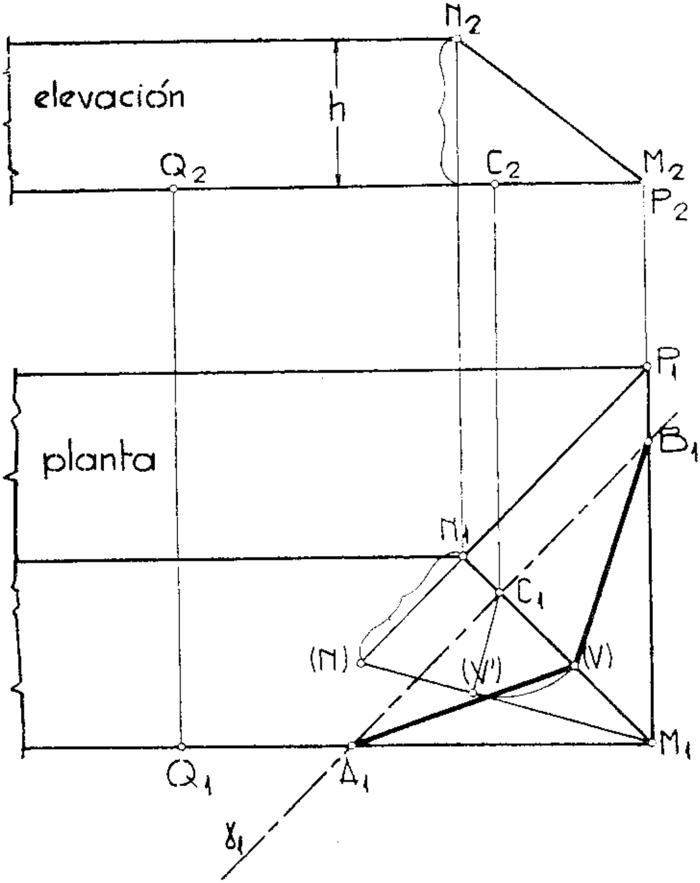


FIG. 265

El procedimiento empleado es igual al del caso anterior, con la única diferencia de considerar el plano horizontal de las cumbreras

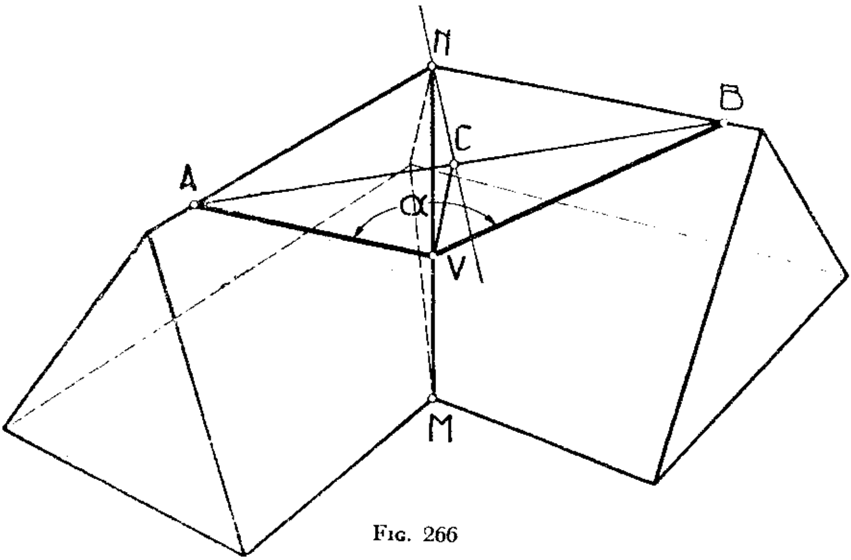


Fig. 266

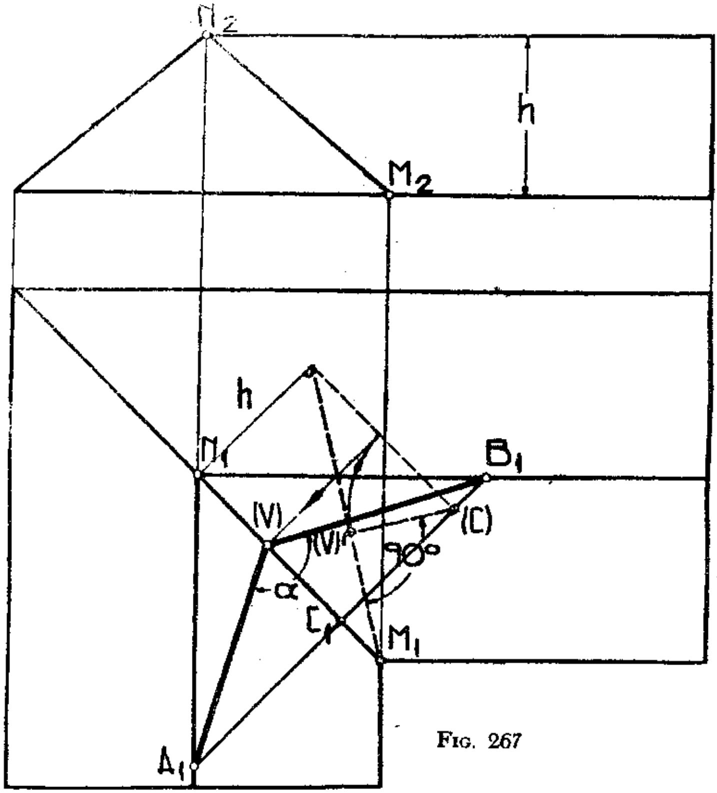
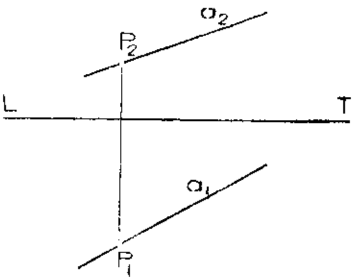


Fig. 267

EJERCICIOS



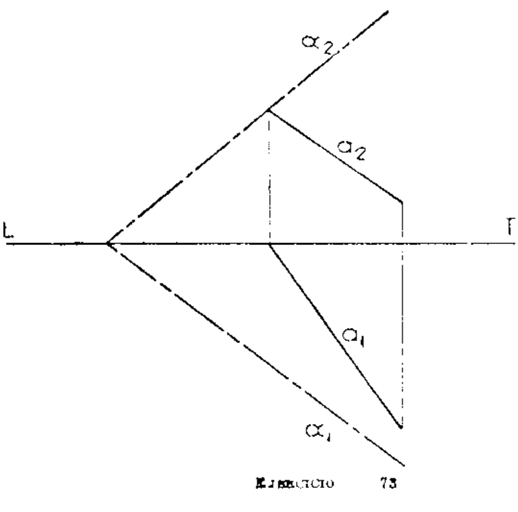
EJERCICIO 70

70. A partir del punto P, llevar sobre la recta $a \equiv (a_1 , a_2)$ un segmento de 2 cm

71. Hallar la distancia entre dos rectas paralelas.

72. Encontrar el rebatimiento sobre el plano vertical de un polígono situado en un plano dado.

73. Representar un cuadrado de 3 cm de lado, situado en el plano $\alpha \equiv (\alpha_1 , \alpha_2)$, sabiendo que tiene dos de sus vértices sobre la recta $a \equiv (a_1 , a_2)$ del plano.

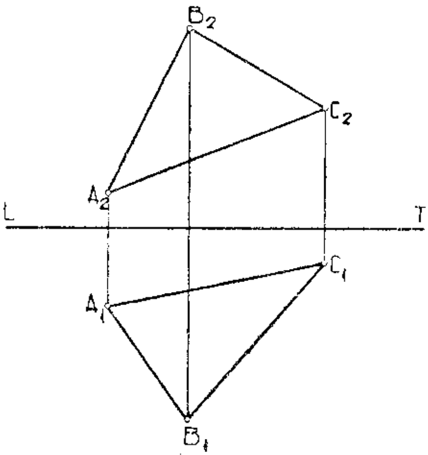


EJERCICIO 73

74. Dada una recta $r \equiv (r_1 , r_2)$ trazarle una paralela a 3 cm de distancia.

75. Rebatir sobre el plano horizontal una frontal de un plano dado.

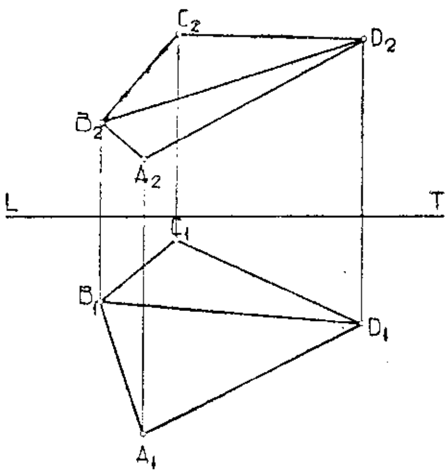
76. Encontrar las proyecciones de la circunferencia inscripta en el triángulo indicado en la figura.



Ejercicio 76

77. Determinar el ángulo que forman dos rectas concurrentes.

78. Determinar el ángulo que forman los planos *ABD* y *ACD*.



Ejercicio 78

79. Hallar la distancia entre dos planos paralelos.

80. A una distancia dada *d* conducir un plano paralelo a un plano dado.

Capítulo X

POLIEDROS

§ 53. DEFINICIONES

1. — Recordemos algunas nociones de *Geometría Elemental.* Se dice que dos polígonos son *consecutivos* cuando tienen un lado común y no pertenecen a un mismo plano.

Llámase *superficie poliédrica* aquella que está formada por varios polígonos consecutivos. Estos son las *caras* de la superficie.

Los vértices y los lados de las caras se denominan *vértices* y *aristas* de la superficie poliédrica. Los diedros comprendidos entre los planos de dos caras consecutivas son los *diedros* de la superficie poliédrica.

Una superficie poliédrica se dice *convexa* si, con respecto al plano de cada una de sus caras, ella yace toda de un mismo lado. En caso contrario es *cóncava*. En los cursos de *Geometría Elemental* se estudian solamente las superficies poliédricas convexas.

Si en una superficie poliédrica existe alguna arista que no sea común a dos caras, la superficie es llamada *abierta*; en caso contrario es *cerrada*.

Una superficie poliédrica cerrada divide el espacio en dos partes: una limitada, *encerrada* por la superficie; la otra ilimitada.

Se da el nombre de *poliedro* a la parte del espacio *encerrada* por una superficie poliédrica (cerrada).

Un poliedro se dice *tetraedro, pentaedro, exaedro*, . . ., según que el número de sus caras sea 4, 5, 6, . . .

Indicando con c, v y a, respectivamente, los números de caras, vértices y aristas de un poliedro, se demuestra (teorema de Euler) que

$$c + v = a + 2.$$

La superficie de un poliedro puede recortarse a lo largo de varias aristas, de modo que al extenderlo sobre un plano no se superpongan dos porciones de dicha superficie.

Una recta encuentra la superficie de un poliedro convexo, a lo más, en dos puntos.

2. — Entre los poliedros, se estudian en la *Geometría Elemental* el *prisma*, la *pirámide* y los *poliedros regulares*.

El prisma es un diedro que tiene dos caras iguales y paralelas llamadas *bases*; las otras caras (caras laterales) son paralelogramos. Las bases son polígonos cualesquiera.

La distancia entre los planos de las bases se denomina *altura* del prisma.

Un prisma es *recto* si las caras laterales son perpendiculares a las bases; en caso contrario es *oblicuo* (fig. 268).

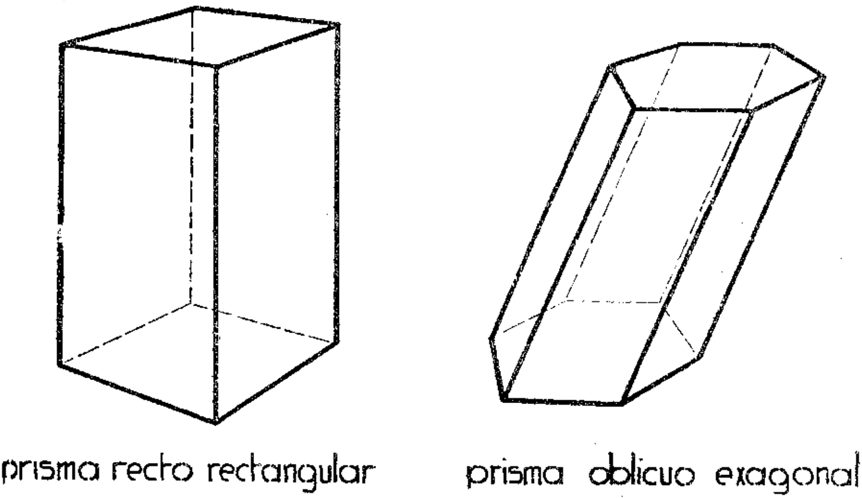


Fig. 268

En el prisma recto las caras laterales son rectángulos y la altura es igual a una cualquiera de las aristas laterales.

Un prisma es *triangular* si sus bases son triángulos; *cuadrangular* si las bases son cuadrángulos, etc.

El *paralelepípedo* es un prisma cuyas bases (y caras paralelas) son paralelogramos. El cubo es un caso particular del paralelepípedo.

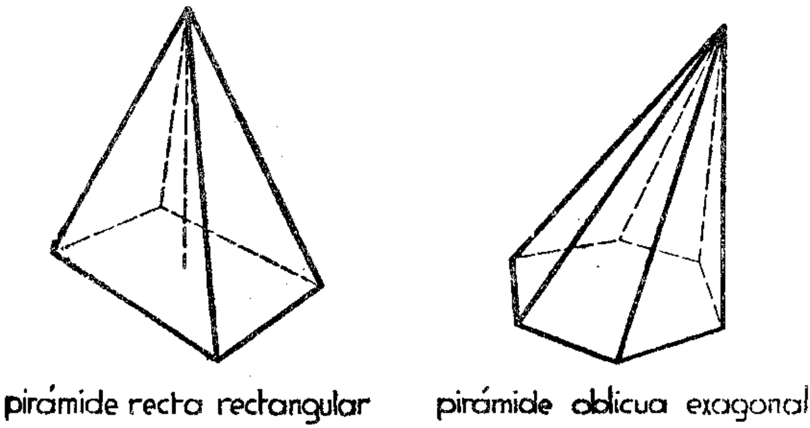


Fig. 269

3. — La *pirámide* es el poliedro que tiene como una de sus caras un polígono cualquiera llamado *base*; las otras caras son triángulos que tienen un vértice común llamado *vértice* de la pirámide (fig. 269).

La distancia del vértice al plano de la base es la *altura* de la pirámide.

Una pirámide es *recta* (e impropiamente regular) cuando la base es un polígono regular y el vértice se encuentra sobre la normal a la base por su centro.

4. — Los poliedros regulares son sólidos en los cuales las caras son polígonos regulares iguales y todos los ángulos diedros son también iguales.

De la misma definición resulta que los poliedros regulares no pueden ser muchos. En total son cinco (fig. 270).

El nombre de cada uno deriva del número de caras que posee:

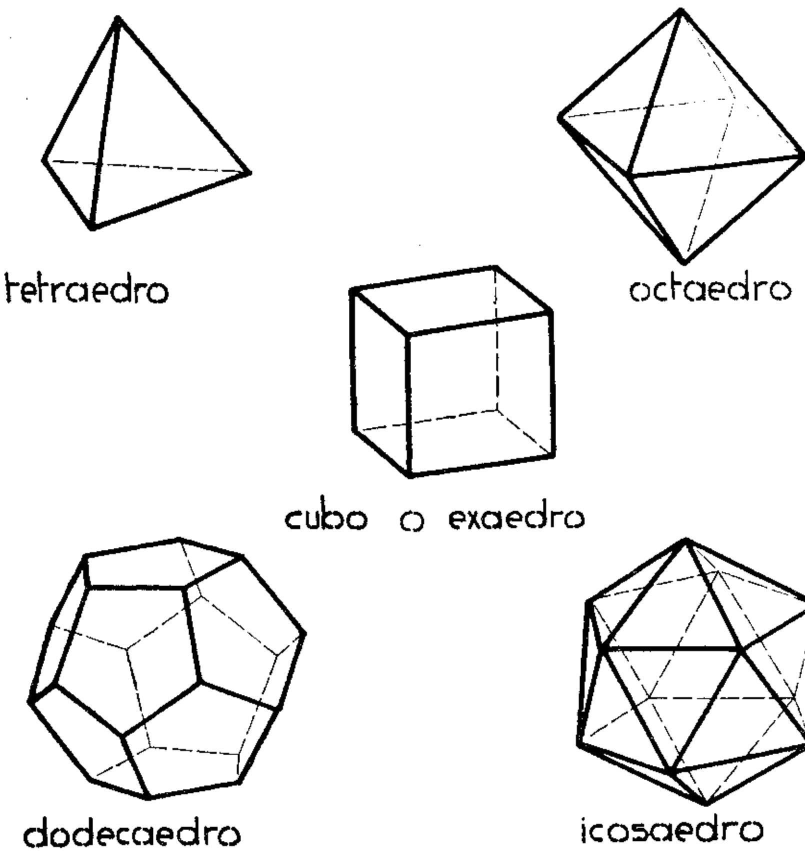


FIG. 270

el *tetraedro* tiene cuatro caras, cada una es un triángulo equilátero; el *cubo* o exaedro tiene seis caras cuadradas; el *octaedro* tiene como caras ocho triángulos equiláteros; el *dodecaedro* tiene como caras doce pentágonos; el *icosaedro* tiene como caras veinte triángulos equiláteros.

Exceptuado el cubo, los otros poliedros regulares son de escasa importancia práctica para el técnico mecánico y constructor. Tienen, en cambio, singular importancia en el estudio de la cristalografía.

§ 54. REPRESENTACION DE POLIEDROS

1. — La representación de un poliedro cualquiera se obtiene construyendo las proyecciones de sus distintos vértices y aristas.

Tratándose de poliedros convexos es claro que, imaginado un observador en el primer diedro y a una distancia infinita del plano π_1, mirando en la dirección de las proyectantes normales a π_1, verá que algunas aristas del poliedro dividen la parte visible de éste de la invisible, formando un polígono plano o alabeado que constituye el contorno aparente con respecto a π_1 del poliedro dado. La proyección sobre π_1 de este polígono es el *contorno aparente del poliedro sobre el plano horizontal*. El envuelve toda la proyección horizontal del poliedro (fig. 271).

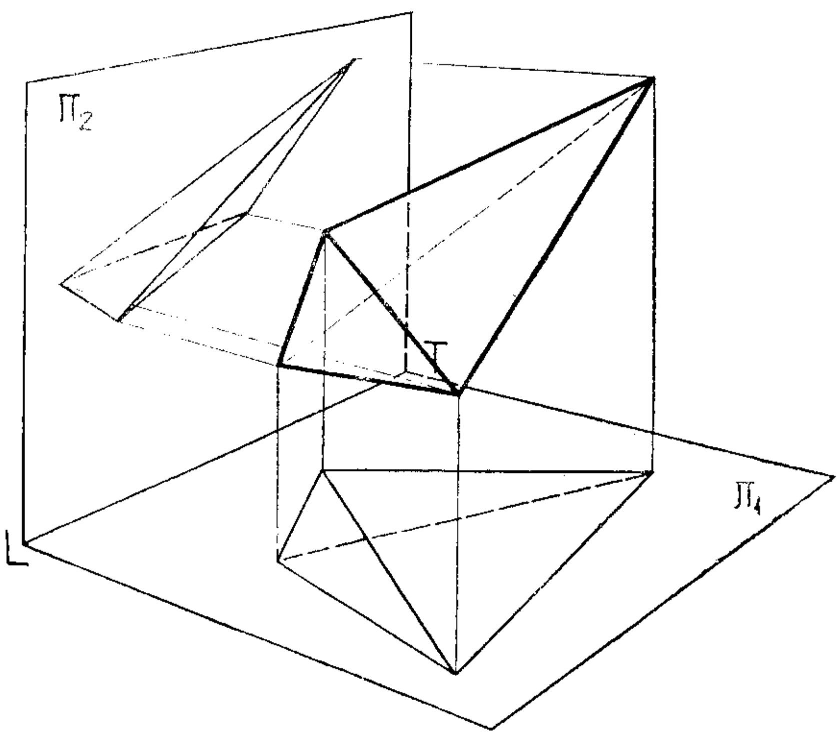


Fig. 271

Del mismo modo, imaginado el observador delante del plano α, y a una distancia infinita, mirando en la dirección de las proyectantes normales a π_2, verá también como límite del poliedro un cierto polígono plano o alabeado, contorno aparente con respecto a π_2, cuya proyección sobre π_2 es el *contorno aparente, sobre el plano vertical, del poliedro dado.*

2. — Para distinguir en la representación las aristas visibles de las invisibles tendremos en cuenta las reglas siguientes:

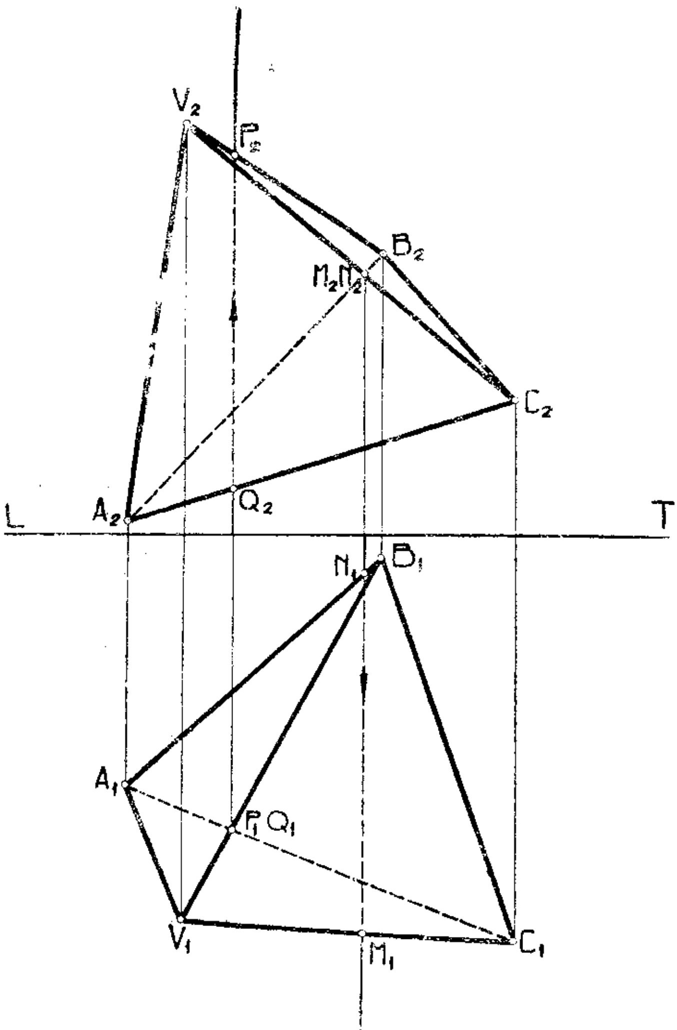


Fig. 272

a) *Sobre cada plano de proyección el contorno aparente es enteramente visible y no se puede pasar de un punto visible a otro invisible sin pasar por el contorno aparente.*

b) *Las aristas que concurren a un mismo vértice interno al contorno aparente son todas visibles o todas invisibles.*

c) *Si dos aristas se cruzan en el interior del contorno aparente sobre uno de los planos de proyección sin que se corten en el espacio, una es visible, otra invisible.*

En efecto, la recta proyectante del punto de intersección corta la superficie del poliedro en dos puntos pertenecientes a las dos aristas consideradas, y uno solo de ellos es visible: el de mayor cota si se trata de proyecciones horizontales, el de mayor alejamiento si se trata de proyecciones verticales. Es éste el criterio ya aplicado en 2 de § 31 y 2 de § 32.

3. — La figura 272 da la representación de un tetraedro. El contorno aparente sobre el plano horizontal es $A_1B_1C_1V_1$; sobre el plano vertical es $A_2V_2B_2C_2$.

De las dos aristas cuyas proyecciones $\overline{V_1B_1}$ y $\overline{A_1C_1}$ se cortan dentro del contorno aparente sobre el plano horizontal, una será visible, otra invisible. Y como la proyectante que determina P_1 encuentra primero $\overline{A_2C_2}$ y después $\overline{V_2B_2}$, la proyección A_1C_1 será invisible y la $\overline{V_1B_1}$ visible.

En forma análoga, de las dos aristas $\overline{AB}$ y $\overline{VC}$, cuyas proyecciones verticales se encuentran dentro del contorno aparente respectivo en M_2, es visible sobre el plano π_2 la proyección $\overline{V_2C_2}$ e invisible la $\overline{A_2B_2}$.

§ 55. SECCIONES PLANAS DE SOLIDOS

1. — Imaginemos un sólido cualquiera. Colocado sobre el plano horizontal (fig. 273), cortémoslo con una sierra mantenida constante-

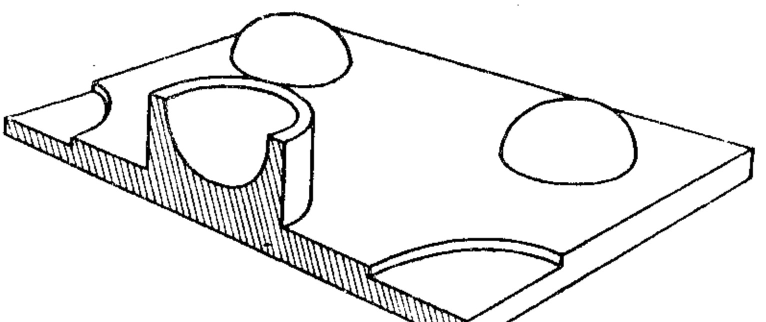


Fig. 273

mente en su plano; el corte hecho constituye una *sección plana* del sólido.

El plano que pasa por el corte, plano de la sierra, es el plano secante que determina la sección.

La línea mixta del corte puede, naturalmente, ser proyectada sobre cada uno de los planos de proyección. En este caso particular su proyección horizontal está sobre la traza del plano secante; la vertical es dada, en cambio, por una línea mixta que limita la sección producida.

2. — En dibujos arquitectónicos, en dibujos de muebles, de elementos de máquinas u otros es necesario recurrir frecuentemente a secciones planas con el objeto de ver ciertos detalles o perfiles o la disposición interna de las partes del cuerpo representado, y que, de otro modo, no serían visibles.

3. — Si el plano secante tiene una posición cualquiera con respecto a los planos de proyección, la sección será, es claro, siempre plana, pero sus proyecciones ya no darán la verdadera magnitud del corte. Para obtenerla será necesario recurrir a cambios de planos de proyección, rotaciones o rebatimientos. De cualquier modo, se comprende que en todos los casos los sólidos a seccionar deben ser colocados, con respecto a los planos de proyección, en posiciones que exijan la menor cantidad posible de construcciones auxiliares. Así, el arquitecto dibujará la fachada de un edificio paralelamente al plano vertical y el mecánico colocará la pieza de una máquina con una de sus caras, o si es posible dos, paralela a los planos de proyección, de modo que resulte fácil la obtención de las medidas reales.

4. — En capítulos anteriores, incidentalmente, hemos representado algunas secciones sencillas de sólidos. Estudiaremos ahora en forma más completa, cuanto concierne a esta importante aplicación de la *Geometría Descriptiva*, prescindiendo, empero, de aquellos casos que no tienen una real importancia práctica para técnicos y dibujantes.

Para construir las proyecciones de la sección producida en un poliedro por un plano α puede pensarse:

1º Que los vértices de la sección son los puntos de intersección de las aristas del poliedro con el plano α.

2º Que los lados de la sección son las intersecciones de las caras del poliedro con el plano α.

Resultan así dos procedimientos que nos vuelven a conducir a los problemas conocidos de intersección de una recta y un plano o intersección de dos planos.

Si α es perpendicular a uno de los planos de proyección, la sección es obtenida, como veremos pronto, con toda facilidad. Si α no es perpendicular a ninguno de los planos de proyección, se puede cambiar uno de éstos de modo que resulte perpendicular al plano α; se opera después como en el caso anterior.

§ 56. INTERSECCION DE UNA RECTA Y UN POLIEDRO

1. — Cuando una recta r atraviesa un poliedro encuentra la superficie poliédrica correspondiente en dos puntos. Para determinarlos se hace pasar por la recta r un plano cualquiera α (fig. 274) y se halla la intersección de α con la superficie poliédrica. Los puntos P y Q, comunes a la intersección hallada y a la recta r, son los puntos pedidos.

Es éste el método general

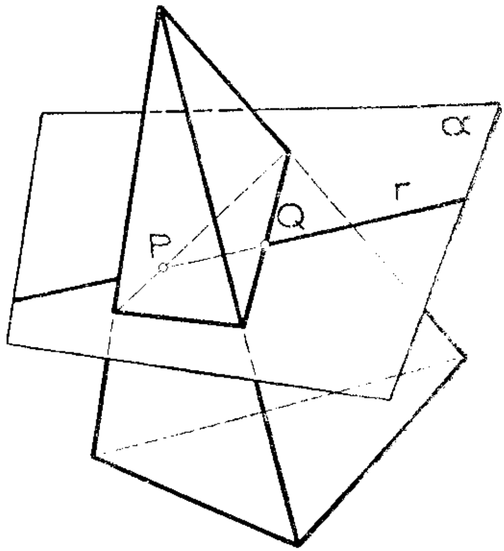


FIG. 274

2. — En los casos prácticos particulares es conveniente elegir el plano α de modo que la sección pueda ser obtenida con facilidad. En general, se elige el plano que proyecta horizontalmente o verticalmente la recta dada (fig. 275). En el caso del prisma se emplea también el plano determinado por r y por la paralela por un punto de r a las aristas del prisma. En el caso de la pirámide úsase a menudo el plano individualizado por la recta r y el vértice del sólido.

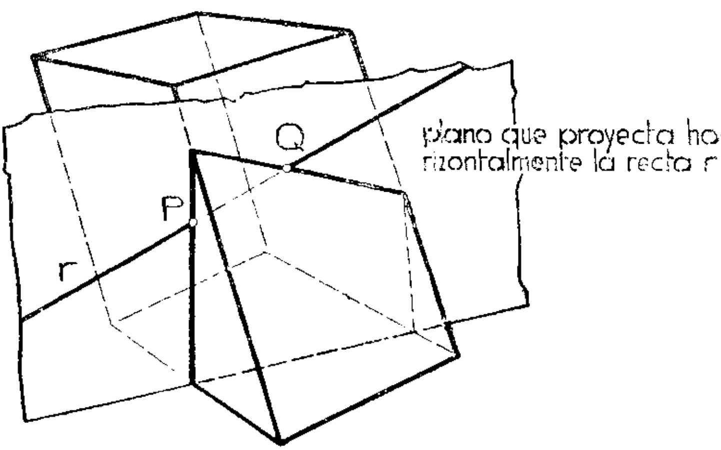


FIG. 275

Capítulo XI

HOMOLOGIA PLANA

§ 57. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

1. — Dados dos segmentos orientados de una misma recta, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, la razón

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = r$$

será positiva o negativa según que C sea interior o exterior al segmento AB (fig. 276).



Fig. 276

Si el punto C recorre toda la recta AB, la razón $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ varía constantemente, pasando por todos los valores comprendidos entre $-\infty$ y $+\infty$.

2. — Si sobre la recta AB (fig. 277) se toma un punto C tal que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = r$$

y otro punto D tal que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = s,$$

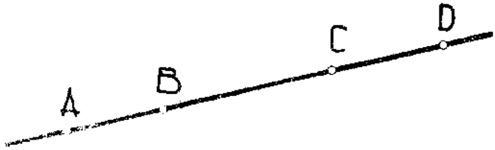


Fig. 277

el cociente de estas dos razones

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = r : s = \rho$$

recibe el nombre de *razón doble* o *anarmónica* de los cuatro puntos A,B,C,D. Se indica así:

$$(A\,B\,C\,D).$$

3. — Sean en un plano un punto fijo O y una recta fija x (figura 278). A cada punto arbitrario A del plano hagamos corresponder

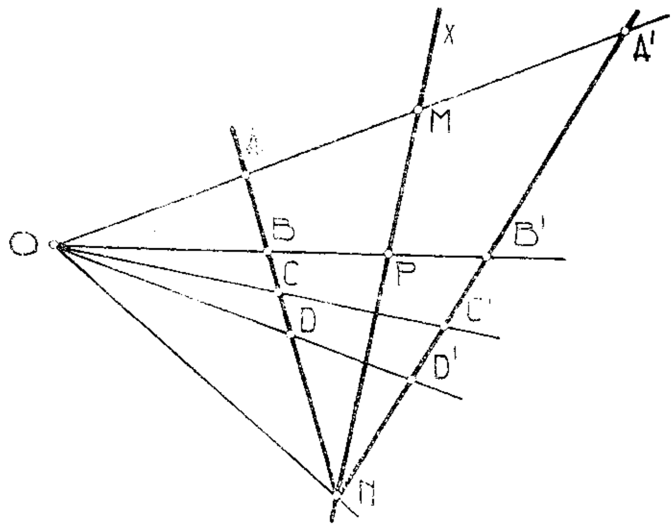


FIG. 278

otro punto A' situado sobre la recta OA, y de tal modo que si M es el punto de intersección de OA con x, la razón anarmónica $(OAMA')$ sea una constante k.

Esta correspondencia entre puntos del plano se llama *homología plana*; el punto O es el *centro de homología* y la recta x es el *eje de homología*; puntos tales como A y A' se llaman *homólogos*.

Cuando el punto A describe una figura (F) el punto A' describe una figura (F'); se dice que (F) y (F') son figuras homológicas.

4. — Sea N un punto cualquiera de x: la recta homóloga de NA es NA'. En efecto, se demuestra que cuando cuatro rayos, tales como NO, NA, NM, NA', que pasan por un punto N, cortan una recta

cualquiera, OA, por ejemplo, en cuatro puntos, O, A, M, A', la razón anarmónica de los cuatro rayos (*) es igual a la de los cuatro puntos.

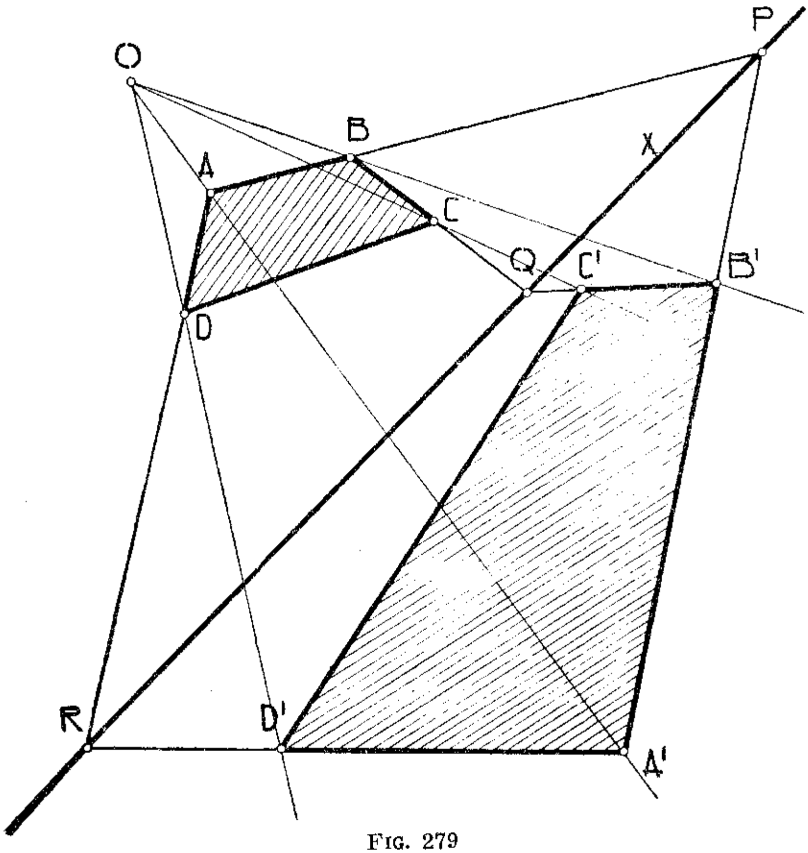


FIG. 279

Entonces, si B' es el punto de intersección de OB con NA', se tendrá

$$(OBPB') = (OAMA'),$$

es decir,

$$(OBPB') = k,$$

y el punto B' será por definición el homólogo de B.

(*) Razón anarmónica de cuatro rayos a, b, c, d que se cortan en un punto O, es el cociente

$$\frac{\operatorname{sen}(\widehat{a,c})}{\operatorname{sen}(\widehat{c,b})} : \frac{\operatorname{sen}(\widehat{a,d})}{\operatorname{sen}(\widehat{d,b})}.$$

Y así para otros puntos: C y C', D y D', etc.

Se ve que si dos figuras son homológicas, se verifica:

1º A cada punto y cada recta de una de ellas corresponden un punto y una recta de la otra.

2º Las rectas que unen pares de puntos homólogos pasan por un mismo punto, que es el centro de homología.

3º Dos rectas (o dos curvas) homólogas se cortan sobre una recta fija, que es el eje de homología.

5. — Resulta entonces que si se conocen (F), O y x y un par de puntos homólogos, como A y A', por ejemplo, es fácil determinar todos los demás elementos de (F'), pues si B es un punto cualquiera de (F), se tendrá su homólogo B' en la intersección de NA' con el rayo de homología OB.

6. — Hallemos, por ejemplo, la figura homológica del cuadrilátero $ABCD$, siendo O el centro de homología, x el eje y A' el homólogo del vértice A (fig. 279).

El homólogo de B debe estar sobre la recta OB. Por otra parte, si P es el punto de encuentro de la recta AB con el eje x, por P debe pasar también la recta que une A' con el punto buscado B'. Este estará entonces en la intersección de OB con $A'P$. Para hallar C' hemos utilizado la homología ya encontrada de los puntos B y B'; trazado el rayo de homología OC, el punto C' es la intersección de este rayo con la recta QB'. Y así los demás. El cuadrilátero $A'B'C'D'$ es la figura homológica de $ABCD$.

§ 58. PROYECCIONES SOBRE UN PLANO DE LOS PUNTOS DE INTERSECCION DE UN HAZ DE RECTAS CON DOS PLANOS CUALESQUIERA

1. — De un haz de rectas que pasan por el punto O (fig. 280) consideremos dos cualesquiera, las rectas a y b, por ejemplo.

Consideremos, además, dos planos secantes, α y β, y un plano de proyección, π_1.

Llamemos (F) el conjunto de puntos determinados al cortar el haz mediante el plano α y (F') el determinado al cortarlo mediante el plano β. Y llamemos (F_1) la proyección de (F) sobre π_1 y (F'_1) la de (F') también sobre π_1.

Las rectas a y b proporcionan dos puntos, A y B, de (F), y dos puntos, A' y B' de (F'). Las proyecciones A_1 y A'_1 de A y A' estarán sobre la proyección a_1 de a; las B_1 y B'_1 de B y B' estarán sobre la proyección b_1 de b.

Las rectas AB y $A'B'$ son coplanares; concurren, pues, a un punto P de la intersección x de los planos α y β, en los cuales están situadas.

La proyección P_1 de P estará entonces en la proyección x_1 de x, y a ese punto P_1 concurren las proyecciones A_1B_1 y $A'_1B'_1$.

Se ve así que dos puntos correspondientes como A_1 y A'_1 o B_1 y B'_1 de las figuras (F_1) y (F'_1), están sobre rectas que concurren a un punto fijo O_1, y dos rectas correspondientes de ambas figuras concurren a un punto de la recta x_1.

Las figuras (F_1) y (F'_1) son, pues, homológicas.

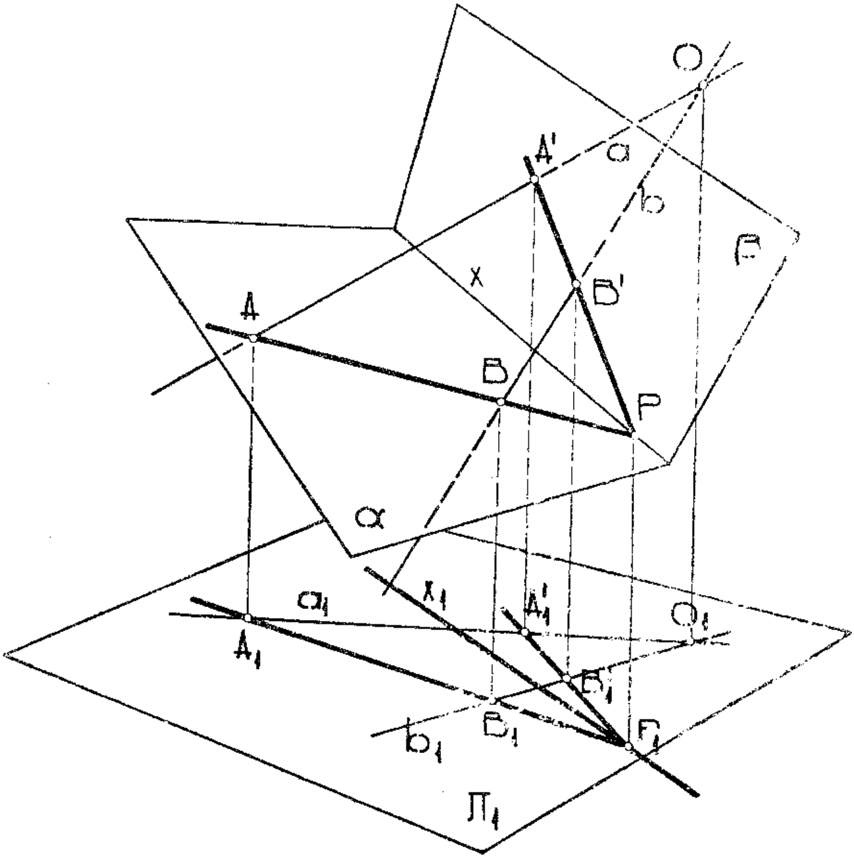


Fig. 280

El centro de homología es la proyección del vértice del haz y el eje de homología es la proyección de la intersección de los dos planos secantes (*).

(*) Para estar dentro de las características de este libro, hemos supuesto ortogonal la proyección sobre el plano π_1. El mismo teorema puede ser demostrado para un centro de proyección situado a distancia finita.

2. Resulta entonces que si consideramos las rectas del haz como aristas de una pirámide, las figuras (F) y (F') se vuelven dos secciones planas de la pirámide.

En consecuencia:

1º *Las proyecciones sobre un plano de dos secciones planas de una pirámide son homológicas.* El centro de homología es la proyección del vértice de la pirámide; el eje de homología es la proyección de la intersección de los dos planos secantes.

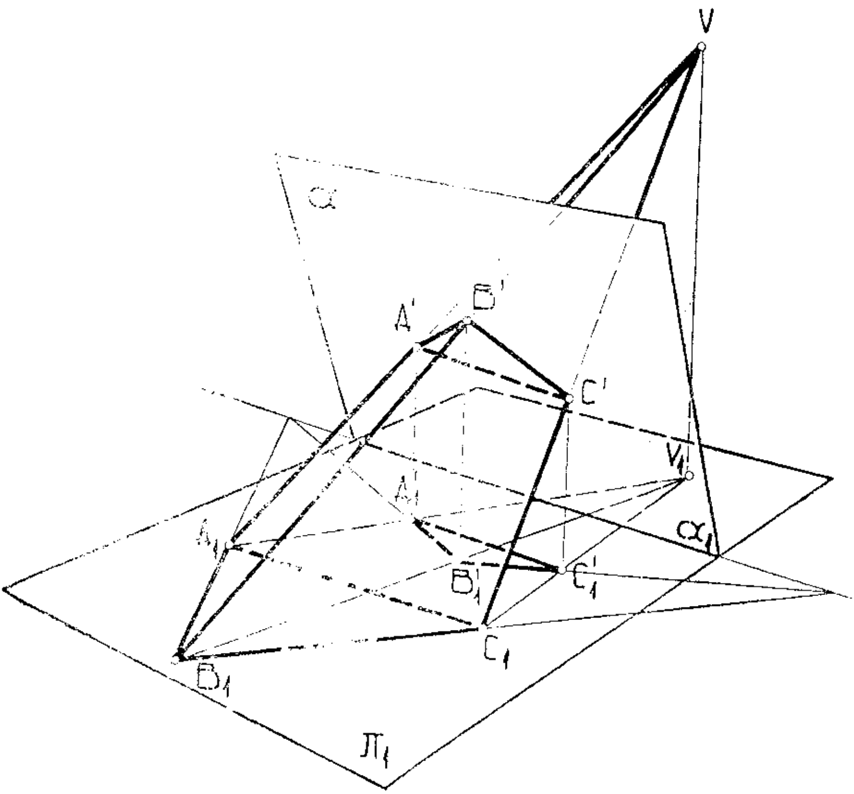


FIG. 284

Uno de los planos secantes puede ser uno de los planos de proyección; se tendría así una relación de homología entre la proyección de una sección cualquiera y la traza sobre ese plano de proyección de la superficie de la pirámide. Es lo que ocurre en la figura 281.

Las figuras $A'_1B'_1C'_1$ (proyección de una sección) y $A_1B_1C_1$

(traza) son homológicas. El punto V_1 es el centro de homología; la **traza** α_1 del plano α es el eje de homología.

La figura 282 da la representación de las figuras $A_1B_1C_1$ y $A_1'B_1'C_1'$.

2º ***Las proyecciones sobre un plano de dos secciones planas de una superficie cónica son figuras homológicas.*** El centro de homología es la proyección del vértice del cono; el eje de homología es la proyección de la intersección de los dos planos secantes.

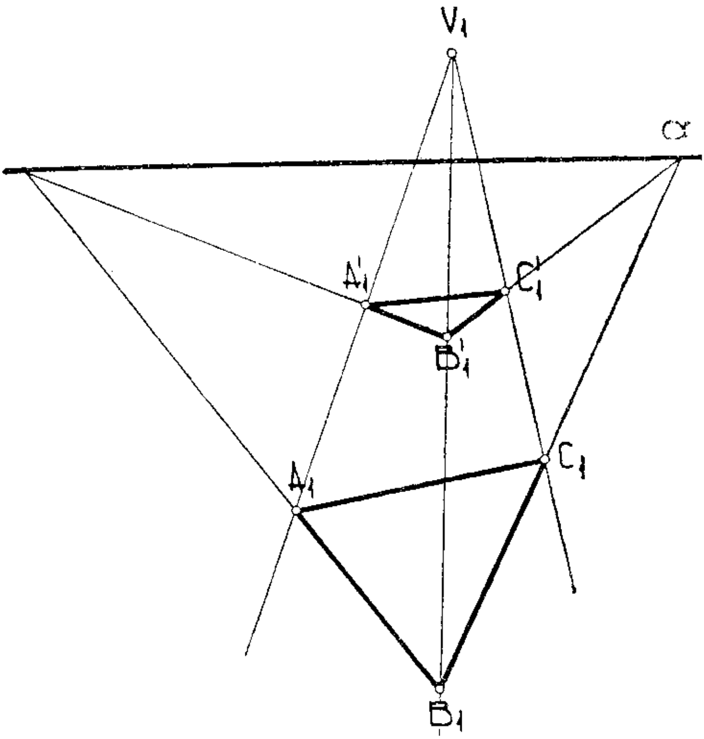


FIG. 282

Como en el caso de la pirámide, uno de los planos secantes puede ser el propio plano de proyección. Serán, en consecuencia, figuras homológicas, la traza sobre un plano de proyección de una superficie cónica y la proyección sobre ese mismo plano de la sección producida por otro plano secante cualquiera.

§ 59. AFINIDAD

1. — Un caso particular de la homología es aquél en el cual el centro de homología es un punto alejado hasta el infinito en una dirección dada d. Recibe el nombre de *afinidad*.

Dos puntos homólogos cualesquiera, llamados ahora *puntos afines*, A y A', por ejemplo (fig. 283), se encuentran sobre una recta paralela a d.

Sea B otro punto cualquiera de la figura (F) a la cual pertenece A, y B' su punto afín en la figura (F').

Se tiene

$$\frac{\overline{QB'}}{\overline{QB}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = k \text{ (constante)},$$

de donde

$$\overline{QB'} = \overline{QB} \cdot k$$

Midiendo, pues, las ordenadas de los puntos de las dos figuras a partir del *eje de afinidad* x y paralelamente a la *dirección de afinidad* d, las ordenadas de (F') se obtienen multiplicando las de (F) por un número constante k.

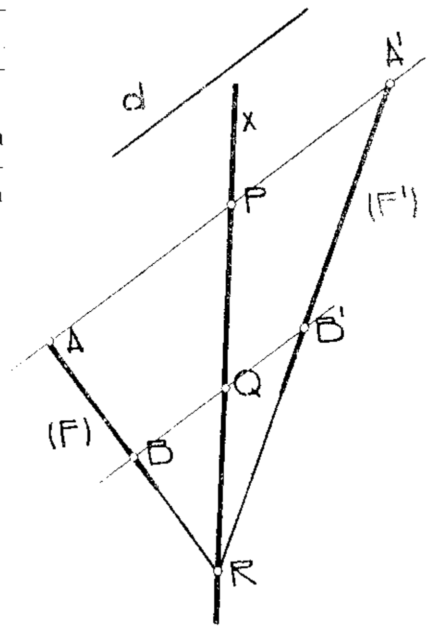


FIG. 283

Se dice que las figuras (F) y (F') son *afines*.

Es fácil comprender que si dos figuras son afines, a rectas paralelas de una de ellas corresponden rectas también paralelas de la otra.

2. — Hallemos, por ejemplo, la figura afín del cuadrilátero $ABCD$ (fig. 284), siendo x el eje de afinidad, d la dirección de afinidad y A' el punto afín de A.

El punto D' debe estar sobre la paralela por D a la dirección de afinidad. Por otra parte, las rectas AD y $A'D'$ deben concurrir a un mismo punto, P en este caso, del eje x. El punto D' común a la paralela por D a la dirección d y a la recta $A'P$, es el afín del vértice D. Para obtener C' se ha procedido en la misma forma, trazando primero la paralela a la dirección d por C y luego la recta $D'Q$. El punto de intersección es el punto pedido.

Y así para los otros.

3. — Cuando la dirección de afinidad es perpendicular al eje, la afinidad es distinguida con el nombre de *afinidad ortogonal*, de notable importancia en *Geometría Descriptiva.*

4. — Volvamos a considerar el teorema dado en 1 del parágrafo anterior. Como caso particular puede ocurrir que el vértice F del haz de rectas se haya fugado al infinito siguiendo una dirección d. Los

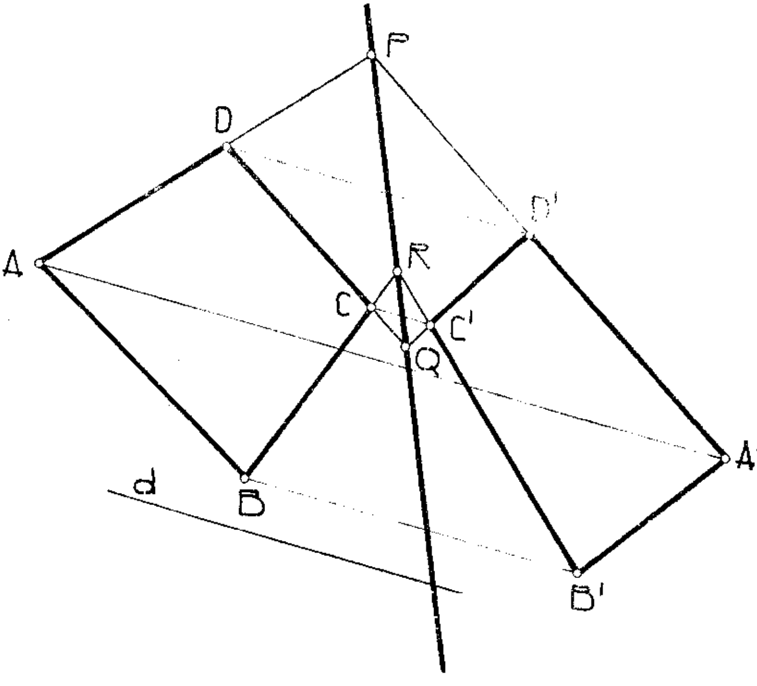


Fig. 284

rayos del haz se vuelven paralelos a d. y se comprende entonces que entre las proyecciones (F_1) y (F'_1) de las dos secciones existirá una relación de afinidad, siendo x_1 el eje de afinidad y d la dirección de afinidad (fig. 285).

5. — Resulta entonces que si consideramos las rectas del haz como aristas de un prisma, las figuras (F) y (F') se vuelven dos secciones planas de la superficie prismática.

En consecuencia:

1º *Las proyecciones sobre un plano de dos secciones planas de una superficie prismática son afines.* El eje de afinidad es la proyección de la intersección de los dos planos secantes. La dirección es dada por la dirección de las aristas. Uno de los

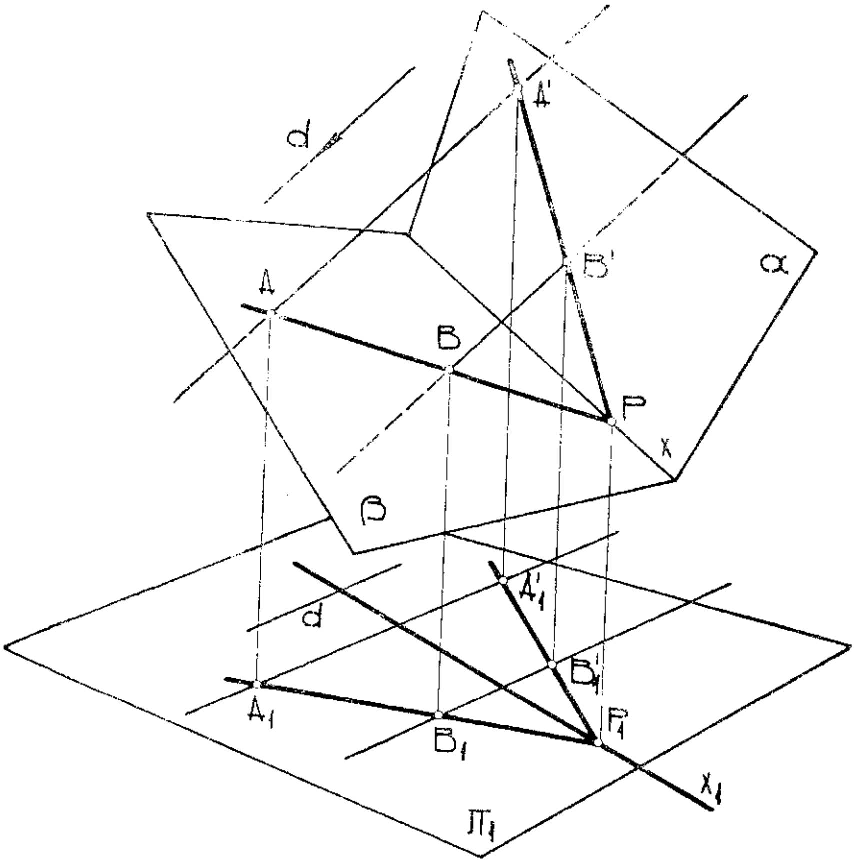


Fig. 285

planos secantes puede ser el propio plano de proyección (π_1 o π_2); se tendría así una relación de afinidad entre la proyección de una sección cualquiera de la superficie prismática y la traza de ésta sobre el plano de proyección considerado. Es lo que muestra la figura 286.

2º *Las proyecciones sobre un plano de dos secciones planas de una superficie cilíndrica son figuras afines.* El eje de afinidad es la proyección sobre el plano de la intersección de los dos planos secantes. La dirección es dada por la dirección de las generatrices.

En particular, son afines la traza de una superficie cilíndrica sobre uno de los planos de proyección y la proyección sobre ese plano de una sección cualquiera de la superficie

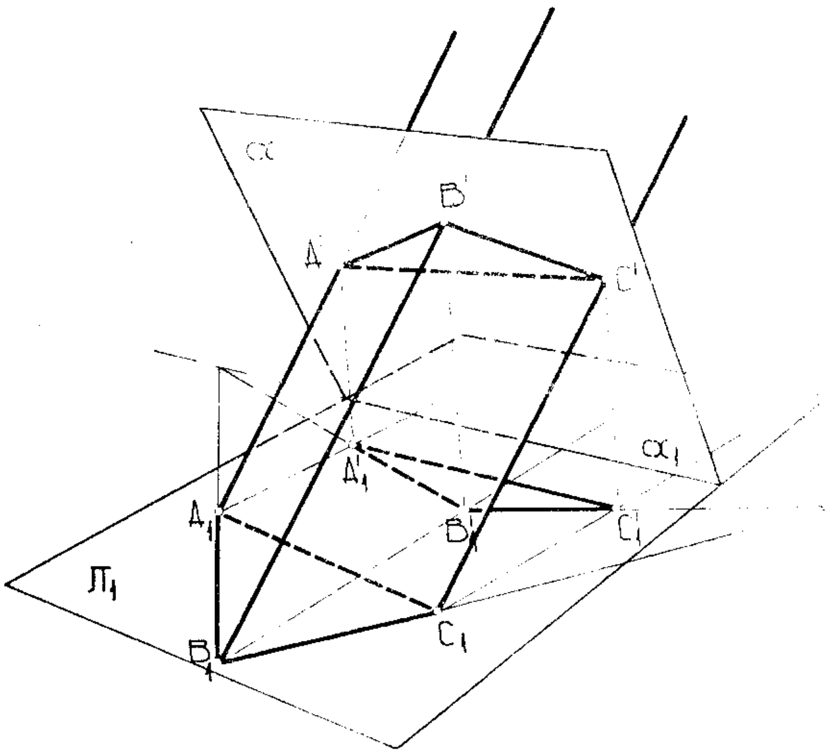


FIG. 286

6. — Si el lector vuelve a leer los números 3 de § 48 y 5 de § [illegible] puede constatar fácilmente que, sin decirlo, se ha hecho una operación de afinidad. En efecto, refiriéndonos a la figura 254, que aquí reproducimos como figura 287, los pares de puntos (A) y A_1, (B) y B_1 y (C) y C_1 están sobre rectas paralelas (normales a α_1), y rectas correspondientes, como $(A)(C)$ y A_1C_1, $(C)(B)$ y C_1B_1 y $(A)(B)$ y A_1B_1 concurren a un mismo punto de α_1.

En consecuencia: *la proyección ortogonal de una figura plana y su rebatimiento sobre el correspondiente plano de proyección son figu-*

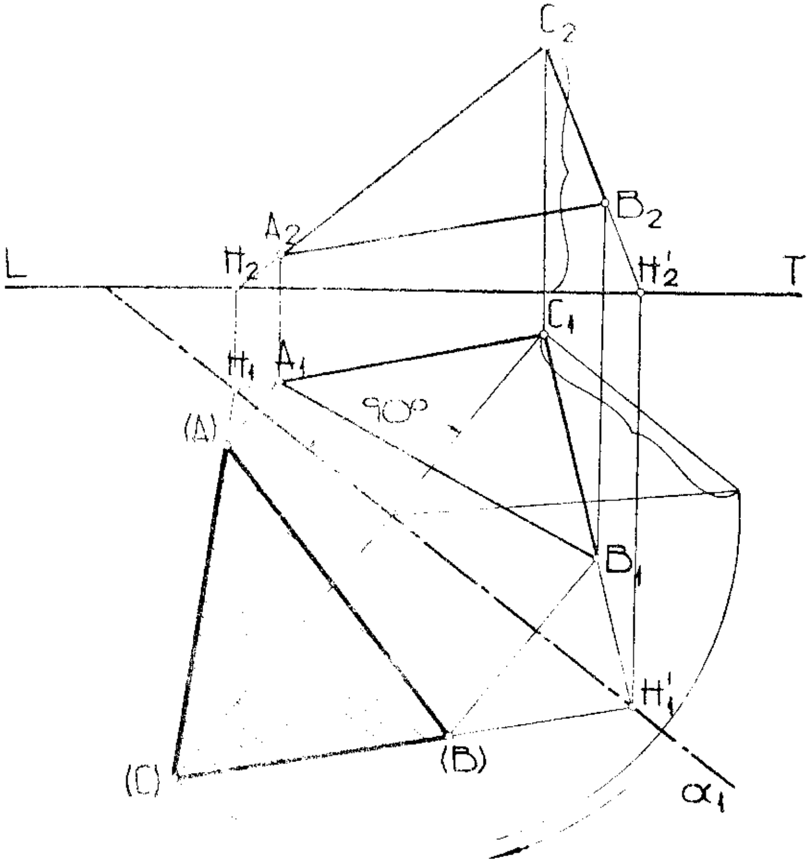


Fig. 287

as afines. El eje de afinidad es la correspondiente traza del plano de la sección; la dirección de afinidad es dada por la perpendicular a esa traza.

Tenemos así a nuestra disposición un cómodo procedimiento para hallar la verdadera magnitud de la sección plana de una superficie.

7.—Como problema inverso podemos hallar con toda facilidad las proyecciones de una circunferencia colocada en un plano dado α conociendo el centro O y el radio r (fig. 288).

Se rebate el plano α sobre π_1 girando alrededor de α_1 y se describe, con centro en el rebatimiento (O) del centro la circunferencia de radio r. Esta circunferencia y la proyección sobre π_1 de la circunferencia del espacio son figuras afines. Basta entonces dividir la ci

cunferencia rebatida en cierto número de partes y hallar el afín de cada punto de división.

Se obtiene así la proyección horizontal.

En general, en vez de dividir la circunferencia en forma arbitra-

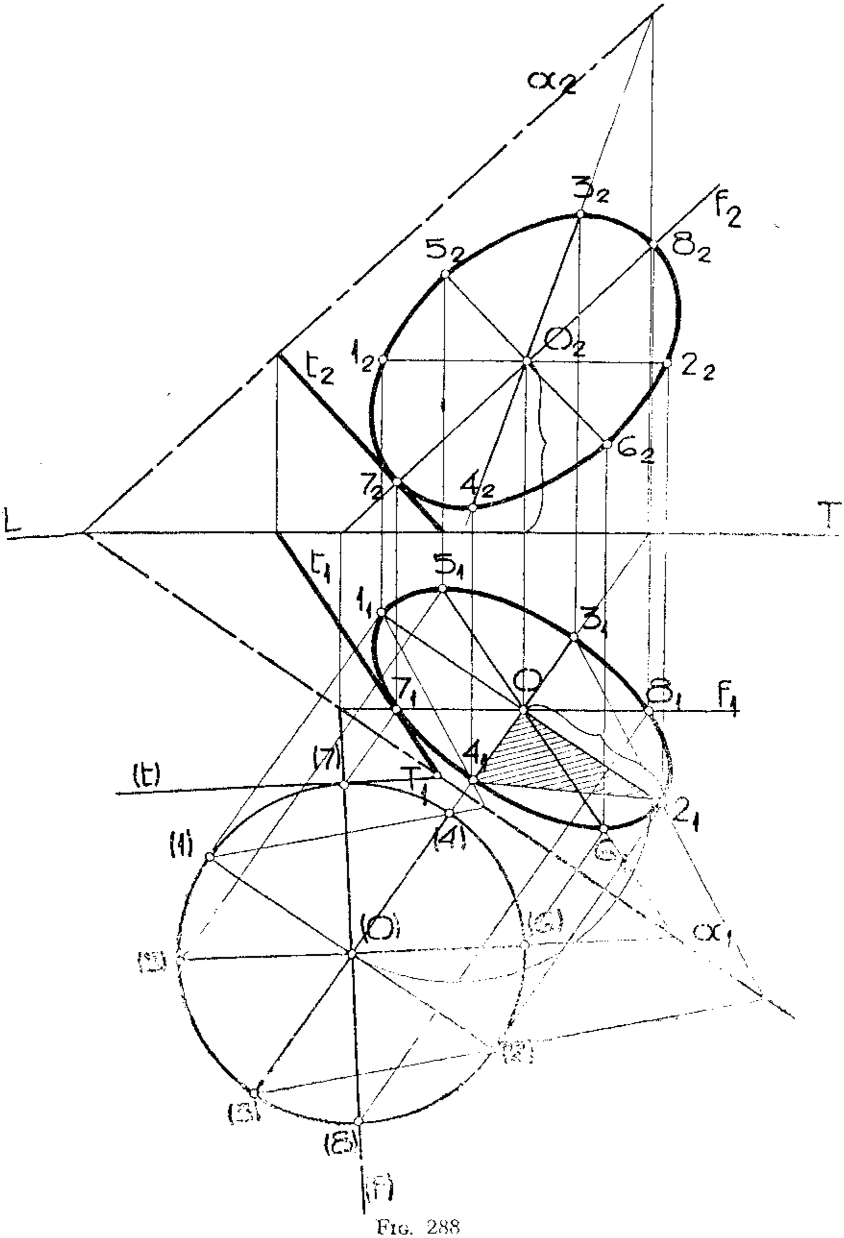


FIG. 288

ria conviene trazar primero los diámetros perpendiculares (1)(2) y (3)(4) que dan los ejes de la proyección horizontal. El diámetro (1)(2) corresponde a la horizontal por el centro O del plano de la circunferencia; el diámetro (3)(4) corresponde, en cambio, a la línea de máxima pendiente de ese plano.

Se trazan luego los diámetros perpendiculares (5)(6) y (7)(8) que determinan los ejes de la elipse, proyección vertical de la circunferencia. El diámetro (5)(6) corresponde a la línea de pendiente con respecto al plano vertical del plano de la circunferencia; el diámetro (7)(8) corresponde a la frontal por O de ese plano.

A los ejes $5_2 6_2$ y $7_2 8_2$ de la proyección vertical corresponden los diámetros conjugados $5_1 6_1$ y $7_1 8_1$ de la elipse proyección horizontal de la circunferencia.

Es fácil notar que las tangentes en puntos afines (7) y 7_1, por ejemplo, de la circunferencia y de la proyección horizontal, son también rectas afines, ellas concurren a un mismo punto T_1 del eje α_1 de afinidad, y sus puntos correspondientes están sobre rectas perpendiculares al eje.

Capítulo XII

PIRAMIDES

§ 60. REPRESENTACION

1. — Una pirámide cualquiera resulta individualizada si se dan las proyecciones de la base y del vértice.

Para completar la representación basta unir, en cada proyección, el vértice del sólido con cada vértice de la base (fig. 289).

2. — Propongámonos, como problema, representar una pirámide

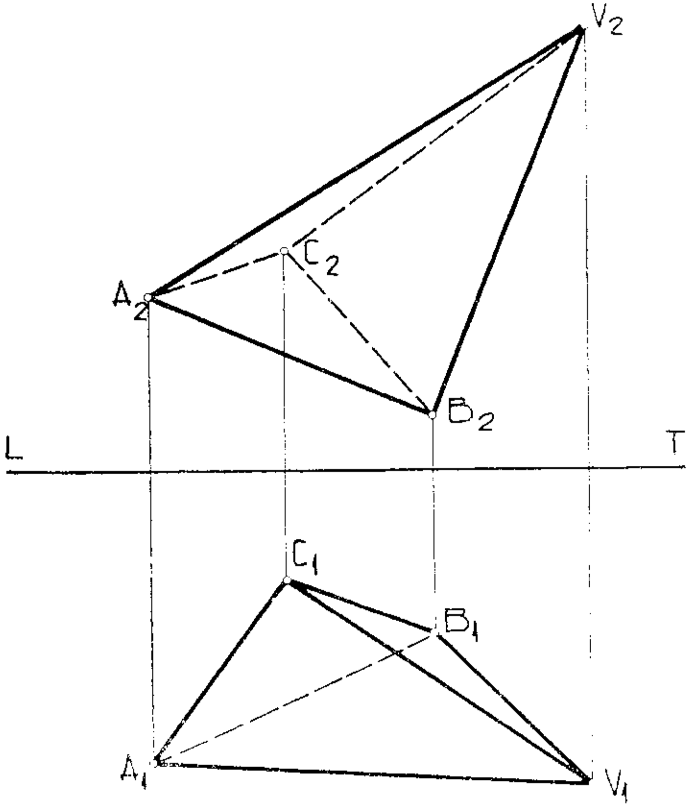


Fig. 289

de la cual se conocen la base ABC y las tres aristas laterales $\overline{AV}$, $\overline{BV}$ y $\overline{CV}$ (fig 290).

Para individualizar la pirámide debemos hallar su vértice V.

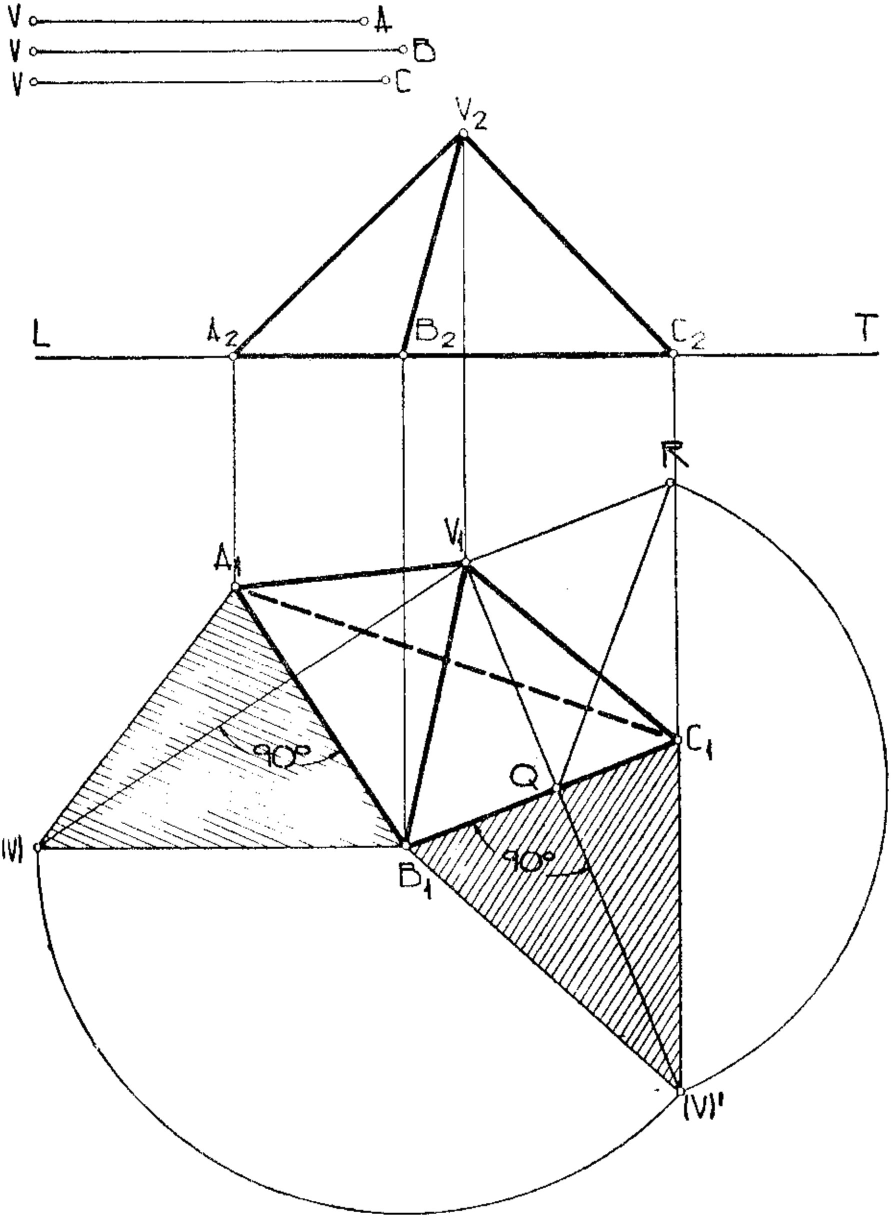


Fig. 290

Construyamos sobre el plano π_1 el rebatimiento de la cara AVB basta construir el triángulo $A_1(V)B_1$, del cual conócense los tres lados.

Construyamos en la misma forma el rebatimiento de la cara BVC.

Si imaginamos relevados los planos AVB y BVC, el vértice V tendrá su proyección horizontal en la intersección V_1 de las perpendiculares por (V) y (V') a las rectas A_1B_1 y B_1C_1, respectivamente.

Para hallar V_2 se recurre al conocido triángulo rectángulo V_1QR (1 de § 48), del cual conocemos el cateto $\overline{V_1Q}$ y la hipotenusa $\overline{QR} = \overline{Q(V)}'$. El cateto $\overline{V_1R}$ da la cota del vértice V de la pirámide.

§ 61. SECCIONES PLANAS

1. — Trátese de una pirámide $VABC$, por ejemplo (fig. 291), cor-

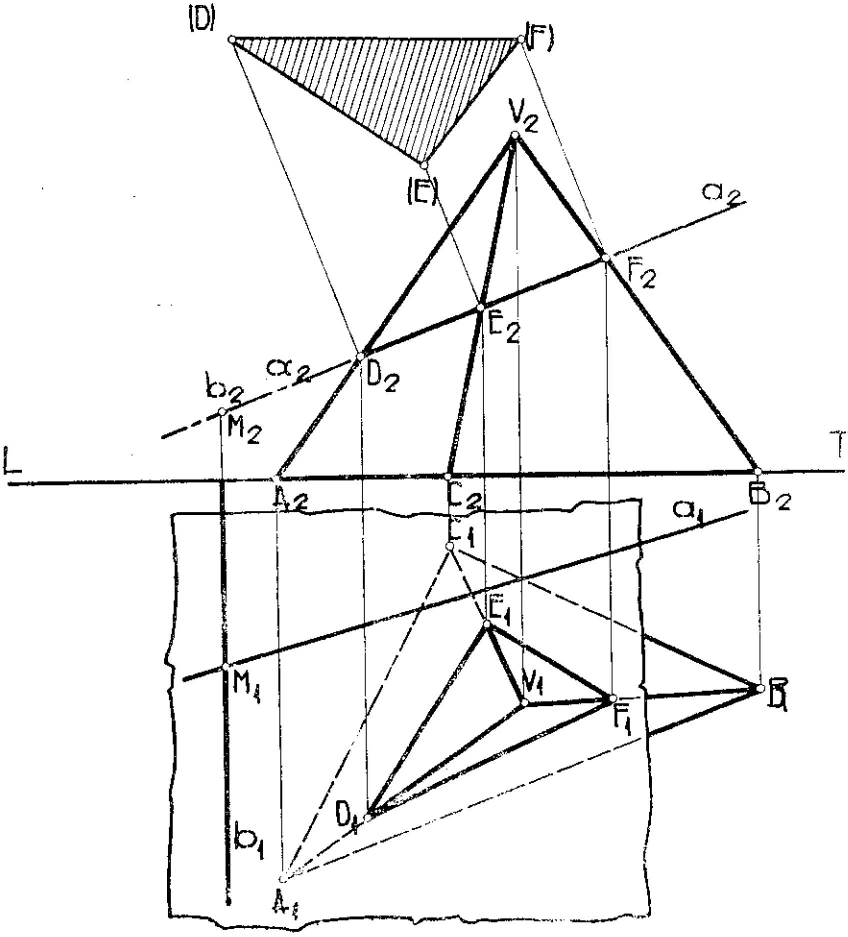


Fig. 291

tada mediante un plano de canto. Este plano puede estar dado mediante las proyecciones (a_1, a_2) y (b_1, b_2) de dos de sus rectas.

La proyección vertical de la sección es, evidentemente, el segmento $\overline{D_2F_2}$ de la recta a_2b_2, es decir, de la traza vertical del plano. Las

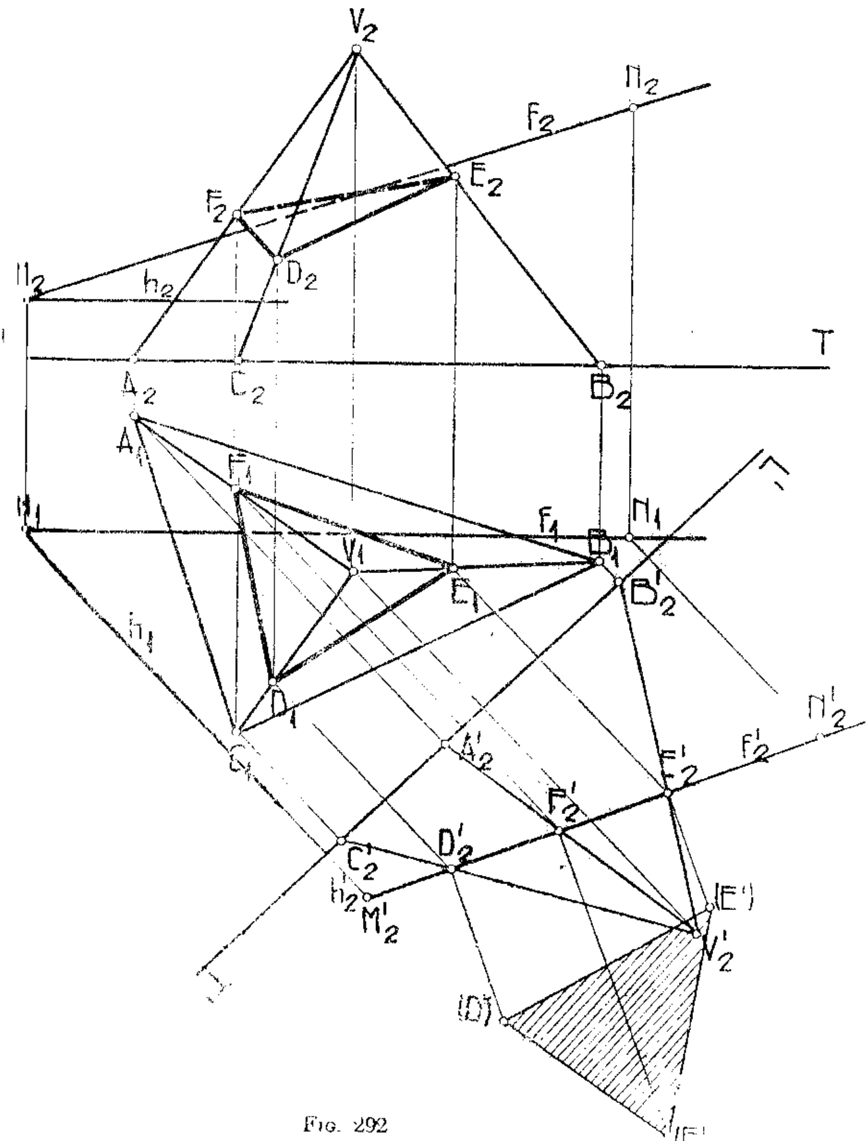


Fig. 292

proyecciones verticales de sus vértices son las intersecciones D_2, E_2 y F_2 de la proyección vertical de la sección con las proyecciones verticales de las aristas. Para encontrar las proyecciones horizontales D_1, E_1 y F_1 basta trazar líneas de referencia hasta las correspondientes proyecciones horizontales de las aristas.

La verdadera magnitud de la sección puede ser obtenida rebatiéndola sobre el plano vertical.

Como las proyecciones horizontales a_1 y b_1 de las dos rectas del plano de canto no intervienen en la resolución del problema, puede prescindirse de su trazado, dibujando entonces solamente las proyecciones verticales a_2 y b_2, es decir, solamente la traza vertical α_2 del plano secante.

2. — Trátese ahora de otra pirámide $VABC$ cortada por un plano cualquiera, que puede ser dado mediante un paralelogramo, como se hizo en el caso del prisma, o mediante dos cualesquiera de sus rectas. Lo daremos mediante una horizontal h y una frontal f que pasan por el punto M del plano (fig. 292).

Para reducir este problema al caso anterior cambiemos el plano vertical adoptando como nueva línea de tierra $L'T'$ perpendicular a la proyección h_1 de la horizontal h. La nueva proyección vertical de la recta h es sólo un punto, h'_2, coincidente con M'_2. La nueva proyección vertical de la recta f es f'_2, traza vertical del plano que ya es de canto.

Dibujada la nueva proyección vertical de la pirámide se determinan las proyecciones, $D'_2E'_2F'_2$ primero y $D_1E_1F_1$ después, de la sección. Volviendo al primitivo plano vertical de proyección se determina, mediante líneas de referencia, $D_2E_2F_2$, proyección vertical de la sección.

Su verdadera magnitud es $(D)\,(E)\,(F)$, obtenida por rebatimiento

3. — Considerando otra vez la pirámide anterior, cortémosla mediante un plano cualquiera dado por sus trazas y hallemos por homología las proyecciones de la sección (fig. 293).

La proyección horizontal $A_1B_1C_1$ de la base y la proyección homónima de la sección son figuras homológicas, siendo V_1 el centro de homología y α_1 el eje de homología (2 de § 58). Para determinar la sección debemos conocer un punto de su proyección. Hallamos entonces la intersección del plano secante α con una arista, la VA, por ejemplo. Se obtiene el punto $F \equiv (F_1,\ F_2)$. El conocimiento de F_1 permite determinar los demás puntos de la proyección horizontal $D_1E_1F_1$ de la sección.

Mediante líneas de referencia se encuentra fácilmente la proyección vertical $D_2E_2F_2$.

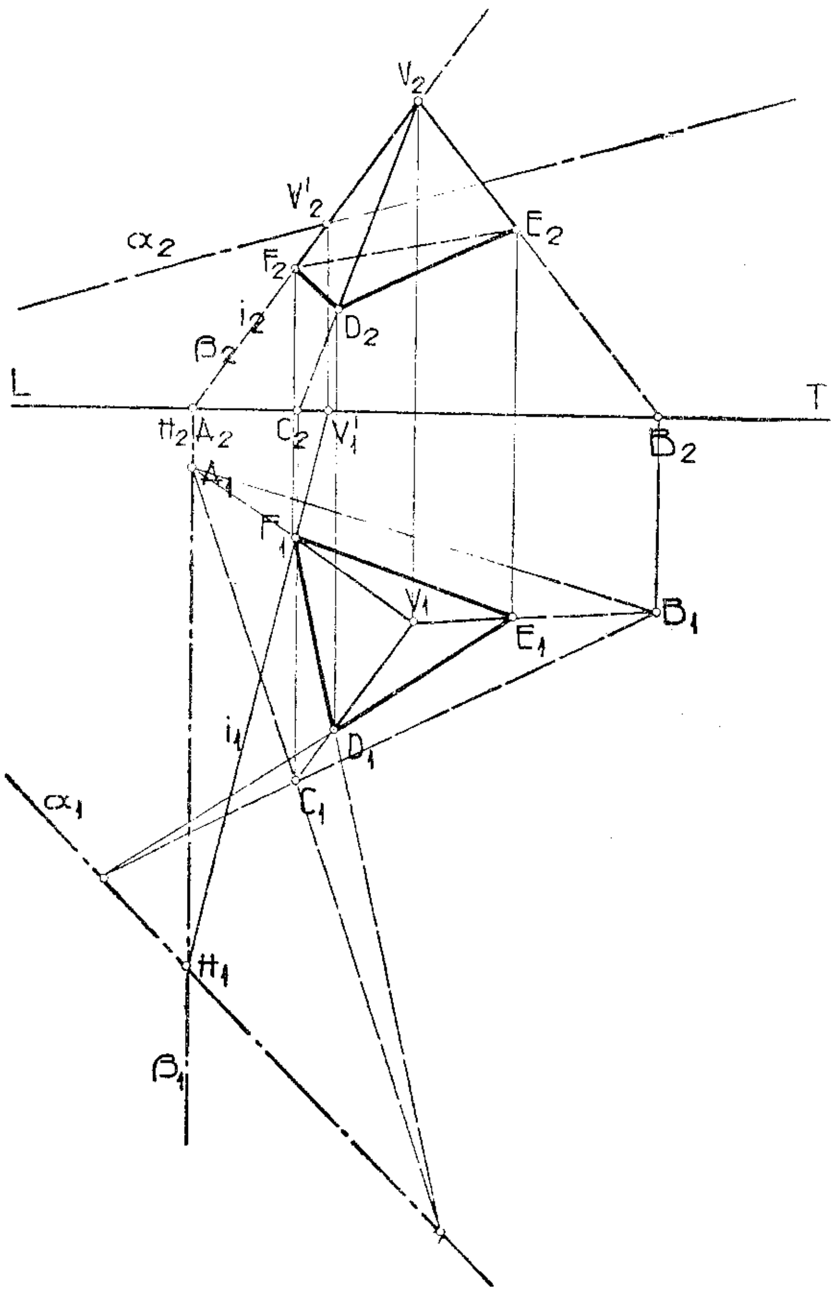

V2
V'2
E2
α2
F2
D2
i2
β2
L
T
H2
A2
C2
V'1
B2
A1
F1
V1
B1
E1
i1
D1
C1
α1
H1
β1

FIG. 293

4. — Dada la pirámide de la figura 294, cortarla mediante un plano de canto y desarrollar su superficie.

La sección producida por el plano de canto se obtiene como en 1 de este mismo parágrafo. Su verdadera magnitud es $(E)(F)(G)(H)$, hallada por rebatimiento sobre π_2.

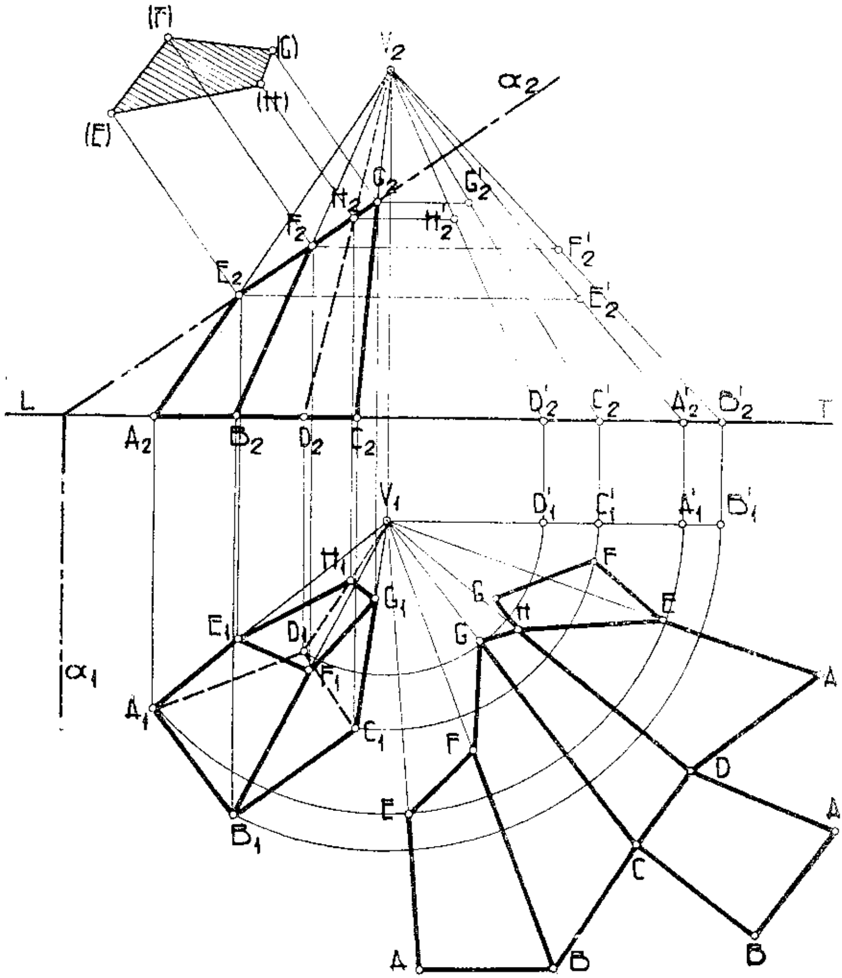


Fig. 294

El desarrollo de la superficie lateral de la pirámide lo constituyen los cuatro triángulos V_1AB, V_1BC, V_1CD y V_1DA. Para su trazado es necesario hallar primero la verdadera magnitud de las aristas. En

la figura se ha recurrido a rotaciones de cada arista alrededor del eje vertical que pasa por el vértice V. Así, $\overline{V_2A'_2}$ es la verdadera magnitud de la arista $\overline{VA}$. El segmento $\overline{V_2E'_2}$ es, en cambio, la verdadera magnitud de la porción $\overline{VE}$ de esa misma arista.

La quebrada $EFGHE$ constituye la *transformada* de la sección.

§ 62. INTERSECCION DE UNA RECTA Y UNA PIRAMIDE

1. — Sea r la recta y $VABCD$ la pirámide (fig. 295).

Consideremos como plano auxiliar el que proyecta verticalmente la recta.

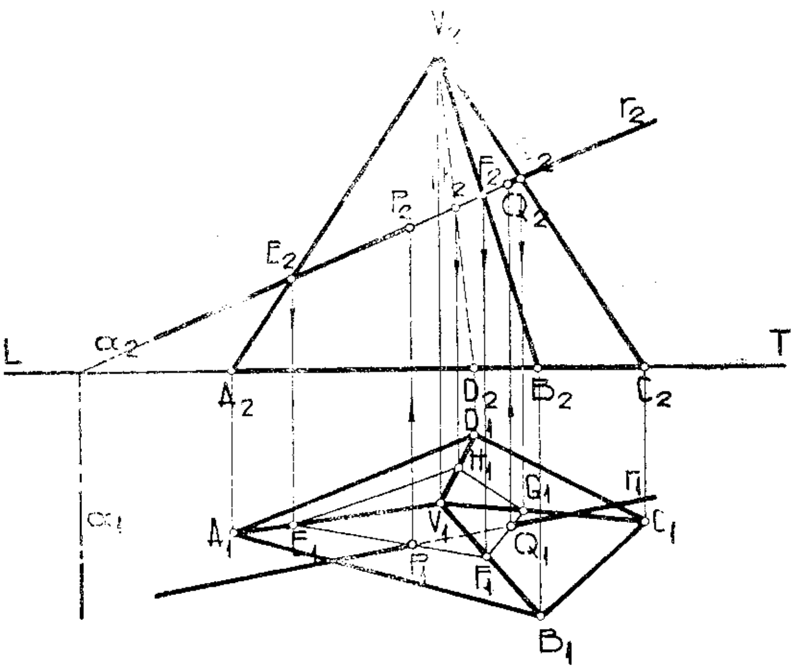


Fig. 295

Corta la pirámide según el polígono que se proyecta horizontalmente en $E_1F_1G_1H_1$. Es fácil entonces determinar P_1 y Q_1 primero, P_2 y Q_2 después.

2. — En la figura 296 hemos utilizado como plano secante el determinado por la recta r y el vértice V de la pirámide.

Para determinar la traza horizontal α_1 de este plano se ha hecho pasar por V y un punto cualquiera M de la recta r una recta auxi-

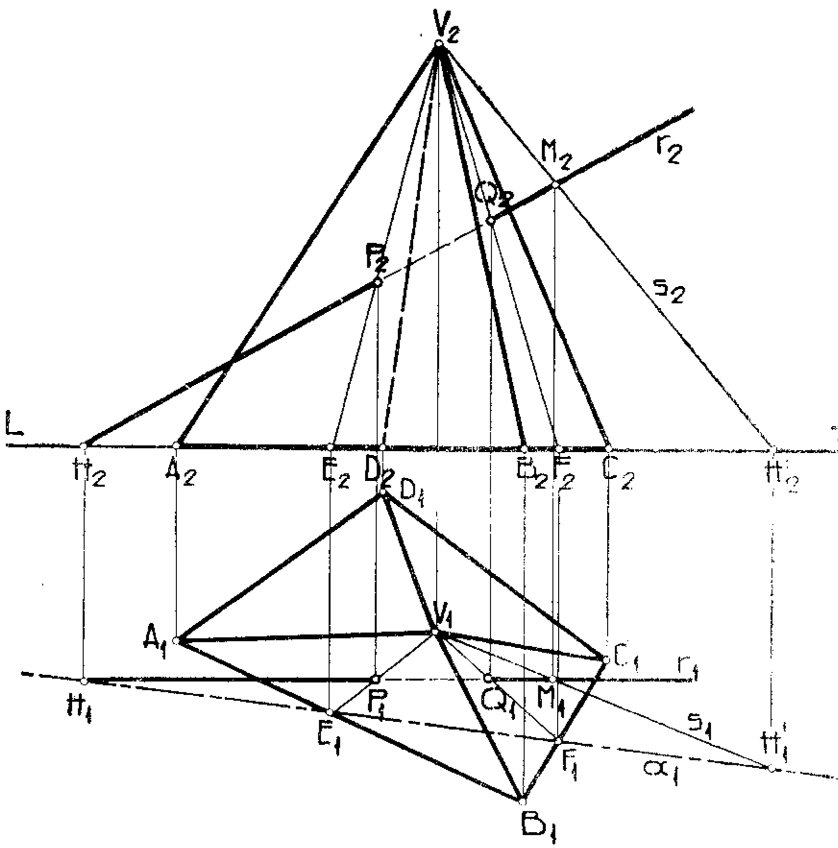


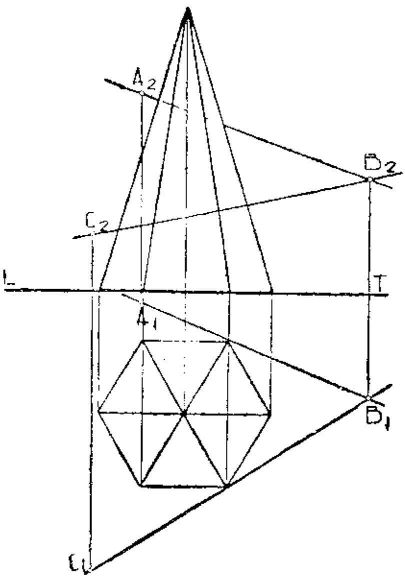
FIG. 296

liar s. Unidas las trazas horizontales H_1 y H'_1 de estas rectas se obtuvo α_1. El contorno de la base es cortado por el plano α en los puntos E y F, siendo entonces EVF la sección producida en la pirámide.

Se determinan después los puntos P y Q pedidos.

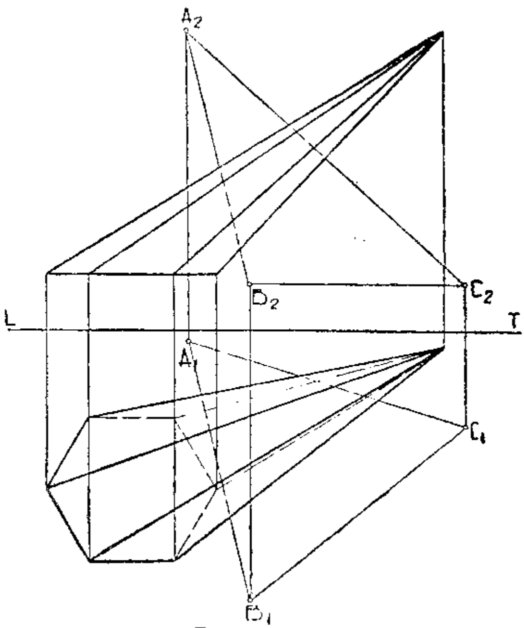
EJERCICIOS

81. Hallar la sección producida por el plano *ABC* en la pirámide indicada en la figura.

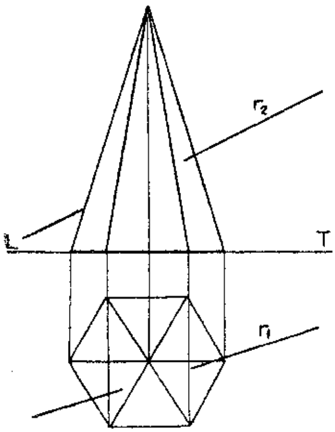


EJERCICIO 81

82. Idem.

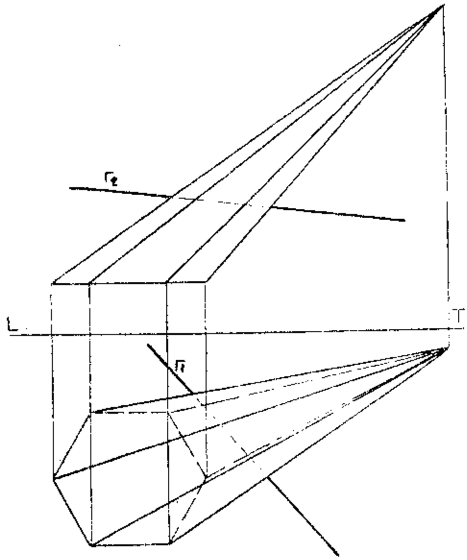


EJERCICIO 82



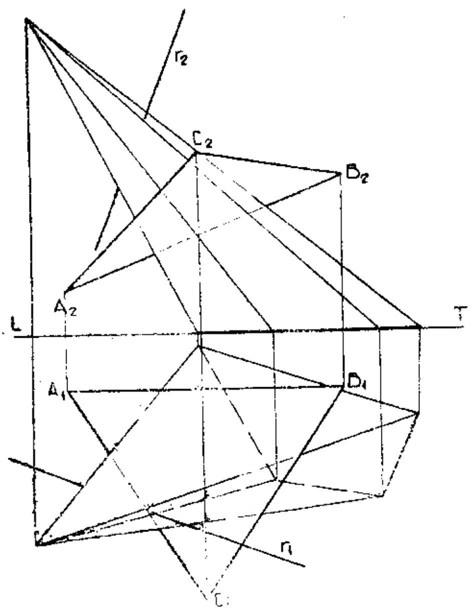
EJERCICIO 83

83. Hallar la intersección de la recta r con la superficie de la pirámide indicada en la figura.



EJERCICIO 84

84. Hallar la intersección de la superficie de la pirámide que se indica con la recta r.



EJERCICIO 85

85. Dada la pirámide indicada en la figura, hallar la sección producida por el plano ABC, así como la intersección de la recta r con la superficie del sólido.

Capítulo XIII

PRISMAS

§ 63. REPRESENTACION

1. — En el capítulo III, § 20, hicimos la representación de algunos prismas. Veremos ahora el mismo asunto en forma más general.

Un prisma cualquiera (oblicuo o recto) queda individualizado cuando son conocidas las proyecciones de una base y las de una arista.

Sean $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ las proyecciones de la base dada y $\overline{A_1E_1}$, $\overline{A_2E_2}$ las proyecciones de una de las aristas (fig. 297).

Para completar la representación del prisma bastará conducir desde cada una de las proyecciones de los distintos vértices de la base dada un segmento paralelo y de longitud igual a la proyección homónima de la arista dada. Se habrán hallado así las proyecciones de las aristas laterales. Los extremos obtenidos para las proyecciones horizontales y para las verticales dan los vértices de dos polígonos, $E_1F_1G_1H_1$ y $E_2F_2G_2H_2$, que son proyección horizontal y vertical, respectivamente, de la otra base del prisma.

Para establecer la visibilidad de las aristas se aplica el criterio ya conocido. El punto P_2 o Q_2, en que se cortan las proyecciones verticales de las aristas $\overline{CG}$ y $\overline{AB}$, es proyección vertical de dos puntos, uno de $\overline{CG}$, otro de $\overline{AB}$. Sus proyecciones horizontales son Q_1 y P_1, respectivamente. Como P_1 está más alejado que Q_1 de la línea de tierra el punto P perteneciente a la arista $\overline{AB}$ es visible en proyección vertical. El punto Q de la arista $\overline{CG}$ es, en cambio, invisible. Por esta razón $\overline{C_2G_2}$ aparece de puntos.

En forma análoga, la vertical por el punto de encuentro de $\overline{B_1F_1}$ y $\overline{E_1H_1}$ hace ver que en proyección horizontal la arista B_1F_1 es invisible.

Podemos imaginar prolongado el prisma dado hasta encontrar el plano horizontal de proyección. Su intersección es la traza horizontal del prisma; para obtenerla basta unir las trazas horizontales de las aristas laterales.

Resulta así el polígono $A'_1B'_1C'_1D'_1$, $A'_2B'_2C'_2D'_2$.

2. — Como caso particular representemos un cubo situado sobre un plano perpendicular al plano vertical.

Sean $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$ el plano y d un segmento igual a la arista del cubo (fig. 298).

Imaginemos rebatido el plano α sobre el horizontal de proyección. La base del cubo puede ser entonces, por ejemplo, el cuadrado $(A)(B)(C)(D)$, de lado igual a d. Haciendo el relevamiento, es decir,

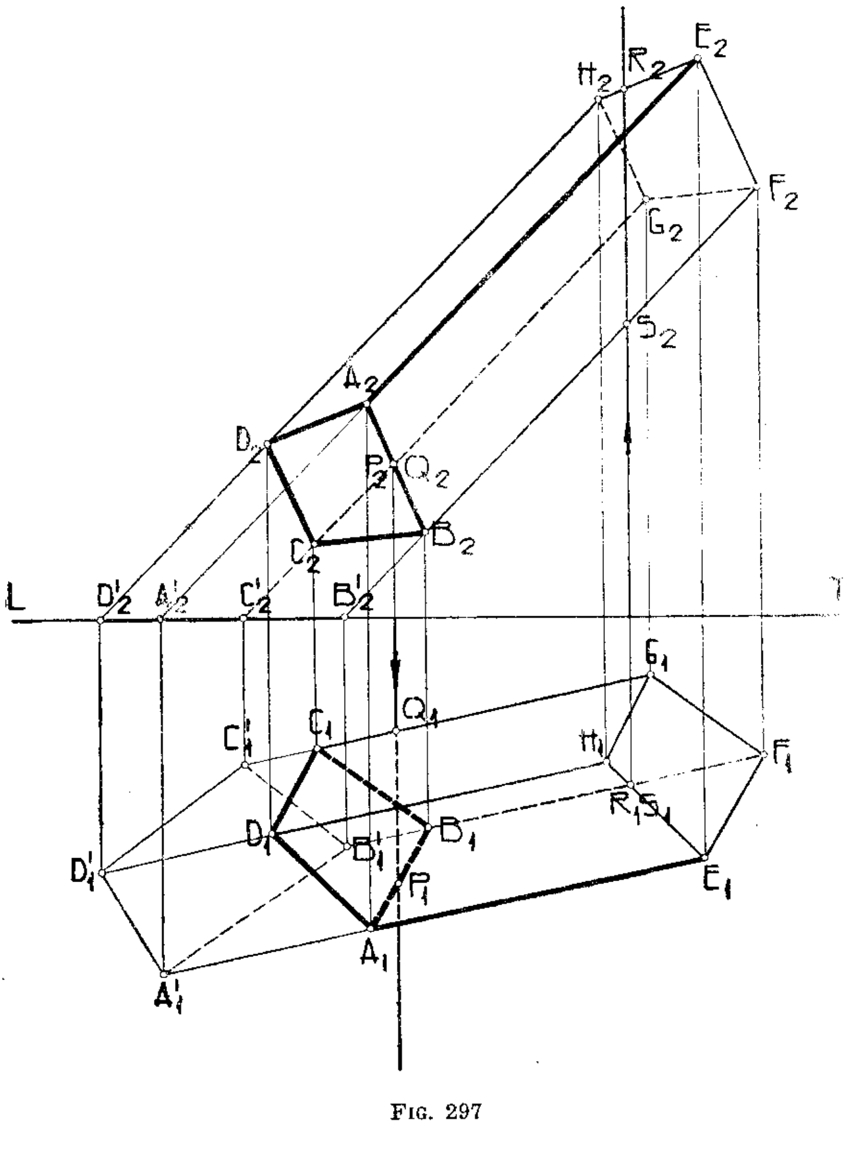


FIG. 297

volviendo a llevar el plano a su primitiva posición, los puntos (A) (B), (C) y (D) se colocan en A_2, B_2, C_2 y D_2. Las proyecciones verticales de las aristas laterales son perpendiculares a la traza α_2 y ap

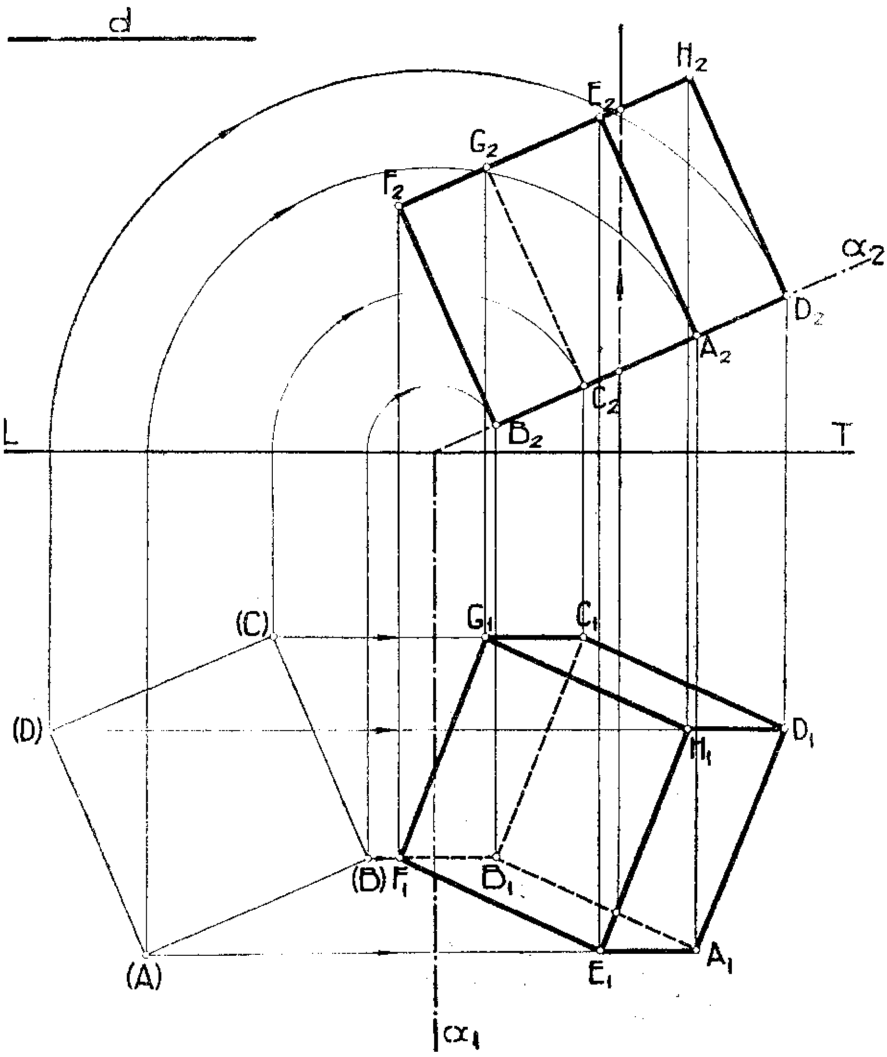


FIG. 298

recen en verdadera magnitud. Las proyecciones horizontales se obtienen mediante líneas de referencia.

Para determinar la visibilidad notamos que en proyección vertical la arista $\overline{CG}$ es invisible por ser su alejamiento inferior al de la arista $\overline{AE}$, que es visible.

En la proyección horizontal puede aplicarse el criterio general ya conocido. Así, trazando por el punto de encuentro de $\overline{A_1B_1}$ y $\overline{E_1H_1}$

la perpendicular a LT, la proyección $\overline{A_2B_2}$ es encontrada antes que la $\overline{E_2H_2}$. En proyección horizontal $\overline{E_1H_1}$ será entonces visible y $\overline{A_1B_1}$ invisible. En forma análoga se establece que $\overline{B_1C_1}$ y $\overline{F_1B_1}$ son invisibles.

§ 64. SECCIONES PLANAS DE PRISMAS

1. — Trátese de un paralelepípedo colocado en una posición cualquiera con respecto a los planos de proyección. El plano secante (fig. 299) es el que corresponde al paralelogramo $MNPQ$, perpendicular a π_2, es decir, un plano de canto.

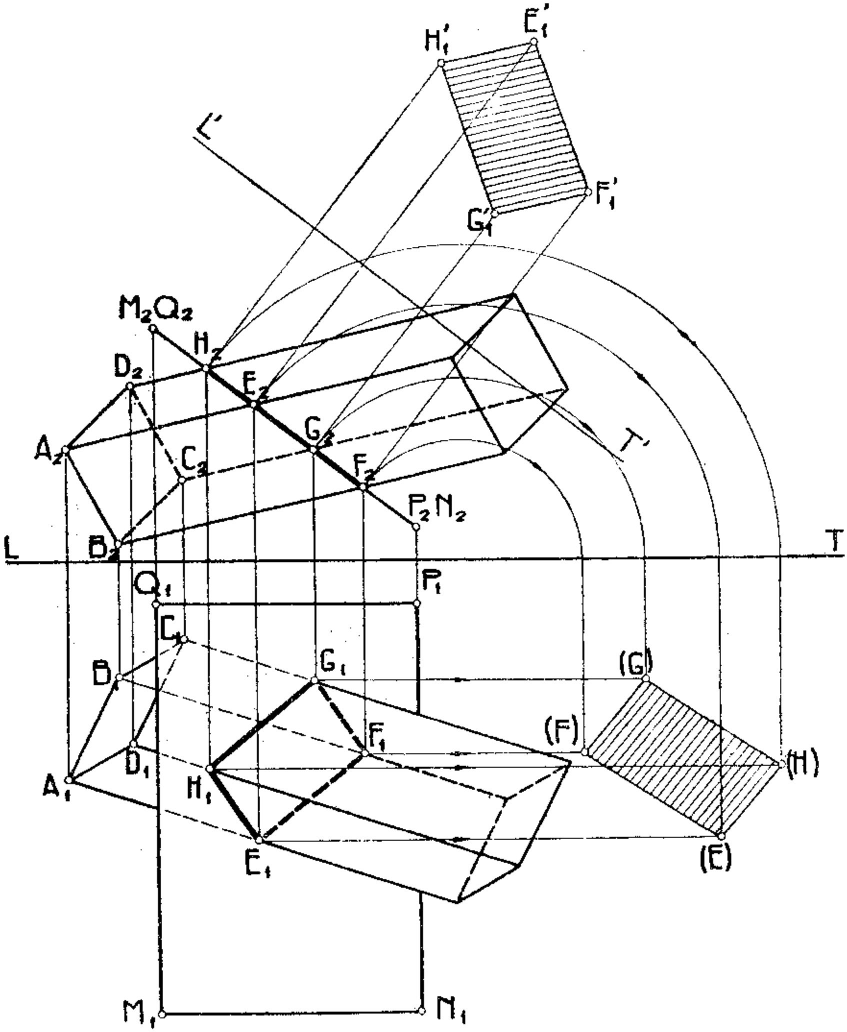


Fig. 299

La proyección vertical del punto de intersección del plano secante y de la arista lateral que contiene el vértice A es E_2; su proyección horizontal E_1 se obtiene mediante una línea de referencia. Queda así determinado uno de los vértices de la sección.

Utilizando las otras aristas se hallan en forma análoga los otros vértices F, G y H del corte producido. La sección tiene, de este modo, como proyección vertical el segmento $\overline{H_2F_2}$, y como proyección horizontal el paralelogramo $E_1F_1G_1H_1$. Su verdadera magnitud es $(E)(F)(G)(H)$, obtenida mediante el rebatimiento del plano secante sobre π_1, o mediante un cambio del plano horizontal, o por afinidad.

2. — Consideremos ahora el caso general, es decir, un paralelepípedo en una posición cualquiera y el plano α también en una posición cualquiera (fig. 300).

El plano secante es el paralelogramo $MNPQ$. Para reducir este problema al desarrollado en el número anterior cambiemos de plano horizontal, adoptando como nueva línea de tierra $L'T'$ perpendicular a Q_2P_2. El plano secante resultará así perpendicular al nuevo plano horizontal. Hallada la nueva proyección del paralelepípedo, así como la del plano secante, se determinan las proyecciones $E'_1F'_1G'_1H'_1$ y $E_2F_2G_2H_2$ de la sección. Volviendo después a los planos primitivos de proyección es fácil determinar mediante líneas de referencia la proyección $E_1F_1G_1H_1$.

La sección buscada es, pues, $E_1F_1G_1H_1$, $E_2F_2G_2H_2$.

Su verdadera magnitud es $(E)(F)(G)(H)$, obtenida mediante un giro.

3. — Si son conocidas las trazas del plano secante, las construcciones necesarias para hallar la sección resultan generalmente simplificadas.

Trátese de un prisma cualquiera, dado por su base $ABCD$ y una de sus aristas laterales $\overline{DM}$ (fig. 301). El plano secante de trazas α_1 y α_2 es cualquiera.

Completada la representación, hallemos la intersección del plano α y la arista $\overline{DM}$, por ejemplo. Para esto recurramos al plano auxiliar que proyecta verticalmente la arista $\overline{DM}$. Corta el plano α según la recta $i \equiv (i_1, i_2)$, que, a su vez, encuentra la arista $\overline{DM}$ en el punto $H \equiv (H_1, H_2)$, uno de los vértices de la sección. Repitiendo lo mismo para las otras aristas se determina sin dificultad la sección buscada.

Para hallar su verdadera magnitud podemos rebatirla sobre el plano horizontal. Recordemos que la proyección de una figura sobre un plano y su rebatimiento sobre el mismo plano son figuras afines. El eje de afinidad será, en nuestro caso, la traza α_1 del plano secante. La dirección de afinidad es la normal al eje α_1.

Como es necesario conocer el afín de uno de los puntos de la sección (2 de § 59), hallemos el rebatimiento de un vértice, del F, por

ejemplo, empleando la construcción del conocido triángulo rectángulo. Los demás vértices del rebatimiento se hallan fácilmente por afinidad. Se obtiene así la figura $(E)(F)(G)(H)$, verdadera magnitud de la sección.

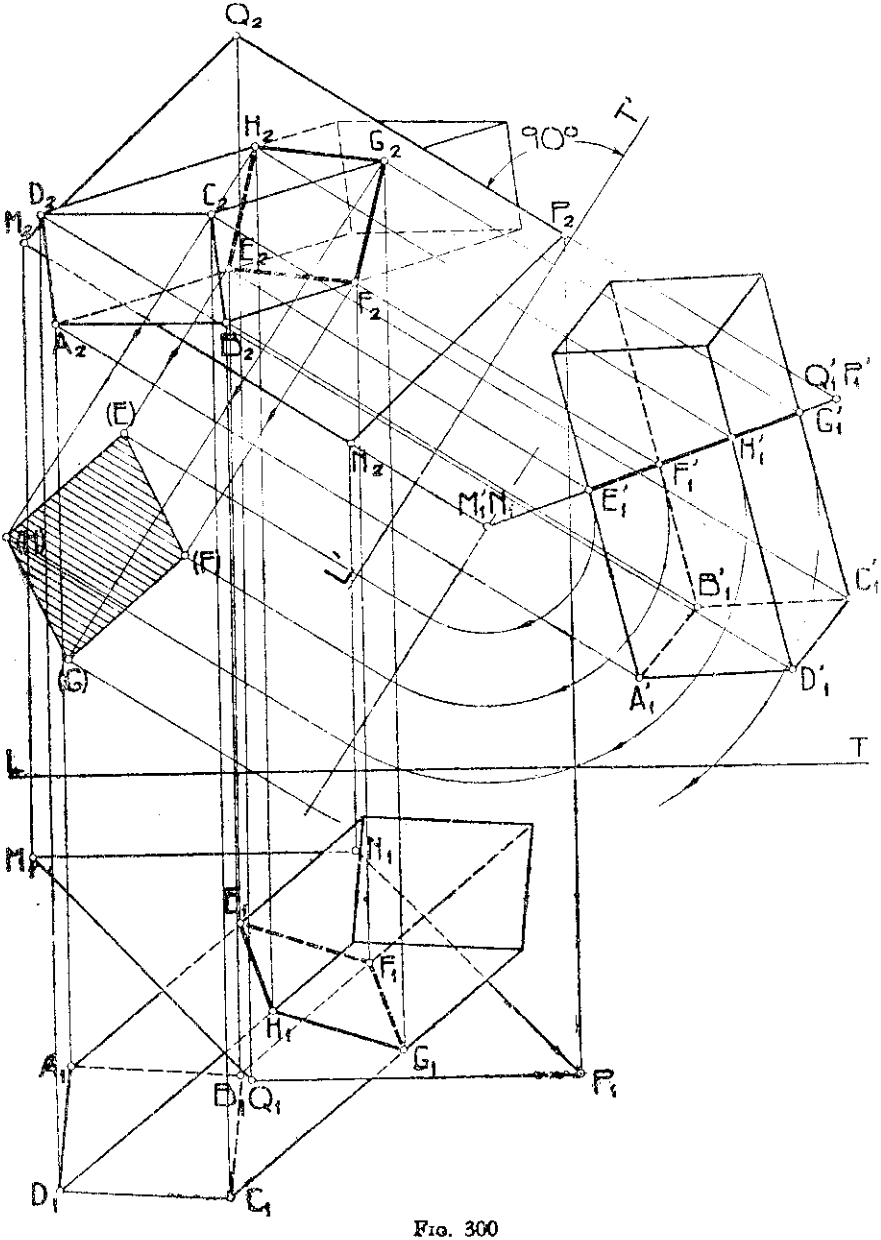


Fig. 300

4. — En la figura 302 hemos hallado por afinidad la sección producida por el plano α. Sabemos que la dirección de afinidad es dada por la dirección de las aristas y que el eje de afinidad es la proyección sobre el plano correspondiente de la intersección de los dos planos secantes (el α y el de la base dada) (4, § 59).

Las trazas del plano *ABCD* son β_1 y β_2; e_1 es entonces la proyección horizontal de la intersección de α y β.

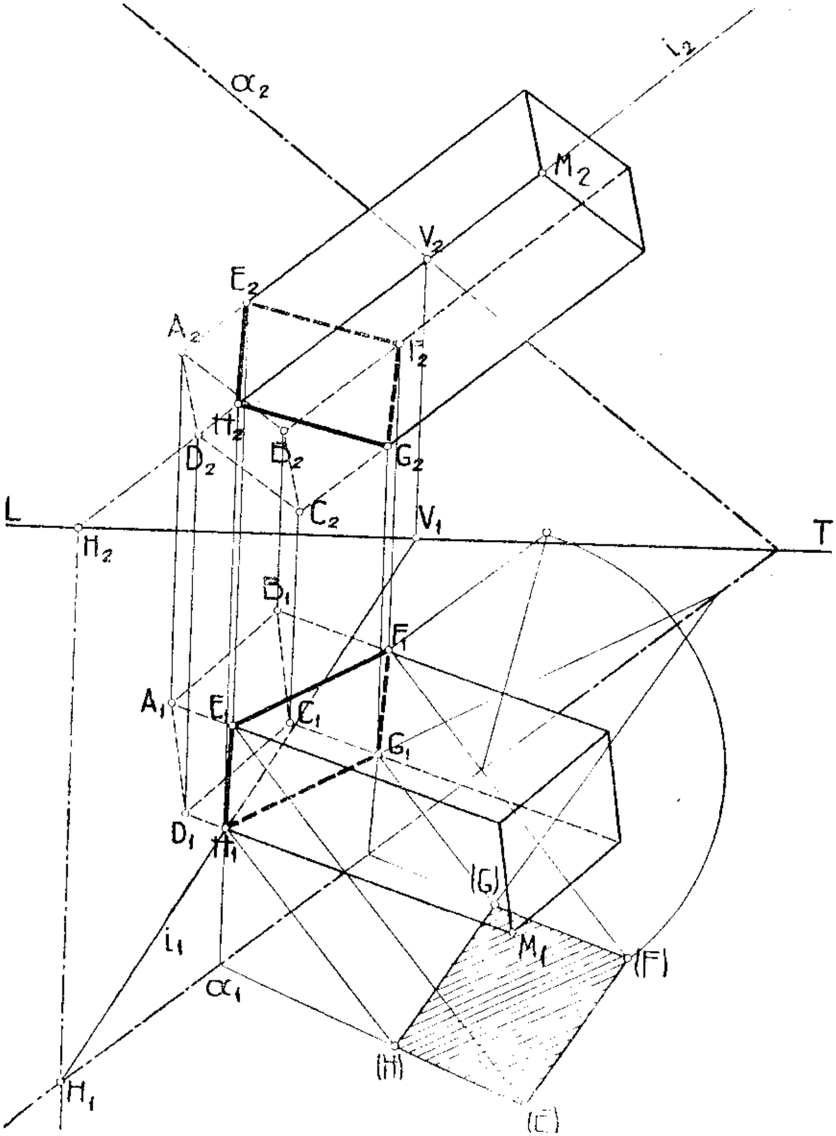


FIG. 301

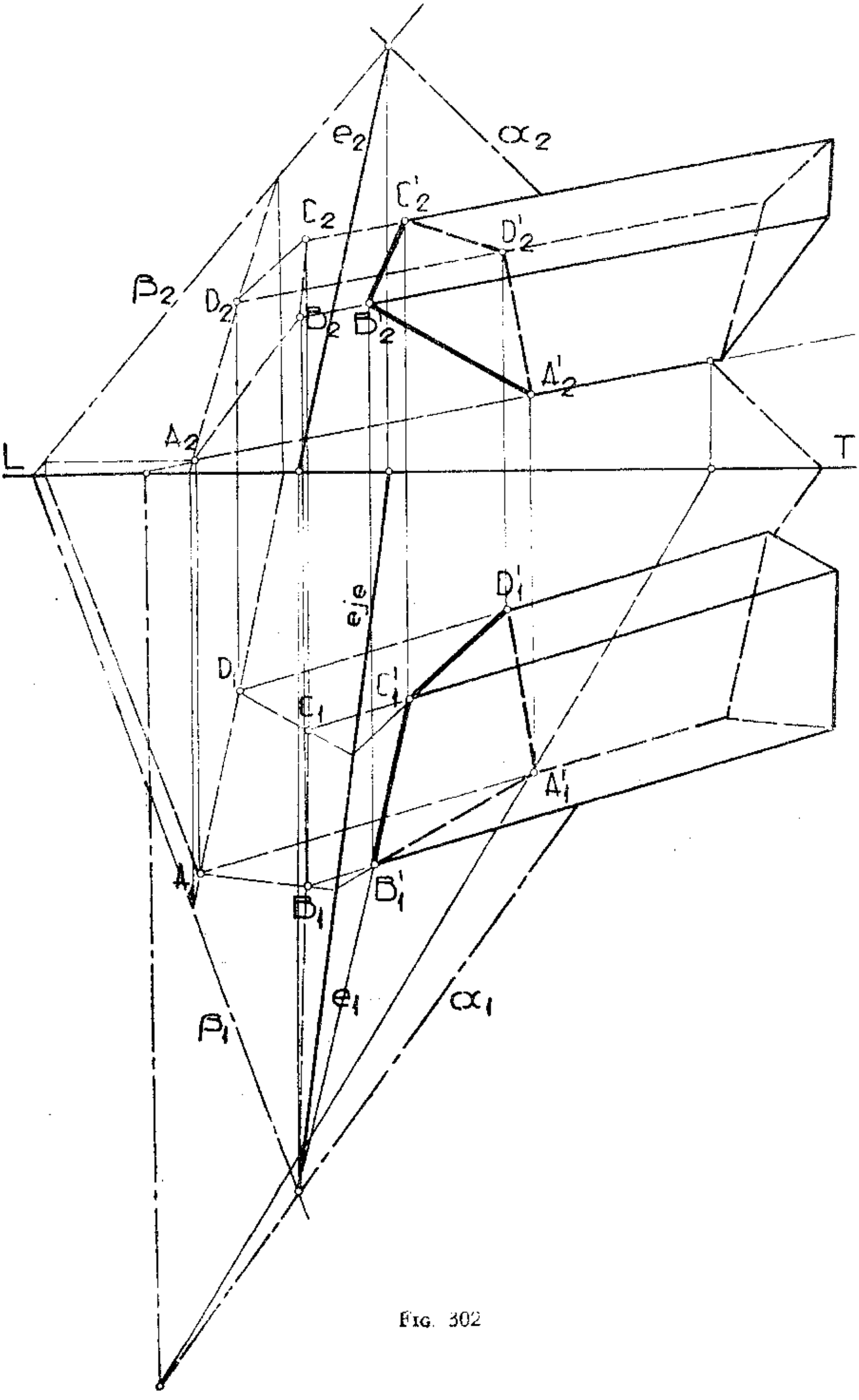


FIG. 302

Hallando la intersección de una arista, la que pasa por A, por ejemplo, con α, se obtiene la proyección horizontal A'_1 de un punto de la sección. Por afinidad se completa luego la figura $A'_1B'_1C'_1D'_1$, proyección horizontal de la sección.

Mediante líneas de referencia resulta $A'_2B'_2C'_2D'_2$.

§ 65. SECCION RECTA

1. — Cuando el plano secante es perpendicular a las aristas del sólido la sección plana es llamada *sección recta.* Ella nos proporciona los *ángulos de escuadría* de piezas de madera o metálicas.

Una propiedad importante de la sección recta de una superficie prismática es la de disponerse según una recta cuando se extiende sobre un plano la superficie del prisma.

El plano secante es dado, generalmente, por medio de sus trazas, de modo que las construcciones resultan simplificadas.

Hallemos entonces la sección recta del paralelepípedo horizontal indicado en la figura 303.

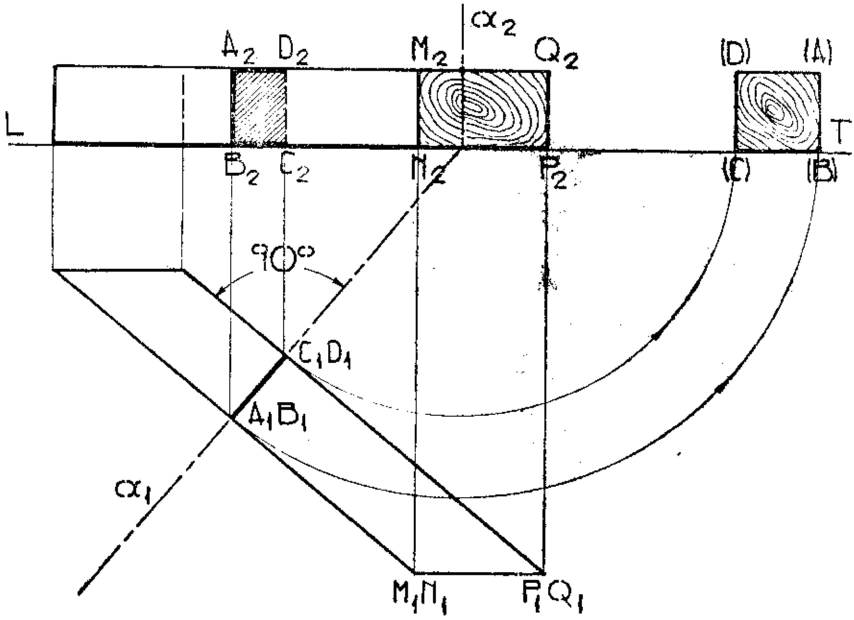


Fig. 303

Después de cuanto hemos visto se encuentra inmediatamente la sección pedida. Su proyección horizontal es $\overline{A_1C_1}$. La vertical es el rectángulo $A_2B_2C_2D_2$. La verdadera magnitud de la sección recta ha sido obtenida rebatiendo el plano (α_1, α_2) que la contiene. Resultó así el rectángulo $(A)(B)(C)(D)$.

La sección recta de un sólido es, de todas las secciones, la de menor extensión. No hay, pues, más que una sola sección recta. En el caso considerado el rectángulo $(A)(B)(C)(D)$ es menor, por ejemplo, que $M_2N_2P_2Q_2$, verdadera magnitud de la sección oblicua producida en el prisma por un plano paralelo al plano vertical.

2. — La figura 304 corresponde a un prisma oblicuo paralelo al plano vertical. El plano secante es, como en el caso anterior, perpendicular a las aristas de la pieza prismática.

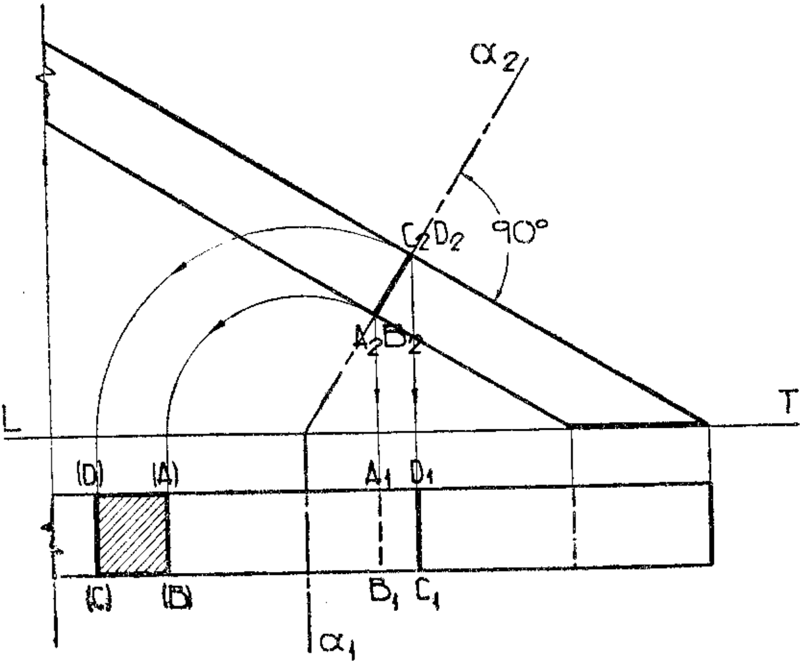


Fig. 304

La construcción es tan simple que omitimos su explicación. La verdadera magnitud de la sección recta es $(A)(B)(C)(D)$.

3. — Como variante se ha considerado en la figura 305 un prisma exagonal. La proyección vertical de la sección recta es el segmento $\overline{A_2D_2}$ de la traza vertical del plano secante. Para construir la proyección horizontal se procede como en los casos anteriores.

La verdadera magnitud de la sección recta se ha rebatido sobre el plano horizontal. El exágono obtenido es, naturalmente, menor que el exágono que sirve de base al prisma, verdadera magnitud de la sección producida por el propio plano π_1.

Si se supone la superficie lateral del prisma abierta según la arista que pasa por *A*, y por sucesivas rotaciones alrededor de las distintas aristas se llevan todas las caras sobre un mismo plano paralelo al plano vertical, el contorno de la sección recta se dispondrá

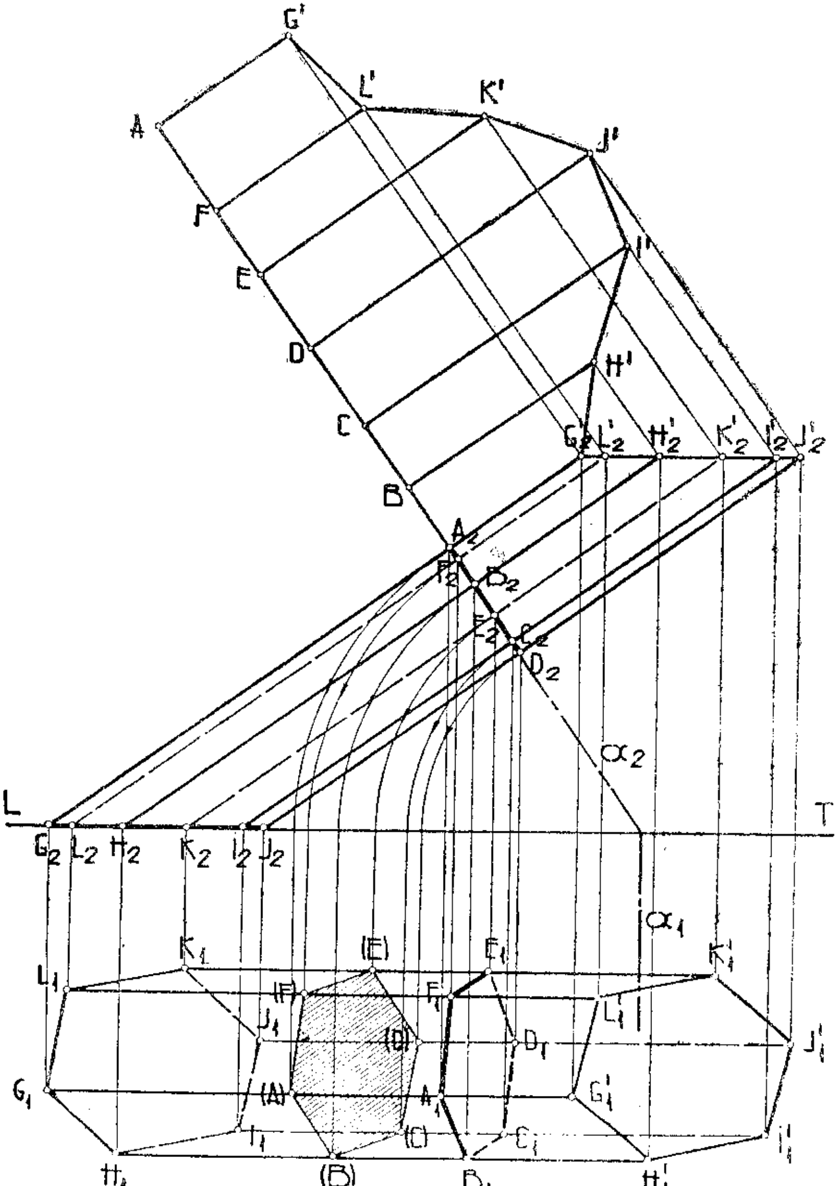


FIG. 305

según un segmento de recta de longitud igual al perímetro de la sección rebatida $(A)(B)(C)(D)(E)(F)$. El hecho de disponerse según un segmento de recta, cuando la superficie del prisma es extendida sobre un plano, constituye la propiedad más importante de la sección recta.

Si, entonces, sobre una recta cualquiera, la traza α_2, por ejemplo, se toman $\overline{A_2B} = \overline{(A)(B)}$, $\overline{BC} = \overline{(B)(C)}$, etc., se obtiene $\overline{A_2A}$, que es el desarrollo, o sea, la *transformada* del perímetro de la sección.

Si se desea dibujar el desarrollo de la superficie lateral del tronco

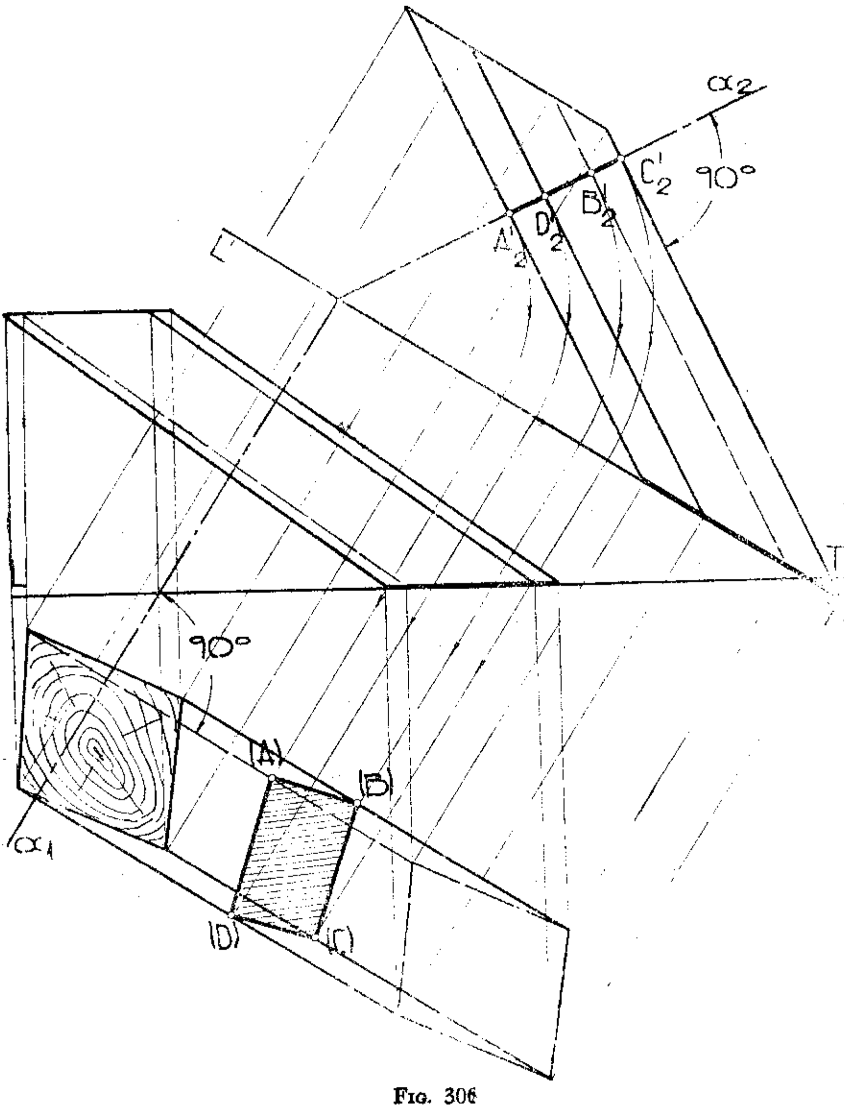


Fig. 306

superior del prisma, basta trazar por A_2, B, C, etc., las perpendiculares al segmento $\overline{A_2A}$, de longitudes respectivamente iguales a $\overline{A_2G'_2}$ $\overline{B_2H'_2}$, $\overline{C_2I'_2}$, etc. La quebrada $G'H'I'J'K'L'G'$ es la transformada de la base superior del prisma dado.

4. — Sea un prisma oblicuo con respecto a los dos planos de proyección (fig. 306). Queremos encontrar la verdadera magnitud de su sección recta.

Para resolver este problema puede emplearse, naturalmente, el

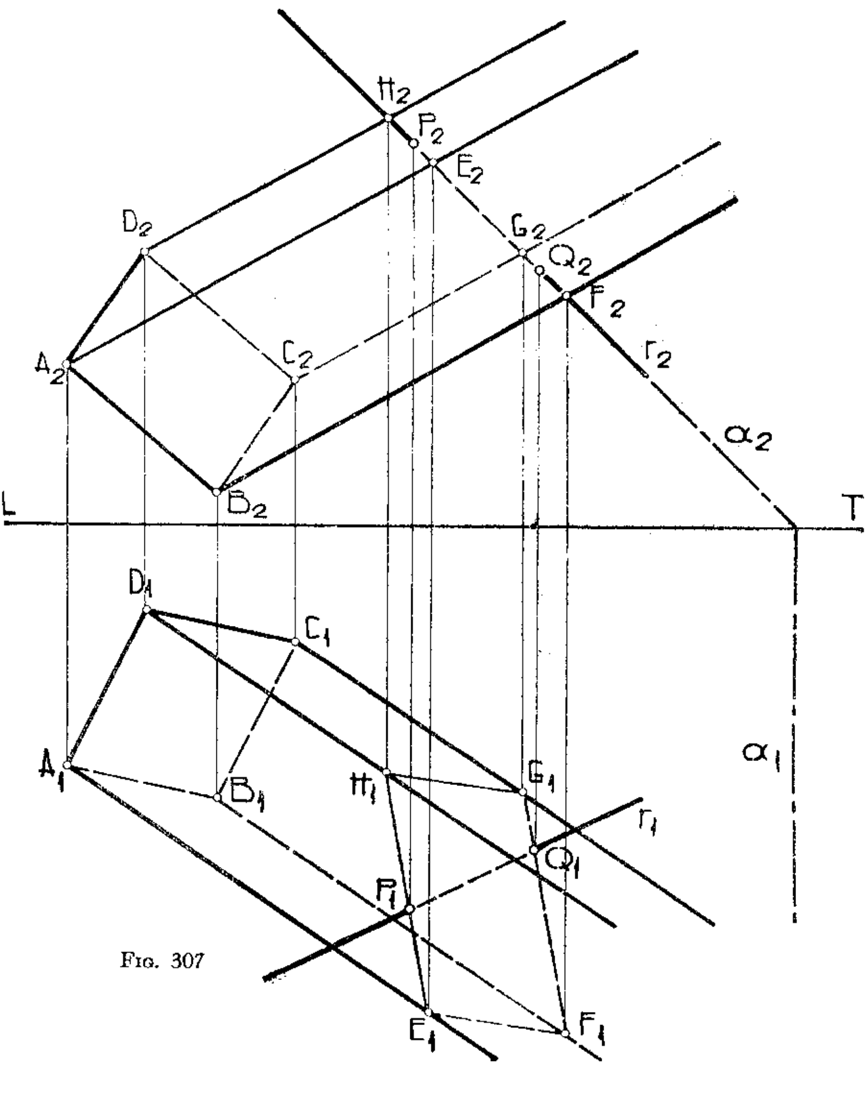


FIG. 307

método general indicado en 3 de § 64, determinando primero las trazas del plano secante perpendicular a las aristas laterales del prisma. No lo haremos así, sin embargo. Transformaremos el problema en otro análogo a los resueltos en los dos números anteriores, para lo cual cambiaremos el plano vertical de modo que la nueva línea de tierra $L'T'$ resulte paralela a las proyecciones horizontales de las aristas (fig. 306). Cortando después mediante el plano (α_1, α_2), per-

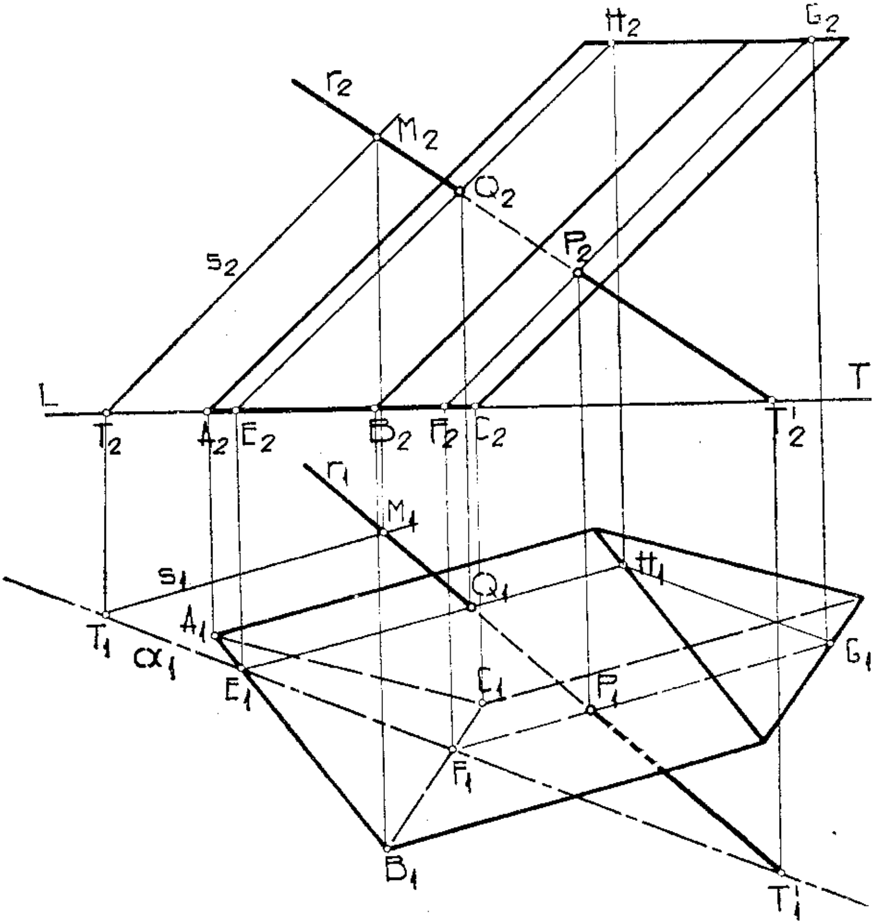


FIG. 308

pendicular a las aristas, y rebatiendo sobre el plano horizontal π_1, resulta la verdadera magnitud $(A)(B)(C)(D)$ de la sección recta

Por ser innecesaria en este caso especial, no se ha dibujado la proyección horizontal de la sección.

§ 66. INTERSECCION DE UNA RECTA CON LA SUPERFICIE DE UN PRISMA

1. — En la figura 307 se ha considerado un prisma oblicuo y una recta r.

Como plano auxiliar se ha utilizado el que proyecta r sobre el plano vertical. El contorno de la sección producida se proyecta horizontalmente en $E_1F_1G_1H_1$ y verticalmente en el segmento $\overline{H_2F_2}$. Los puntos P y Q de intersección de este contorno con la recta r son los puntos buscados.

2. — En la figura 308 se ha utilizado como plano auxiliar el que determinan la recta r y la paralela s a las aristas. Su traza horizontal es α_1. Este plano, paralelo por construcción a las aristas del prisma, corta a éste según el paralelogramo $EFGH$, que permite determinar los puntos P y Q pedidos.

3. — La construcción se simplifica cuando el prisma es perpendicular a uno de los planos de proyección. Es lo que ocurre, por ejemplo, en la figura 309.

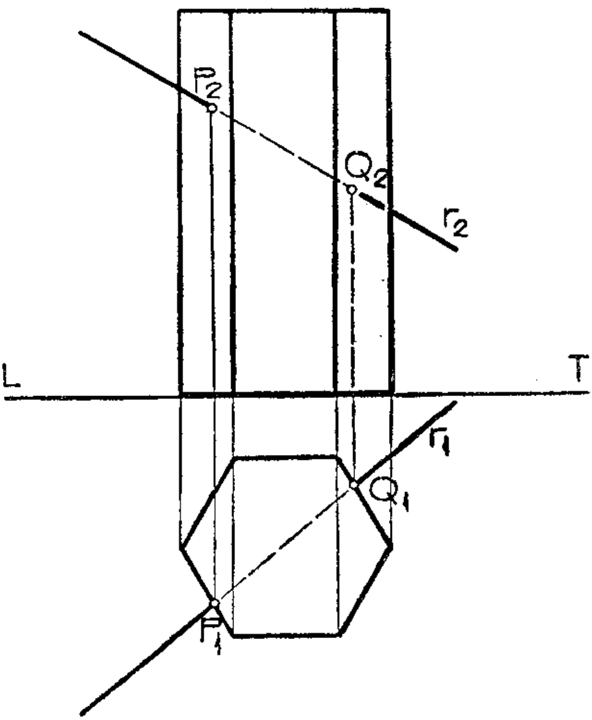
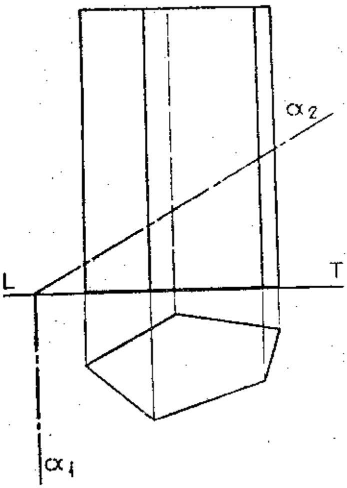


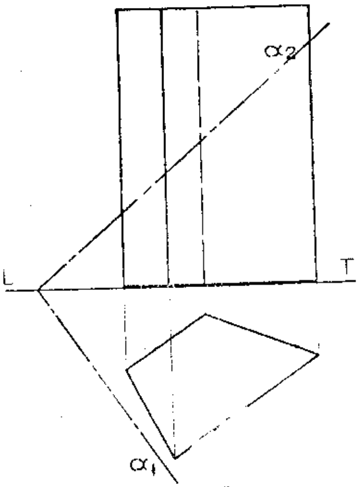
FIG. 309

EJERCICIOS

86. Hallar la sección producida en el prisma que se representa, por el plano de canto α. Dar el perfil de la sección, su verdadera magnitud y desarrollo de la superficie prismática.



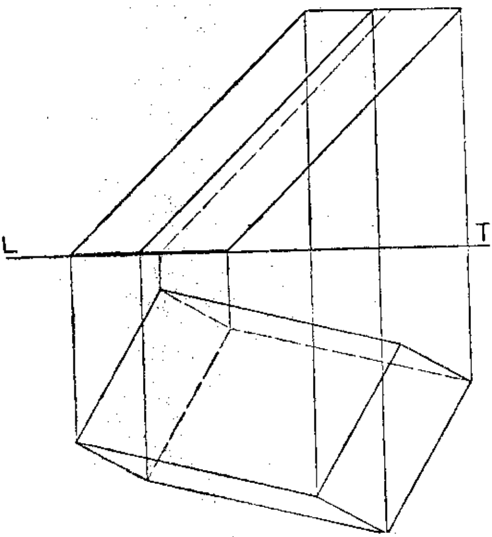
Ejercicio 86



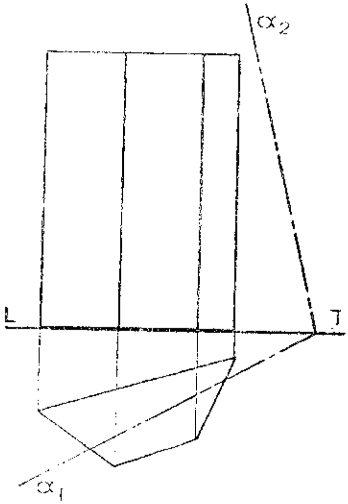
Ejercicio 87

87. Hacer lo mismo con el prisma que se indica.

88. Determinar la sección recta del prisma representado en la figura.



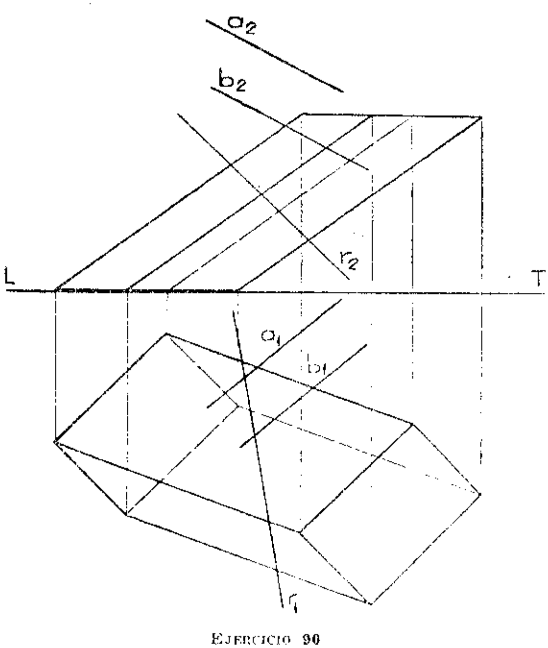
Ejercicio 88



Ejercicio 89

89. Determinar la sección producida por el plano α en la superficie prismática indicada.

90. Dado el prisma indicado en la figura hallar la sección producida por el plano α dado por las rectas a y b, y los puntos de intersección de la recta r y la superficie prismática.



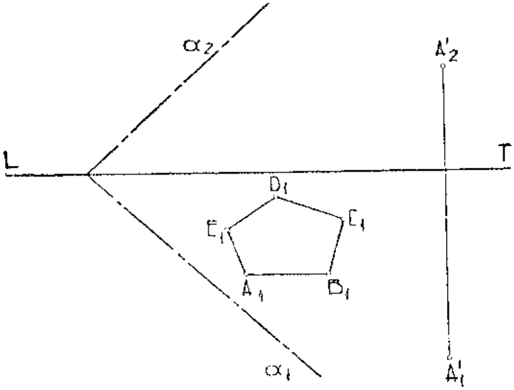
Ejercicio 90

91. La base de un prisma hállase situada en el plano α. Su proyección horizontal es $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$. Se conocen las proyecciones del vértice A' de la otra base.

1º) Completar la representación del prisma.

2º) Hallar su sección recta.

3º) Hacer el desarrollo de la superficie.



EJERCICIO 91

Capítulo XIV

SUPERFICIES

§ 67. DEFINICIONES

1. — En los cursos de *Geometría Elemental* se aprendieron los conceptos intuitivos de *punto*, *línea* y *superficie*. Tratándose de *superficies planas*, las correspondientes a las caras de un cubo, por ejemplo, es fácil concebir sus propiedades características, aun prescindiendo del cuerpo que limitan.

Además de la superficie plana, hay otras, llamadas, como aquélla, *superficies geométricas*, para las cuales, prescindiendo del cuerpo que limitan, es posible enunciar leyes que determinan sus propiedades. Imaginemos, por ejemplo, un disco circular que gira con rapidez alrededor de uno de sus diámetros tomado como *eje de rotación*. Con una velocidad suficientemente grande el disco parecerá, por ilusión óptica, una esfera. Si la circunferencia límite del disco pudiese dejar su traza en cada una de las infinitas posiciones próximas que ocupa, habría engendrado una *superficie esférica*.

2. — Llámase *superficie geométrica el lugar de todas las posiciones que ocupa sucesivamente en el espacio una línea móvil que cambia de posición, o también de forma, según una ley determinada y continua.*

En el caso de la superficie esférica la línea móvil es media circunferencia: se la llama *generatriz*. La ley determinada y continua es que la media circunferencia debe efectuar una revolución entera alrededor de su diámetro, llamado por esto *directriz*.

3. — La *superficie cónica* es otra superficie geométrica. Se define como el lugar de todas las posiciones que ocupa una recta generatriz g (fig. 310)

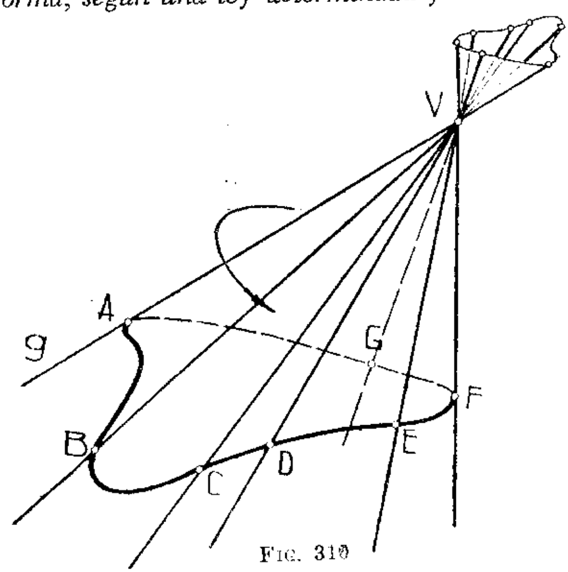


Fig. 310

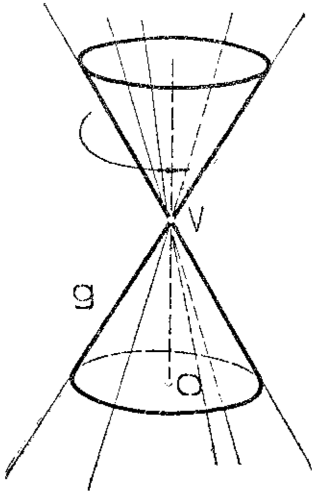


FIG. 311

que, fija en uno de sus puntos, V, por ejemplo, va pasando sucesivamente por los puntos de una curva directriz *ABCD*...

El punto *V* es el vértice de la superficie.

Como la generatriz es ilimitada, la superficie cónica también lo es, y se compone de dos *napas* situadas en partes opuestas con respecto al vértice.

En particular, si la directriz es una circunferencia (fig. 311), la superficie cónica es llamada *circular*.

El cono es el cuerpo limitado por una superficie cónica y una sección cuyo plano encuentra todas las generatrices. La sección es la *base* del cono; la distancia entre el vértice y la base es la *altura*.

4. — La *superficie cilíndrica* (fig. 312) es, en cambio, el lugar de todas las posiciones que ocupa una recta generatriz *g* cuando, manteniéndose siempre paralela a sí misma, va pasando por los puntos de una curva cualquiera *ABCD*..., que es su directriz.

Si la directriz es una circunferencia cuyo plano es normal a la dirección de la generatriz, la superficie cilíndrica es de rotación

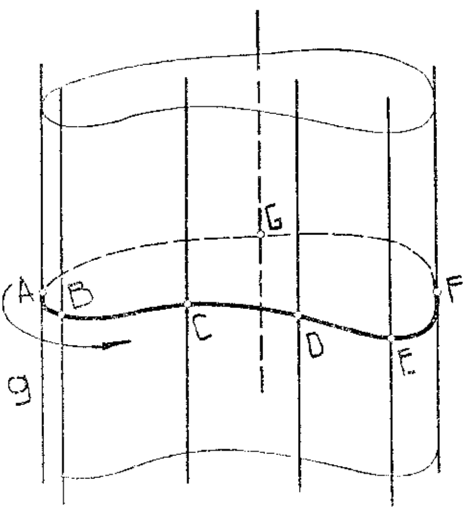


FIG. 312

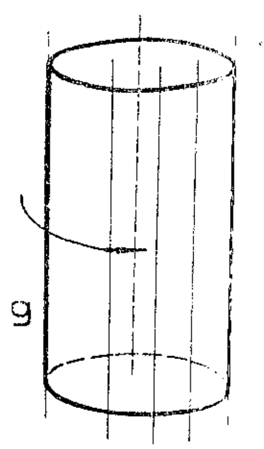


FIG. 313

El *cilindro* es el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica y por dos secciones paralelas entre sí, llamadas *bases* del cilindro.
La distancia entre las bases es la *altura*.

§ 68. CLASIFICACION

1. — De la definición dada resulta que las superficies geométricas pueden ser estudiadas clasificándolas según dos criterios distintos: según la naturaleza de la generatriz o según la ley *que rige el movimiento de la generatriz.*

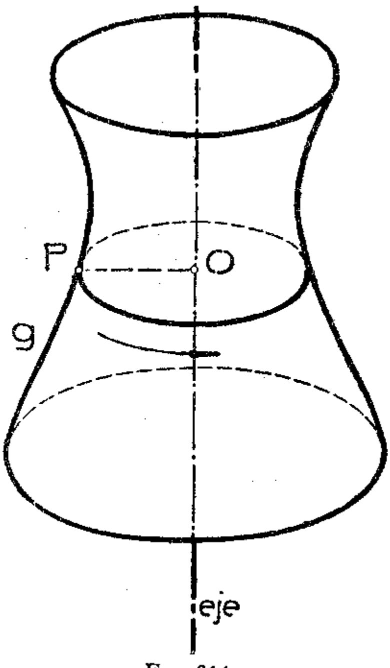


FIG. 314

Atendiendo al primer criterio, las superficies se distinguen en *regladas* y *curvas* (o no regladas).

Las primeras son engendradas por una recta móvil y las segundas por una curva, cualquiera sea, en ambos casos, la ley del movimiento.
Superficies regladas son, por ejemplo, las superficies cónica, cilíndrica, helicoidal, etc.

Superficies no regladas son, por ejemplo, la esférica, la del paraboloide, elíptico, etc.

Atendiendo al segundo criterio, es decir, a la ley del movimiento de la generatriz, las superficies se distinguen en superficies *de revolución* (o de rotación) y superficies que *no son de revolución.*

Las primeras son engendradas por una línea generatriz que gira alrededor de una recta fija, eje de rotación, con la cual se supone conectada invariablemente. Cada punto P de la generatriz (fig. 314) describe una circunferencia cuyo plano es perpendicular al eje y cuyo radio es la distancia $\overline{OP}$ del punto al eje.

Las segundas son las engendradas en forma distinta a la indicada.

2. — Los dos criterios empleados para clasificar las superficies son independientes uno de otro. Se comprende entonces que tanto una superficie reglada como una no reglada puede ser o no de revolución, y recíprocamente. Más aún, una misma superficie puede, a veces, ser engendrada de modos distintos.

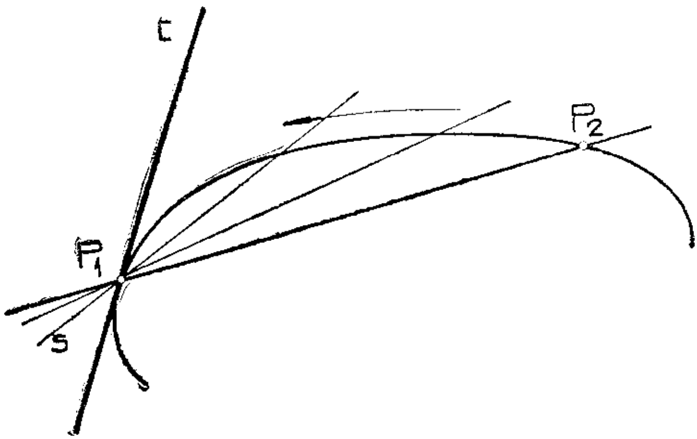


FIG. 315

3. — Las superficies regladas suelen ser divididas en *desarrollables* y *no desarrollables.* Las primeras pueden ser extendidas sobre un plano sin roturas ni dobleces. Ejemplos: las superficies cónica y cilíndrica.

Las segundas no pueden ser extendidas sobre un plano en forma indicada. Ejemplos: helicoides (recto y oblicuo), cuerno de vaca.

En las superficies desarrollables dos generatrices consecutivas cualesquiera se encuentran en un mismo plano, es decir, son paralelas o concurrentes.

§ 69. RECTAS Y PLANOS TANGENTES A UNA SUPERFICIE REGLADA

1. — Se sabe que la tangente a una línea en uno de sus puntos P_1 (fig. 315) es el límite de las sucesivas posiciones que ocupa la

secante P_1P_2 cuando el punto P_2 se acerca indefinidamente al P_1 hasta confundirse con él.

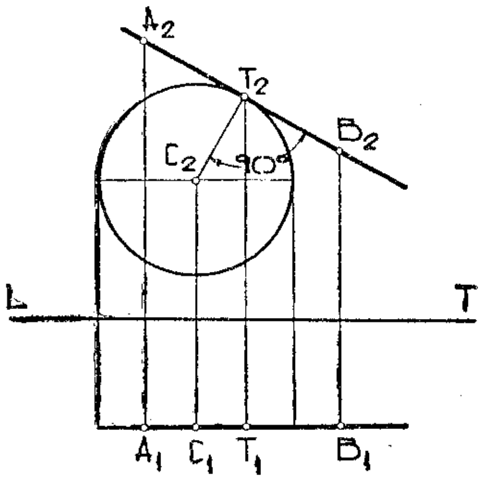


FIG. 316

Se sabe también que la tangente a una curva plana pertenece al plano de la curva. Así, por ejemplo, la recta $AB \equiv (A_1B_1, A_2B_2)$, de

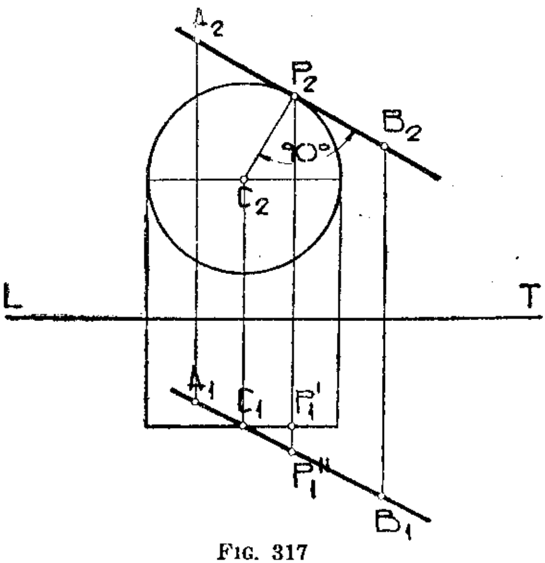


FIG. 317

la figura 316, es tangente a la circunferencia representada. No es tangente, en cambio, la recta AB de la figura 317.

2. — Una recta es tangente a una superficie en uno de sus puntos cuando lo es en ese punto a una línea cualquiera de la superficie. Así, por ejemplo, la recta a de la figura 318 es tangente en P a la superficie cónica representada por serlo a la línea l de la superficie.

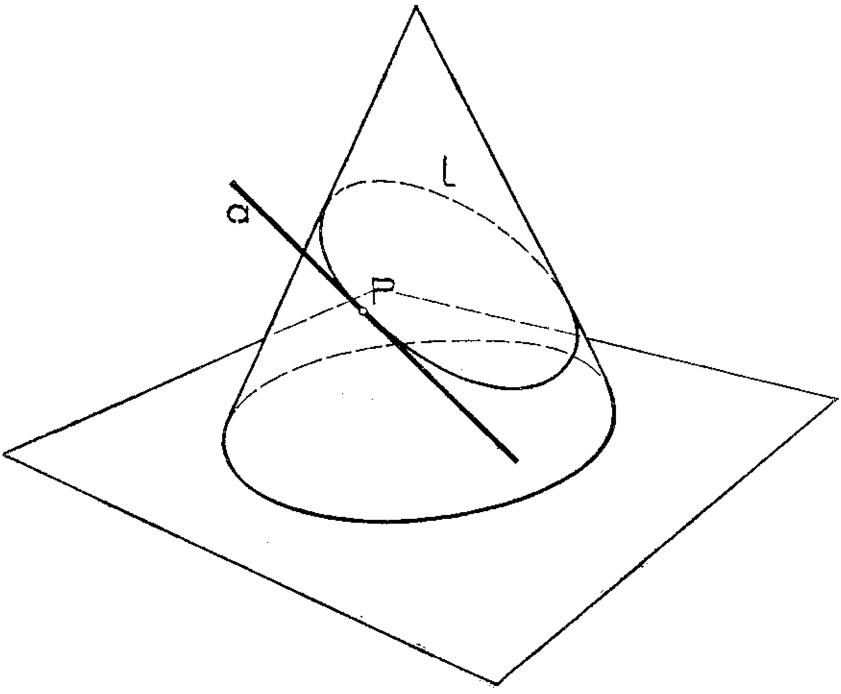


FIG. 318

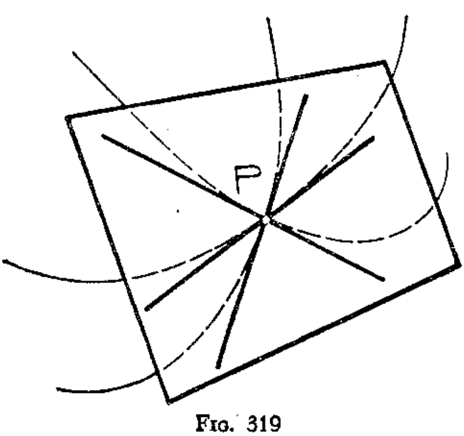


FIG. 319

3. — Se demuestra que si en un punto P de una superficie se trazan las tangentes a las infinitas líneas de dicha superficie que pasan por él (fig. 319), esas tangentes son coplanares. El plano así definido se llama *plano tangente* a la superficie en el punto P considerado. Puesto que un plano es determinado por dos de sus rectas para individualizar el **plano tangente a una superficie, en un punto dado ba**

ta determinar las tangentes a dos cualesquiera de sus líneas que pasan por ese punto.

4. — Notando que la recta es una línea cuya tangente es la recta misma se comprende que, tratándose de una superficie reglada, el plano tangente en uno de sus puntos queda determinado por la recta generatriz y por la tangente a una línea de la superficie que pasa por ese punto.

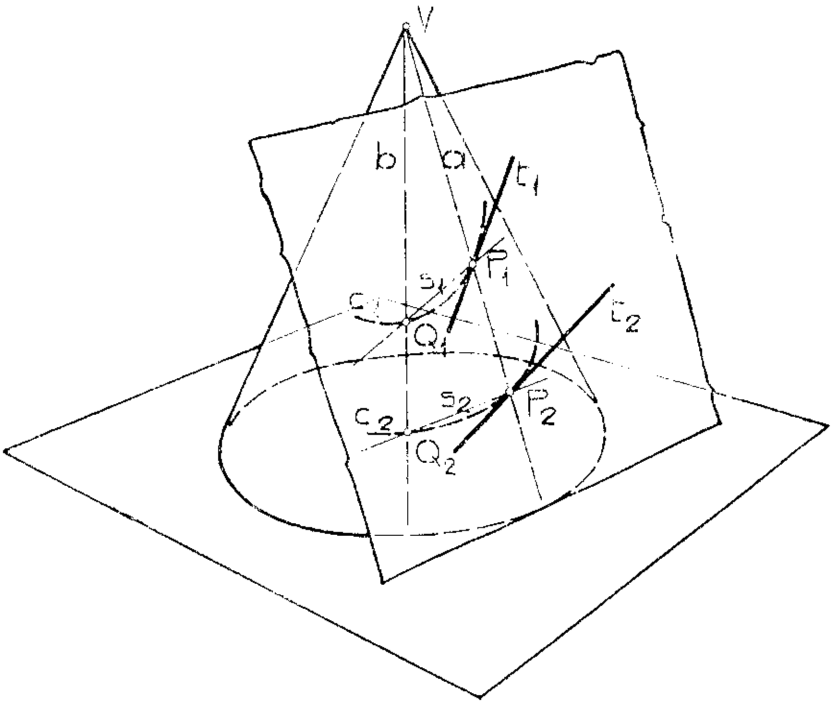
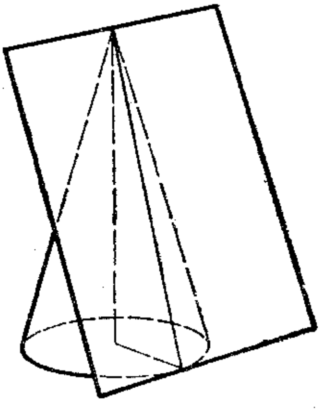


FIG. 320

5. — Supongamos una superficie cónica y sean (fig. 320) P_1 y P_2 dos puntos cualesquiera de una de sus generatrices, a. Por P_1 y P_2 hagamos pasar las curvas c_1 y c_2 de la superficie. Cortarán otra generatriz, b, por ejemplo, en los puntos Q_1 y Q_2. Si la generatriz b, en el movimiento establecido para engendrar la superficie cónica, se acerca cada vez más a la generatriz a, las secantes s_1 y s_2 tienden, respectivamente, a las tangentes t_1 y t_2 a las curvas c_1 y c_2 en los puntos P_1 y P_2, y se vuelven tales tangentes cuando b se ha acercado indefinidamente a la generatriz a.

Además, s_1 y s_2 son coplanares porque pertenecen ambas al plano de las generatrices a y b, y siguen siendo coplanares al volverse t_1 y t_2. En ese instante se tendrá en P_1 un plano tangente a la superficie, definido por t_1 y P_1P_2, y en P_2 otro plano también tangente a la superficie, definido por t_2 y P_1P_2. Pero entonces estos planos no son sino uno solo, es decir, el determinado por t_1 o t_2 y la recta P_1P_2 (o sea la generatriz a). Como al mismo resultado se llegaría considerando otro punto cualquiera de a, puede afirmarse que el plano tangente en un punto de una superficie cónica es el mismo para todos los puntos de la generatriz que pasa por ese punto. Esa generatriz es la *generatriz de tangencia* o *de contacto*.

6. — En forma análoga se demuestra la misma propiedad para cualquier otra superficie desarrollable.



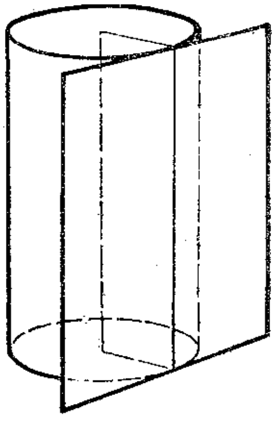


Fig. 321

7. — Es evidente que, tratándose de conos y cilindros rectos, el plano tangente a la superficie a lo largo de una generatriz es perpendicular al plano formado por ésta y el eje (fig. 321).

8. — Se comprende sin dificultad que la tangente a una sección cualquiera de una superficie desarrollable es la intersección del plano tangente en el punto considerado y el plano secante que produce la sección.

9. — Es fácil demostrar que *la proyección de la tangente a una curva sobre un plano es tangente a la proyección de la curva sobre el mismo plano.*

En efecto, sea c la curva y t su tangente en el punto P (fig. 322). Las proyectantes de la curva c y de la tangente t determinan una superficie cilíndrica y un plano, tangentes a lo largo de la generatriz PP_1. Las proyecciones c_1 y t_1 de c y t resultan entonces tangentes, pues no son sino intersecciones del plano de proyección α con la superficie cilíndrica y con el plano tangente.

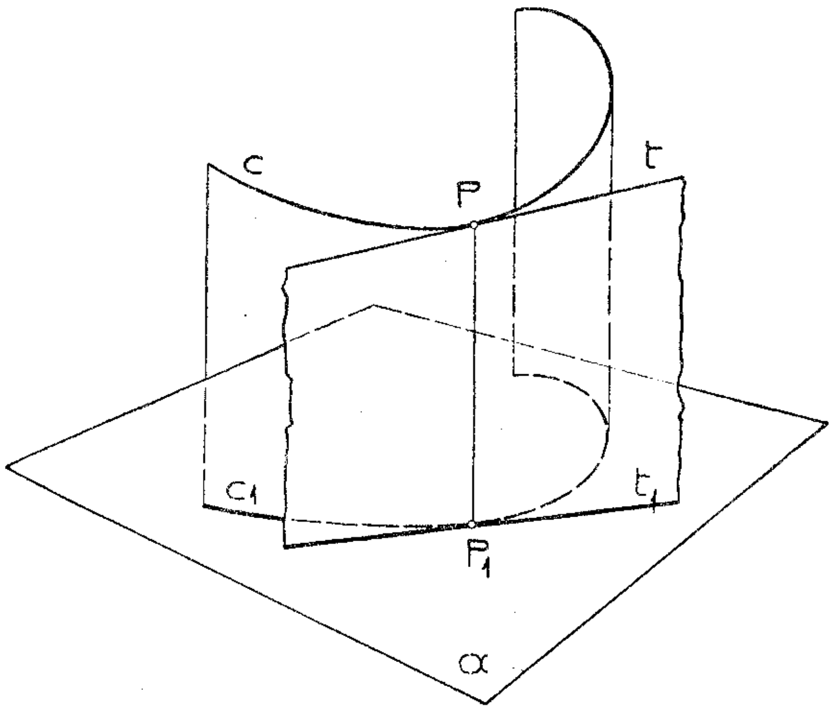


FIG. 322

10. — Resulta entonces que si dos curvas son tangentes, también lo son sus proyecciones. La figura 323 representa las proyecciones de dos circunferencias tangentes.

11. — En general, para hallar el plano tangente a una superficie reglada desarrollable en un punto dado, determinaremos primero la generatriz que pasa por el punto, luego la tangente a una curva cual-

quiera de la superficie en el punto en que la generatriz de contacto encuentra la curva.

Así, por ejemplo, para hallar el plano tangente en el punto P a la superficie cónica indicada en la figura 324, se determina el plano formado por la generatriz p y la recta t, tangente en P_1 a la curva c de la superficie.

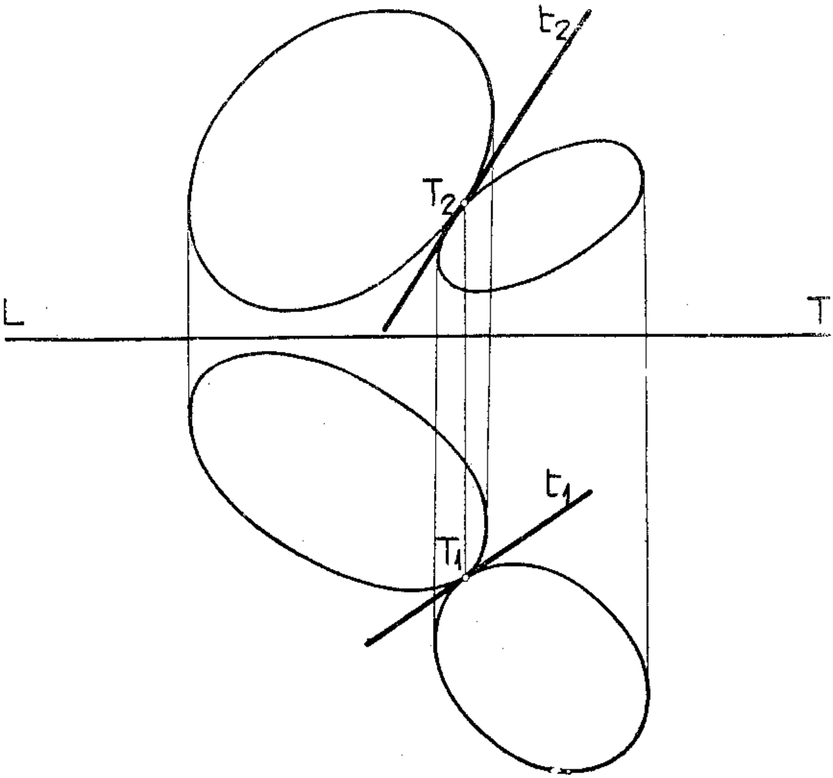


FIG. 323

12. — Llámase *normal* a una superficie, en uno de sus puntos P, la perpendicular en ese punto al plano tangente a la superficie en el mismo punto P.

§ 70. RECTAS Y PLANOS TANGENTES A UNA SUPERFICIE DE REVOLUCION

1. — De la definición dada en el parágrafo 68 resulta que todo plano normal al eje corta la superficie de revolución según una o más circunferencias. Por esto una superficie de revolución puede ser considerada también como engendrada por una circunferencia cuyo centro se desliza a lo largo del eje, mientras su plano permanece siempre perpendicular al eje y el radio varía de modo que la circunferencia se apoya constantemente en la línea g (fig. 325).

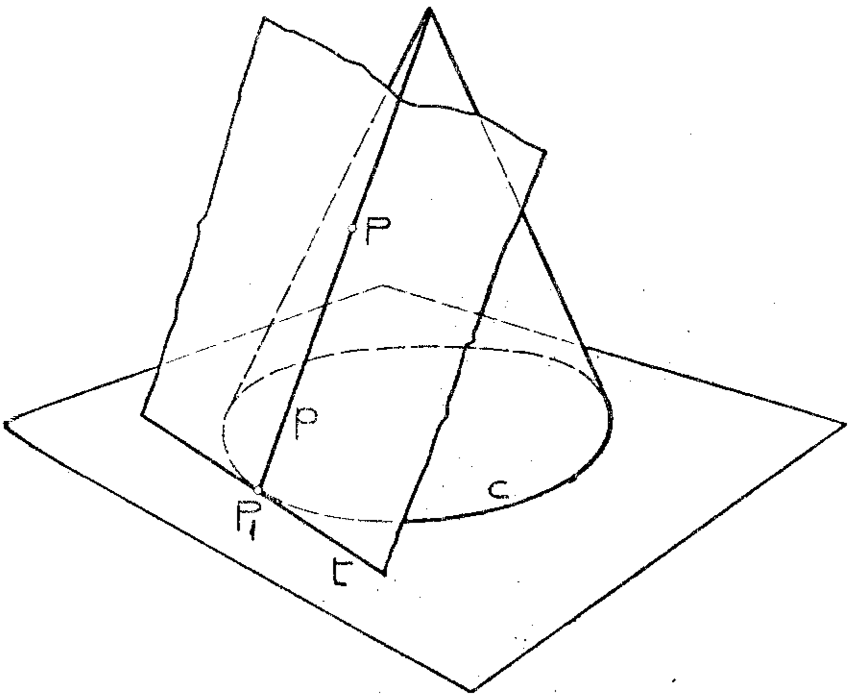


FIG. 324

Las circunferencias según las cuales una superficie de revolución es cortada por planos normales al eje reciben el nombre de *paralelos*. De éstos, el que tiene mayor radio se llama *paralelo ecuatorial*; el que tiene menor radio se llama *paralelo de garganta*.

Las secciones de una superficie de revolución con un plano que pasa por el eje se denominan *meridianos*. Distínguese como *meridiano principal* el que está en el plano que pasando por el eje es paralelo al plano vertical de proyección.

Cada meridiano es una curva simétrica con respecto al eje; por esto la superficie de rotación puede ser considerada como engendrada mediante un giro de 360° alrededor del eje, de medio meridiano.

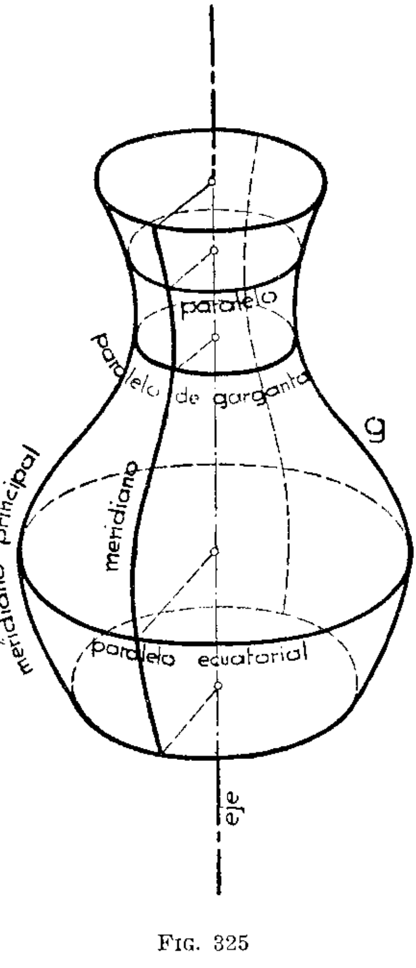


FIG. 325

Por cada punto de una superficie de revolución pasan un paralelo y un meridiano.

2. — En una superficie de revolución llamaremos *puntos correspondientes* de dos paralelos los puntos comunes a estos dos paralelos y a medio meridiano. Así, en la figura 326 los puntos P_1 y P_2 de

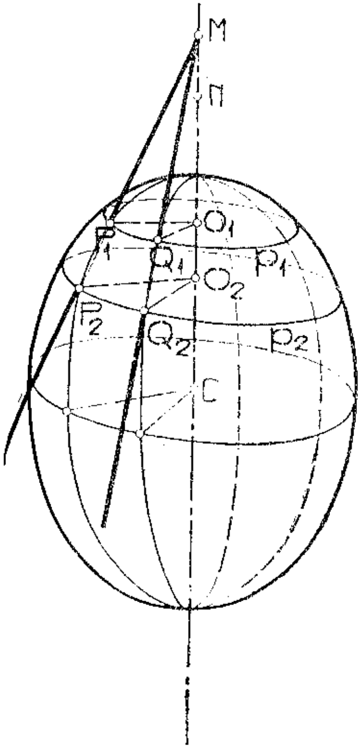


FIG. 326

los paralelos p_1 y p_2 son correspondientes.

Es fácil demostrar que las rectas P_1P_2 y Q_1Q_2, que unen pares de puntos correspondientes de dos paralelos p_1 y p_2, concurren a un mismo punto del eje. En efecto: si M es el punto en que P_1P_2 encuentra el eje, se tiene

$$\frac{\overline{MO_1}}{\overline{MO_2}} = \frac{\overline{P_1O_1}}{\overline{P_2O_2}}. \qquad [1]$$

Si admitimos que Q_1Q_2 encuentra el eje en otro punto N distinto de M, se tendría

$$\frac{\overline{NO_1}}{\overline{NO_2}} = \frac{\overline{Q_1O_1}}{\overline{Q_2O_2}}. \qquad [2]$$

Como $\overline{P_1O_1} = \overline{Q_1O_1}$ y $\overline{P_2O_2} = \overline{Q_2O_2}$, resulta, de las igualdades [1] y [2],

$$\frac{\overline{MO_1}}{\overline{MO_2}} = \frac{\overline{NO_1}}{\overline{NO_2}},$$

o también

$$\frac{\overline{MO_1}}{\overline{MO_1} + \overline{O_1O_2}} = \frac{\overline{NO_1}}{\overline{NO_1} + \overline{O_1O_2}}$$

relación que exige necesariamente la condición

$$\overline{MO_1} = \overline{NO_1}.$$

Los puntos M y N son, pues, uno mismo.

3. — Si imaginamos que el paralelo p_2 se acerca indefinidamente a p_1, en el límite, es decir, cuando P_2 se acerca indefinidamente a P_1 y Q_2 a Q_1, las rectas P_2P_1 y Q_2Q_1, concurriendo siempre a un mismo punto del eje, se transforman en tangentes a la superficie de revolución en los puntos P_1 y Q_1, respectivamente.

Como lo mismo resultaría considerando otros puntos correspondientes de los mismos paralelos, puede afirmarse que *si en los infinitos puntos de un paralelo* p *se conducen las tangentes a la superficie, ellas forman la superficie de un cono recto que se dice circunscripta a la superficie de revolución a lo largo del paralelo considerado.*

Resulta entonces que las generatrices de esa superficie cónica son tangentes a los meridianos de la superficie de revolución en los distintos puntos del paralelo p.

En particular, la superficie cónica circunscripta a lo largo del ecuador a un elipsoide de revolución, y por lo tanto también a una esfera, se vuelve una superficie cilíndrica recta.

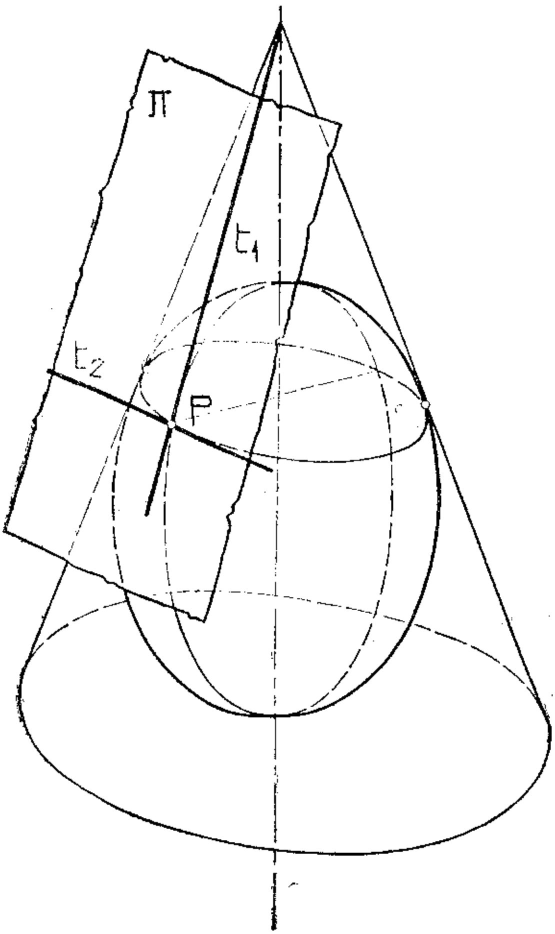


Fig. 327

4. — El plano tangente a una superficie de revolución en uno de sus puntos es tangente a la superficie cónica que le es circunscripta según el paralelo al cual pertenece el punto.

Sea π el plano tangente en el punto P a la superficie de revolución dada en la figura 32·.

El está determinado por las tangentes t_1 al meridiano y t_2 al paralelo que pasan por P. Pero el plano tangente a la superficie cónica circunscripta según el paralelo que contiene P también está determinado por t_1 (generatriz) y t_2 (11, § 69).

5. — De acuerdo con lo anterior, y recordando lo establecido en 7, § 69, *el plano tangente a una superficie de revolución es perpendicular al plano meridiano que pasa por el punto de contacto.*

6. — En particular los planos tangentes en los infinitos puntos de un meridiano son todos perpendiculares al plano de este meridiano y envuelven un cilindro que es circunscripto a la superficie de revolución según el meridiano considerado. Y las generatrices de este cilindro son las tangentes a los distintos paralelos en los puntos de aquel meridiano.

7. — Puesto que en todo punto de una superficie de revolución el plano tangente es perpendicular al plano del meridiano que contiene el punto, *la normal a la superficie estará siempre en el plano meridiano*, encontrando al eje o siéndole paralelo.

En la figura 328, PN es la normal en el punto P.

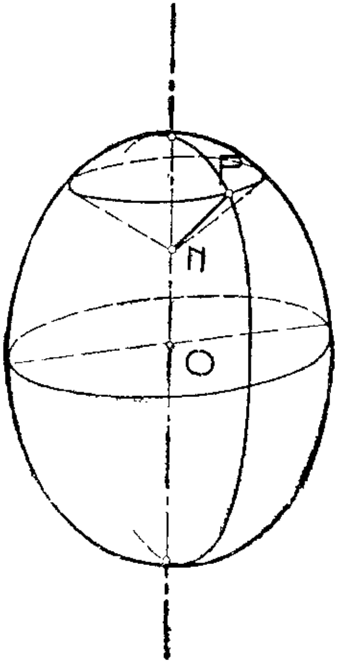


Fig. 328

Las normales relativas a los distintos puntos de un paralelo concurren a un mismo punto del eje, formando una superficie cónica de rotación porque, por ejemplo, si la normal en P encuentra el eje en N, mientras P recorre el paralelo, el punto N no se mueve.

Capítulo XV

REPRESENTACION DE CURVAS Y DE SUPERFICIES

§ 71. GENERALIDADES

1. — Las proyecciones de una curva alabeada o plana sobre dos planos son dos curvas planas.

Para cada una de ellas será necesario determinar un número suficiente de puntos, de modo que sea posible su trazado. A menudo

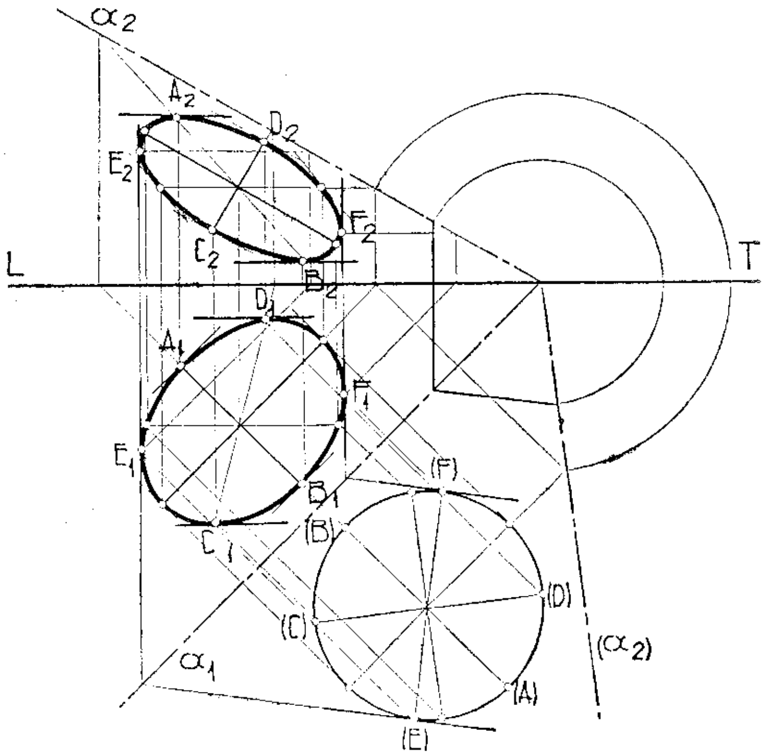


Fig. 329

conocida la naturaleza de las proyecciones, convendrá determinar para cada una aquellos elementos (puntos o líneas) con los cuales, mediante procedimientos enseñados por la Geometría, pueda efectuarse el trazado de la curva proyección.

Así, sabiendo que las proyecciones de una circunferencia son elipses, bastará determinar los ejes, pues, dados éstos, una elipse queda individualizada y puede ser construída por puntos o como lugar geométrico.

2. — En la representación de una curva plana es conveniente determinar, cuando resulte fácil:

1º Los puntos laterales, es decir, el punto de la curva *más a la derecha* y el punto *más a la izquierda*; en ellos la tangente a cada proyección es perpendicular a la línea de tierra

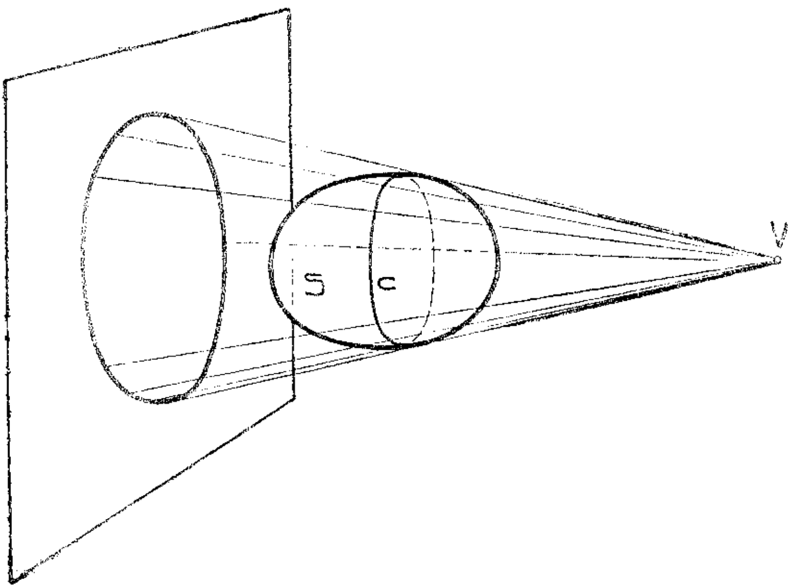


Fig. 330

2º El punto *más alto* y el punto *más bajo*, que se deducen de la proyección vertical de la figura, así como el punto *anterior* y el *posterior*, que se deducen de la proyección horizontal. En los dos primeros las tangentes son rectas horizontales del plano; en los dos últimos son frontales.

En las proyecciones de la circunferencia de figura 329, A y B son los puntos más alto y más bajo; C y D, los puntos anterior y posterior; E y F, los laterales.

3. — Supongamos una superficie S y sea V el vértice de una superficie cónica circunscripta a S. Si c es la curva de contacto (fig. 330), ella divide la superficie S en dos regiones: una visible para el que mire la superficie desde V; la otra invisible.

La curva c constituye el *contorno aparente* de S para un observador situado en V, porque las generatrices de la superficie cónica son también las visuales que parten de V hacia los puntos límites visibles de S.

Si V se aleja de S, la curva c cambia, desplazándose sobre S, y, naturalmente, aumenta la región visible. Cuando V se aleja infinitamente en una dirección determinada, por ejemplo, perpendicular a π_1, las visuales desde V serán todas paralelas y *el contorno aparente* ***de S con respecto al plano*** π_1 es la curva de contacto de la superficie cilíndrica circunscripta a S y perpendicular a π_1 (fig. 331).

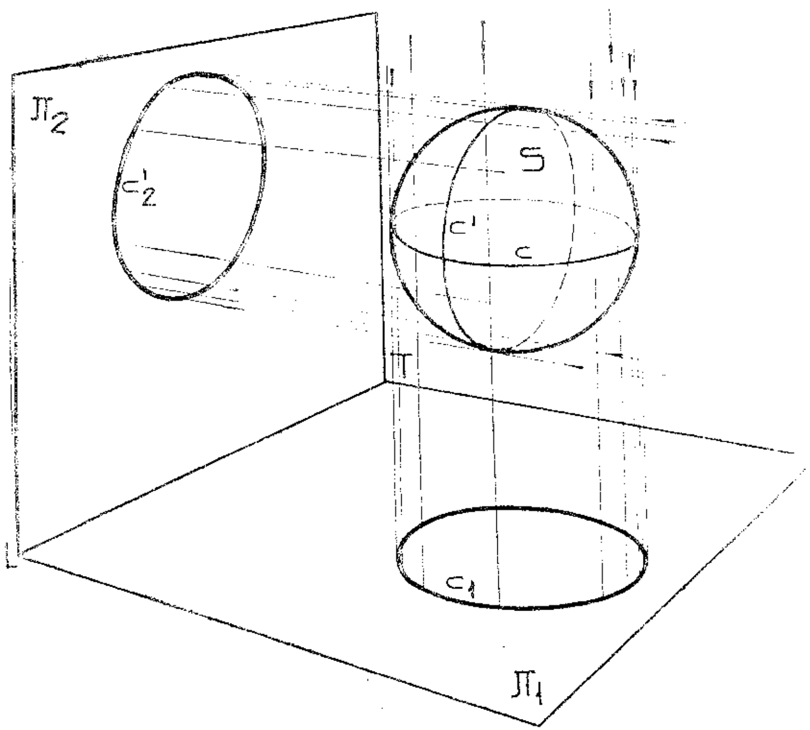


Fig. 331

La proyección horizontal c_1 de c es la traza horizontal de aquella superficie cilíndrica, limita las proyecciones horizontales de los puntos de S y constituye realmente el contorno aparente de S sobre π_1 para el observador que mire esta superficie en dirección perpendicular a π_1 desde un punto infinitamente alejado.

En la misma forma se obtiene el *contorno aparente de S* con respecto a π_2 y su proyección sobre este plano.

4. — *El contorno aparente de una superficie sobre un plano de proyección es tangente a la proyección sobre el mismo plano de toda línea que perteneciendo a la superficie encuentra en el espacio el contorno aparente.*

Sean: S la superficie, c su contorno aparente con respecto al plano π_1, l la línea, P el punto de encuentro de c y l (fig. 332).

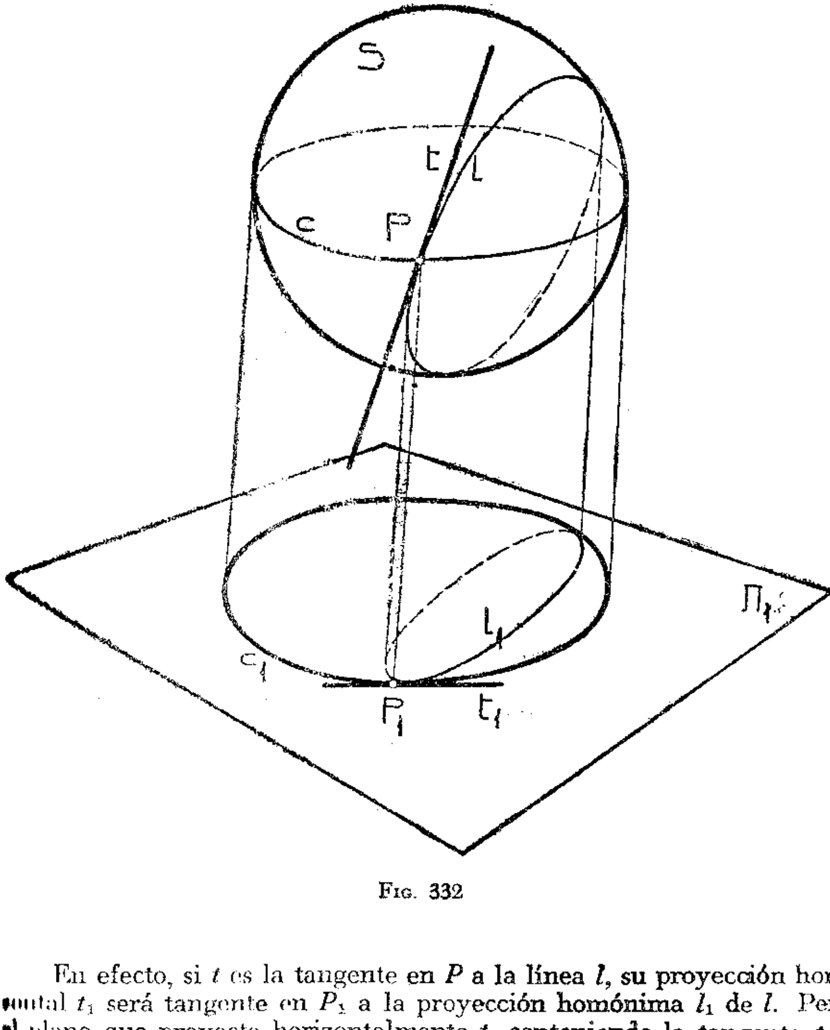


Fig. 332

En efecto, si t es la tangente en P a la línea l, su proyección horizontal t_1 será tangente en P_1 a la proyección homónima l_1 de l. Pero el plano que proyecta horizontalmente t, conteniendo la tangente t y la proyectante PP_1 de un punto del contorno aparente, es un plano tangente a la superficie cilíndrica circunscripta a la superficie S perpendicularmente a π_1. En consecuencia, su traza horizontal, que no es

sino t_1, es tangente a la traza de esa superficie cilíndrica, que no es sino c_1. Las proyecciones l_1 y c_1 vienen a tener así la misma tangente t_1 en P_1; son, pues, curvas tangentes.

§ 72. REPRESENTACION DE SUPERFICIES

1. — Conociendo las proyecciones de la directriz de una superficie, la generatriz y la ley del movimiento de ésta, la superficie queda determinada y puede ser representada sobre los dos planos de proyección. Bastará construir un número suficiente de posiciones de la generatriz para notar la continuidad de la superficie.

Pero, en general, la mejor manera para apreciar la forma de la superficie es dada por el conocimiento de las trazas y de los contornos aparentes sobre los dos planos de proyección. Más aún, puede decirse que los contornos aparentes sobre los dos planos de proyección constituyen la mejor representación de una superficie sobre dos planos de proyección.

2. — Como en el caso de los poliedros, siendo distintas las direcciones según las cuales se supone observada la superficie sobre los dos planos de proyección, distintas son también las partes visibles sobre cada uno de esos planos y distintos, en general, los correspondientes contornos aparentes.

3. — Para distinguir en la representación las partes visibles de las invisibles se procede con el criterio expuesto en el caso de los poliedros (2, § 54).

Capítulo XVI

SUPERFICIES CONICAS

§ 73. REPRESENTACION

1. — Una superficie cónica resulta individualizada si se conocen las proyecciones d_1 y d_2 de la curva directriz y V_1 y V_2 del vértice (fig. 333).

Dados estos elementos pueden construirse fácilmente cuantas generatrices se desean. Las trazas de un número suficiente de éstas permiten dibujar las trazas de la superficie, así como sus contornos aparentes.

Para determinar una generatriz cualquiera, la que pasa por el punto A de la directriz, por ejemplo, basta trazar las rectas V_2A_2 y V_1A_1. La traza horizontal $H \equiv (H_1, H_2)$ de esta generatriz es un punto de la traza horizontal de la superficie cónica.

Y así para otras generatrices.

Para obtener los contornos aparentes se dibujan las generatrices límites, tangentes a las proyecciones de la directriz. Las generatrices que limitan el contorno aparente horizontal no son, en general, las mismas que limitan el contorno aparente vertical.

Para la visibilidad de la curva directriz (y de la traza) notamos, por ejemplo, que el punto A es visible en ambas proyecciones por ser visibles las proyecciones g_1 y g_2 de la generatriz que pasa por él. El punto Q, en cambio, es visible en proyección horizontal e invisible en proyección vertical.

El punto siguiente ampliará cuanto concierne a la visibilidad.

2. — Determinemos el contorno aparente de una superficie cónica cuando se conoce la traza horizontal y el vértice.

Sea la circunferencia $c \equiv (c_1, c_2)$ la traza horizontal y $V \equiv (V_1, V_2)$ el vértice (fig. 334).

Para obtener una generatriz cualquiera se une el vértice V con un punto cualquiera, A, por ejemplo, de la traza horizontal.

Las tangentes V_1B_1 y V_1C_1 a la traza c_1 de la superficie cónica dan las generatrices que limitan el contorno aparente sobre el plano π_1.

Las líneas de referencia D_1D_2 y E_1E_2, tangentes a c_1, permiten determinar las generatrices cuyas proyecciones verticales V_2D_2 y V_2E_2 limitan el contorno aparente sobre el plano π_2.

Para la visibilidad de la traza horizontal c_1 de la superficie notemos que la perpendicular a LT por F_1, punto en que se cruzan c_1

y V_1A_1, encuentra primero c_2, luego V_2A_2. En consecuencia, V_1A_1 es visible. no así el arco $B_1D_1C_1$ de la traza c_1.

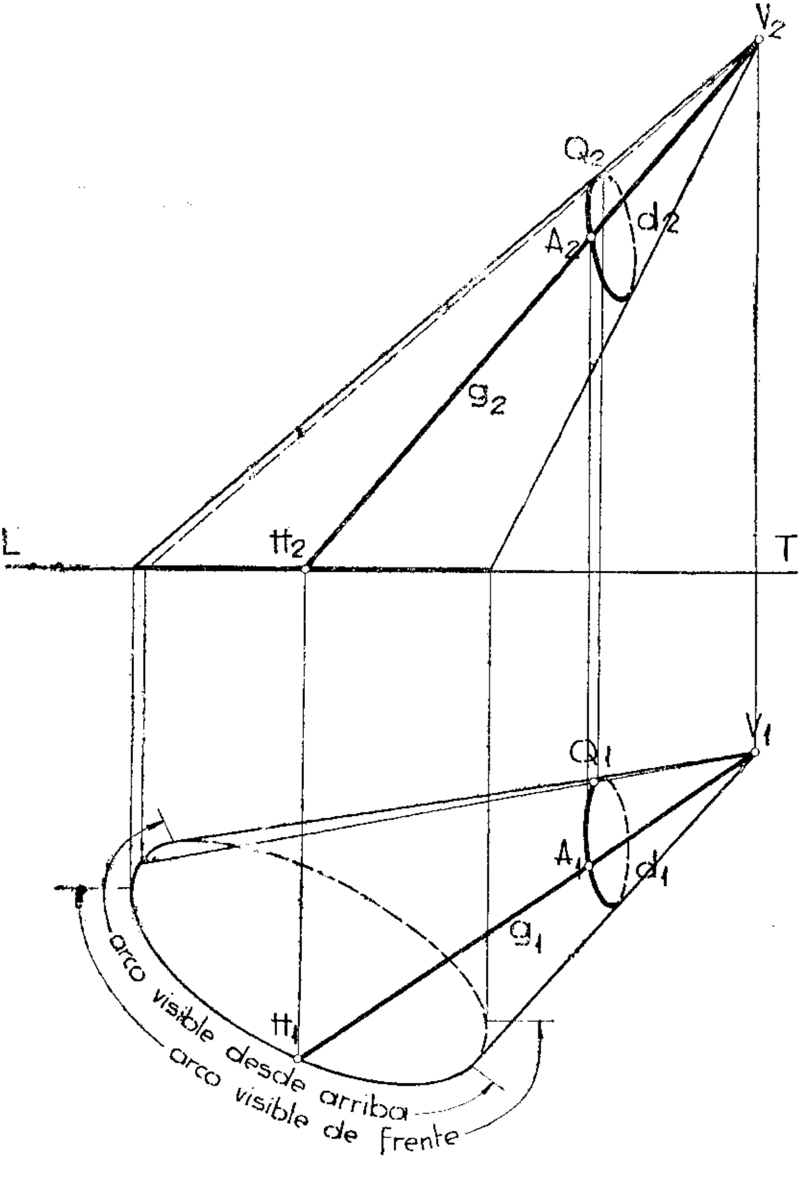


Fig. 333

3. — La figura 335 da la representación de tres conos en posiciones particulares distintas.

4. — Dada una superficie cónica es fácil determinar una de las proyecciones de un punto de la superficie cuando se conoce la otra proyección del punto.

Sea (fig. 336) la superficie cónica determinada por su traza horizontal y su vértice.

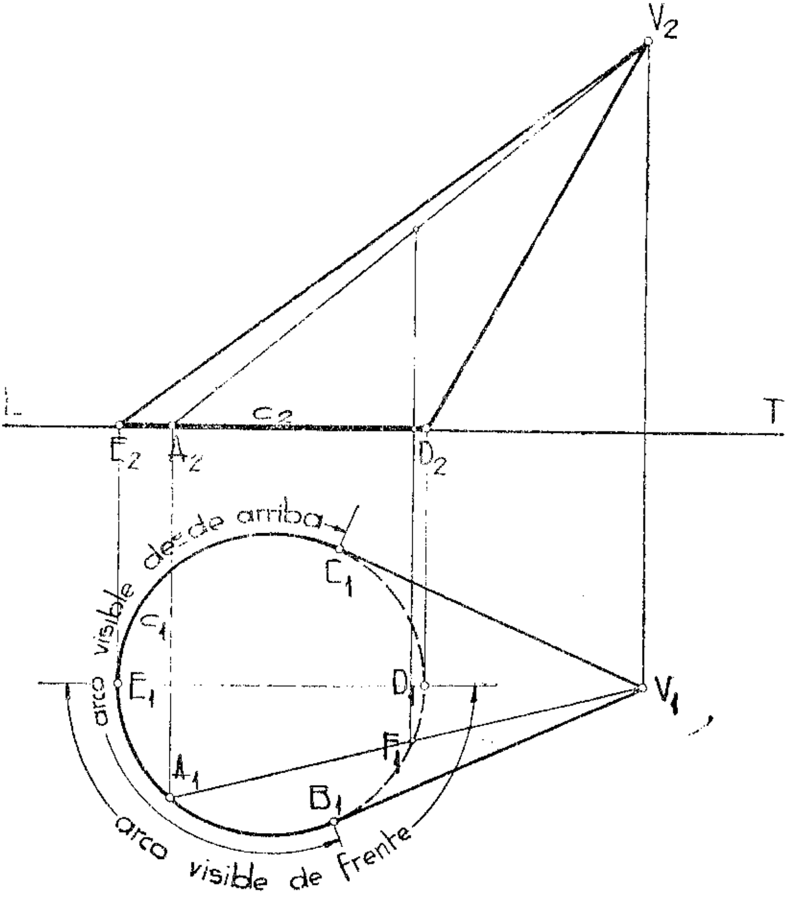


FIG. 334

Para localizar un punto de la superficie se aplica un criterio análogo al establecido en § 25. Se dijo entonces que para que un punto perteneciese a un plano bastaba que perteneciese a una recta del plano. Diremos ahora: un punto pertenece a una superficie si pertenece a una

línea de la superficie. En el caso de la superficie cónica la línea más simple a la cual se recurre es la recta.

Supongamos entonces que se conoce la proyección horizontal P_1 del punto de la superficie cónica. Supongamos además que P_1 es visible. Hallar la proyección P_2.

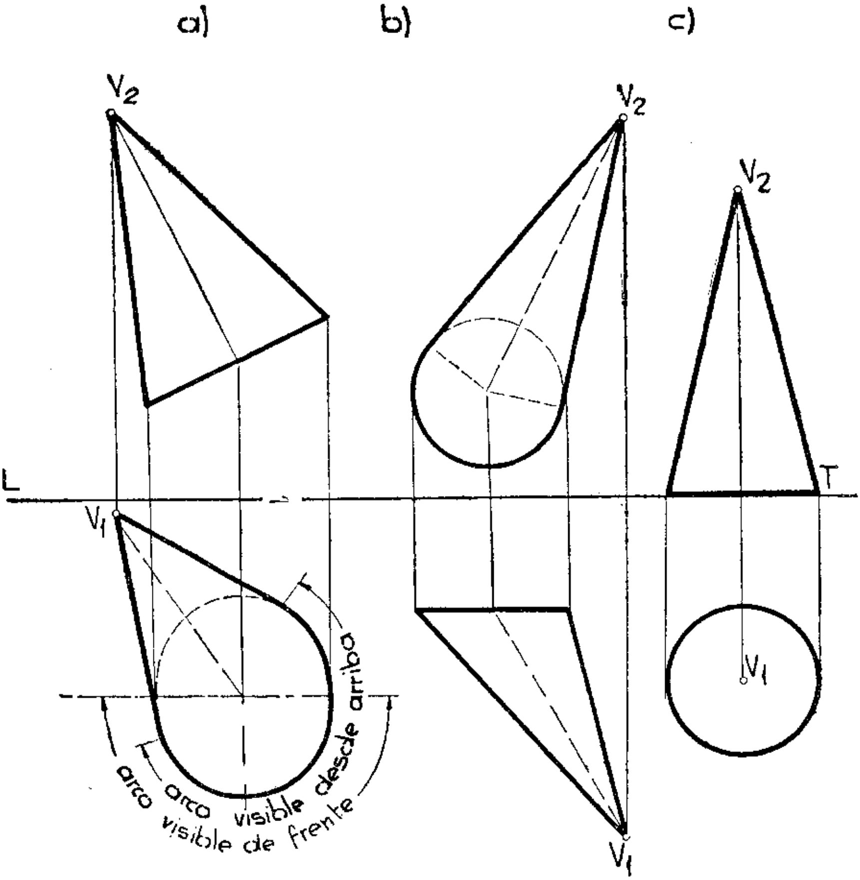


FIG. 335

La recta V_1P_1 es, evidentemente, la proyección horizontal de la generatriz a la cual pertenece el punto P. Su proyección vertical es V_2A_2. Una línea de referencia por P_1 determina P_2, invisible por serlo también V_2A_2.

La proyección P_1 ha sido considerada visible. Puede, naturalmente, ser también invisible. La generatriz correspondiente será en

tonces V_1B_1, y P'_2 será la proyección vertical del punto. Esta proyección P'_2 es visible por serlo V_2B_2.

Análogamente, si la proyección dada es Q_2 y se establece que es visible, se halla en Q_1 la proyección (invisible) del punto.

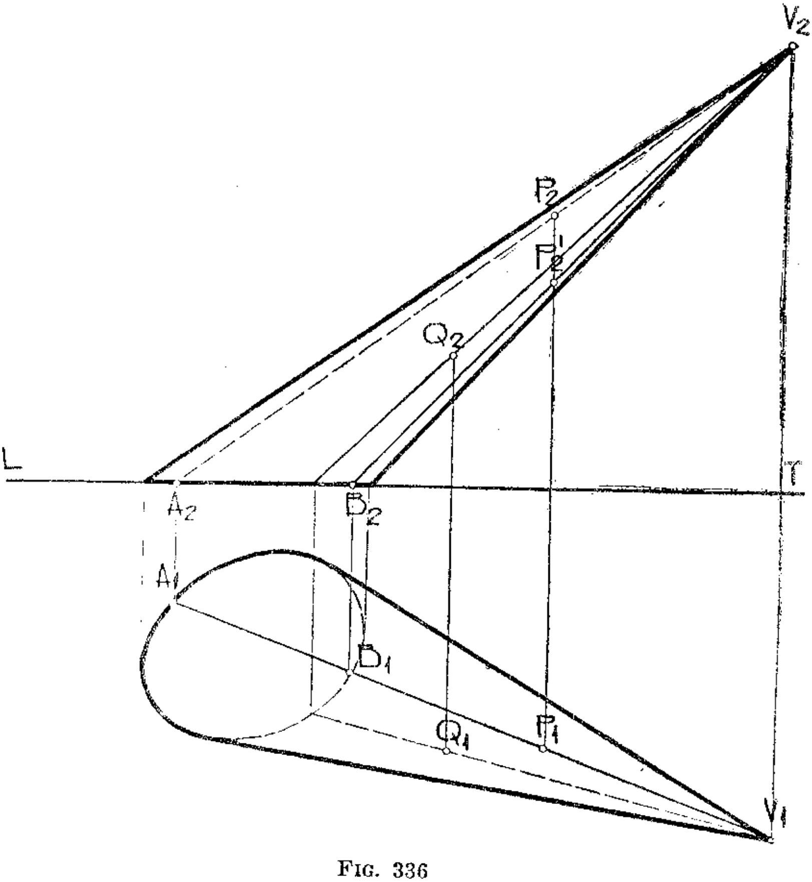


FIG. 336

174. PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE CONICA

1. — Determinemos el plano tangente a una superficie cónica por un punto de la misma.

Supongamos (fig. 337) un cono circular recto y un punto P de su superficie. El plano tangente debe contener la generatriz VII, que pasa por P, y la tangente en H a la traza horizontal del cono. Las

rectas *VH* y *t* son, pues, las que determinan el plano pedido. Si se quiere, pueden hallarse las trazas del plano.

2. — Determinaremos ahora el plano tangente a una superficie cónica por un punto exterior a la misma (fig. 338).

Sea *P* el punto exterior.

El plano que se pide debe contener el punto *P*, el vértice *V* y la tangente por la traza horizontal *Q* de la recta *VP* a la traza horizontal de la superficie. De aquí, entonces, la siguiente construcción:

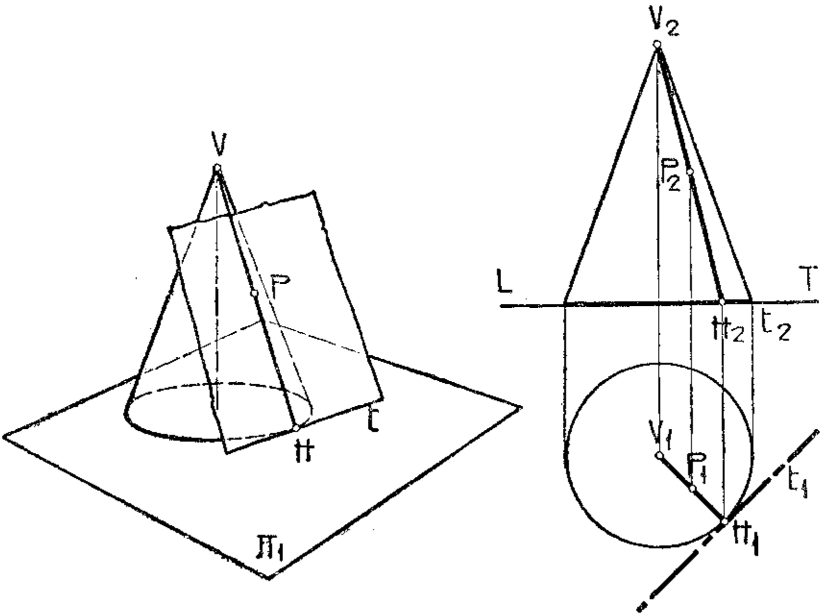


Fig. 337

Se determina la recta *VP* y se halla su traza *Q* sobre el plano de la base (plano horizontal en nuestro caso). Se conducen por *Q* las tangentes t_1 y t'_1 a la base, y entonces los planos determinados por las rectas *VP* y *QH* o *VP* y *QH'* son los planos tangentes pedidos. Sus trazas son (α_1, α_2) y (β_1, β_2), respectivamente.

Se comprende que el número de soluciones es el número de tangentes a la base que pueden trazarse desde el punto *Q*.

3. — Veamos cómo puede determinarse el plano tangente a una superficie cónica, paralelo a una recta dada (fig. 339).

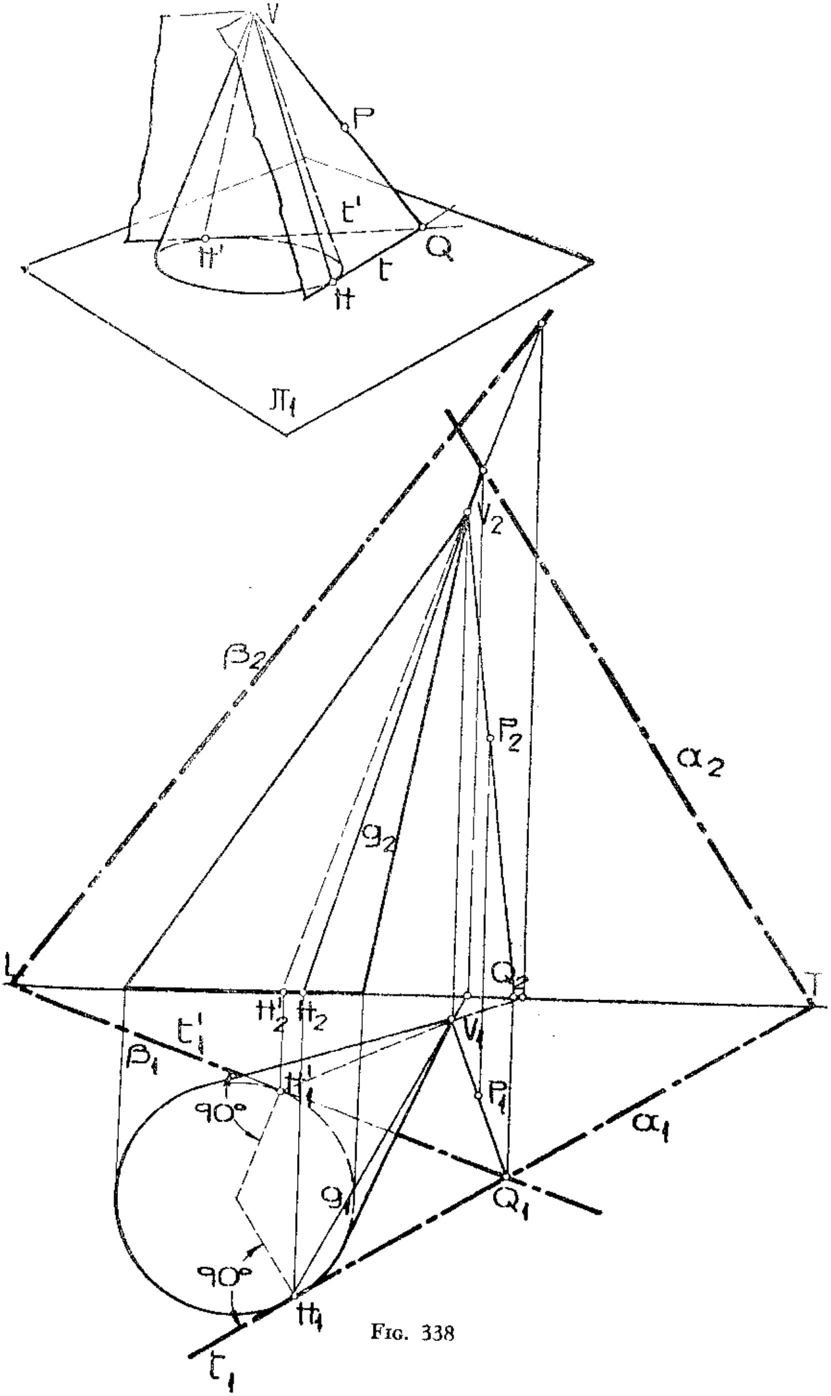

V
P
t'
Q
t
Π_1
V_2
β_2
P_2
α_2
g_2
Q_2
T
t_1'
V_1
β_1
P_1
90°
α_1
g_1
Q_1
90°
t_1

FIG. 338

El plano buscado debe contener una recta paralela a la dada, pasar por el vértice y contener la tangente por la traza horizontal de aquella paralela a la traza horizontal de la superficie. De aquí, entonces, la siguiente construcción:

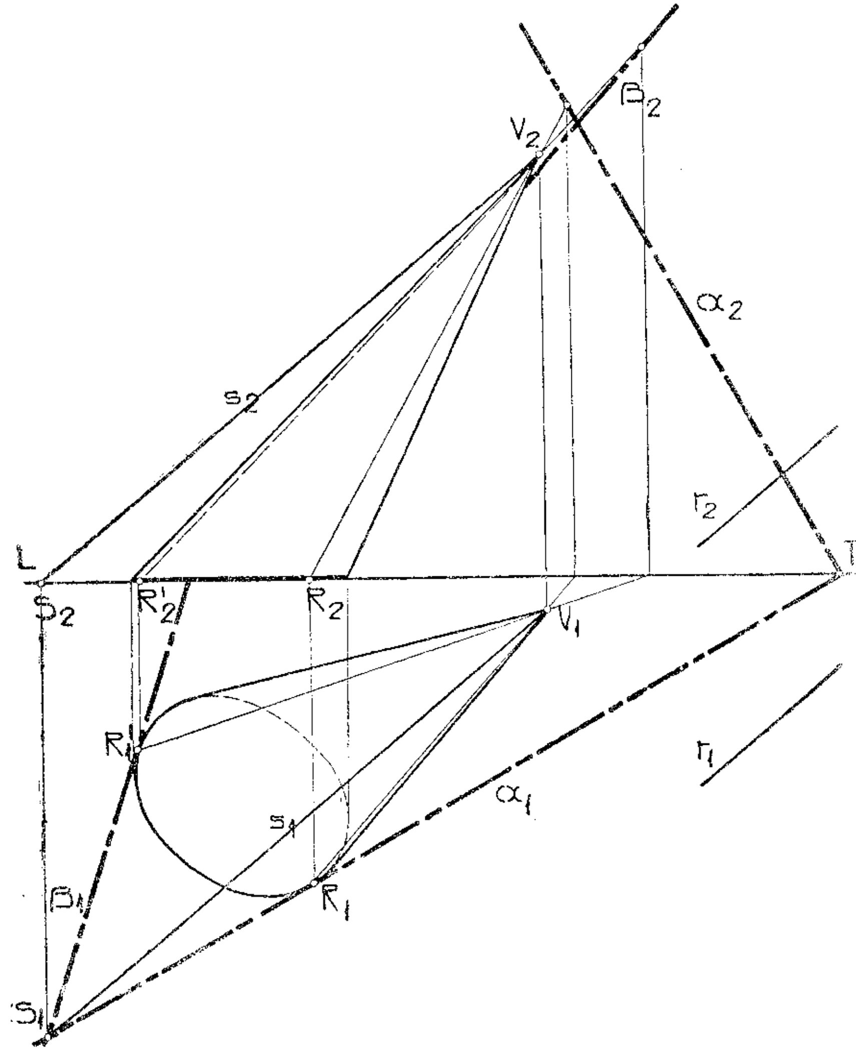


FIG. 339

Se conduce por el vértice V la paralela s a la recta dada r. Se determina su traza horizontal S. Desde S_1 se conducen las tangentes S_1R_1 y $S_1R'_1$ a la base. Los planos determinados por las rectas VS y SR o VS y SR' son los planos tangentes pedidos. Sus trazas son (α_1, α_2)

y (β_1, β_2), respectivamente. Las generatrices de tangencia son VR y VR'. El número de soluciones es igual al número de tangentes que pueden trazarse por S_1 a la base de la superficie.

§ 75. SECCIONES PLANAS DE SUPERFICIES CONICAS

1. — La intersección de un plano con una superficie cónica da una curva cuya naturaleza depende de la directriz de la superficie. Asu-

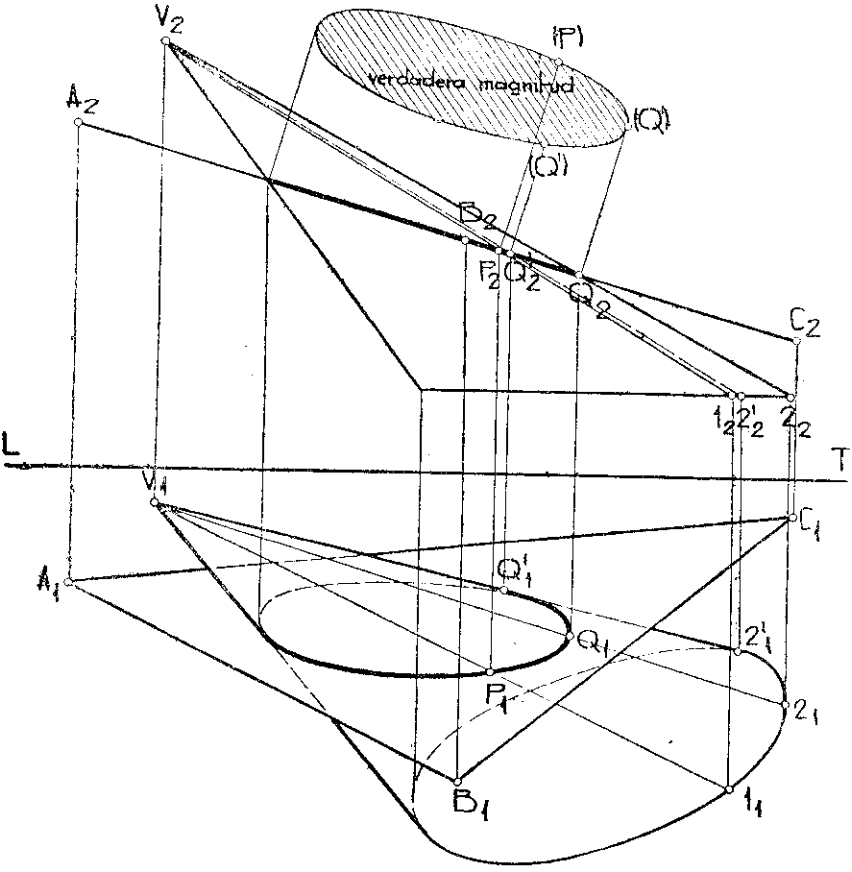


Fig. 340

miendo un número suficiente de elementos de la superficie, la intersección de cada uno de éstos con el plano secante proporciona los puntos necesarios para el trazado de la curva sección. El principio básico general es, pues, semejante al utilizado en el caso de los poliedros y, en especial, de las pirámides.

De los elementos utilizables los más simples son las generatrices. Se trata entonces de hallar la intersección de cada generatriz elegida con el plano secante. El procedimiento resulta un tanto laborioso por el elevado número de generatrices que deben utilizarse para el acertado dibujo de la sección. Por esto a menudo se recurre a planos auxiliares que pasan por el vértice y que entonces cortan la superficie según dos generatrices y el plano secante según una recta. Los puntos comunes a aquellas generatrices y a esta recta son puntos de la sección.

2. — En la figura 340 se ha considerado un cono elíptico oblicuo, cortado por un plano de canto ABC.

La generatriz V_1 corta el plano de canto en el punto P. Las generatrices V_2 y V'_2, en los puntos Q y Q', y así sucesivamente. Unidos los puntos de intersección se obtiene la sección.

Por rebatimiento sobre el plano vertical se halla su verdadera magnitud.

3. — Si el plano secante no fuese de canto, puede hacerse tal mediante un cambio de planos. Se procede entonces como en el caso anterior y se vuelve después a los planos primitivos de proyección (fig. 341).

4. — Los casos más frecuentes de secciones cónicas se refieren a conos rectos circulares. A ellos nos referiremos, pues, en este número y en los siguientes.

Si el plano secante es horizontal, es decir, perpendicular al eje de rotación, la curva según la cual es cortada la superficie del cono es una circunferencia tanto más pequeña cuanto más cerca del vértice está el plano. *Si el plano secante es oblicuo y no paralelo a ninguna generatriz, la sección es una elipse.*

Supongamos entonces (fig. 342) un cono de revolución con la base sobre el plano π_1 y sea α el plano secante. En vez de hallar las intersecciones de cierto número de generatrices con el plano dado α, como hicimos en 2, recurriremos a planos auxiliares que pasan por el vértice, y para simplificar las operaciones los elegiremos con sus trazas horizontales paralelas a la traza horizontal del plano.

Vista la figura espacial, hagamos la representación del problema (fig. 343).

Para hallar las trazas de un plano auxiliar β determinemos su horizontal h que pasa por el vértice V. Basta conducir por V_1 la paralela h_1 a la traza α_1 y luego por V_2 la paralela h_2 a la línea de tierra; h_1 y h_2 son las proyecciones de la horizontal buscada. Es fácil dibujar entonces las trazas β_1 y β_2 del plano auxiliar. Podemos fijar ahora el punto común a las trazas verticales de todos los planos auxiliares que se utilicen. No es sino la traza vertical R_2 de la horizontal h.

Antes de hallar puntos cualesquiera de la sección determinemos los *puntos notables*. El punto más alto y el más bajo se encontrarán

con los planos auxiliares cuyas trazas horizontales pasan por las trazas horizontales de las generatrices *VD* y *VC* contenidas en un plano perpendicular a la traza α_1 del plano secante. Con más precisión, el plano

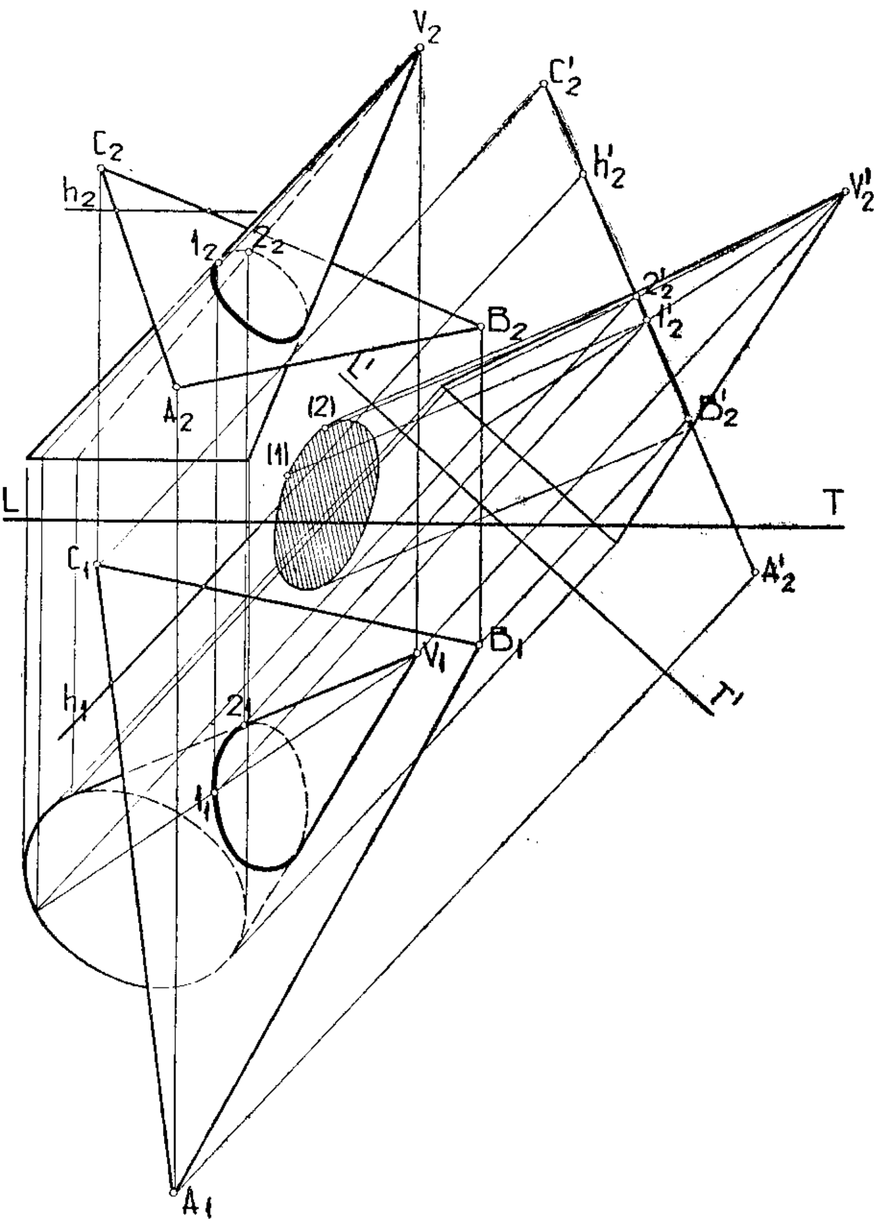


Fig. 341

que pasa por D_1 determina el punto más alto, M; el que pasa por C_1 determina el punto más bajo, N.

Para tener los puntos laterales sobre el contorno aparente, se utilizan planos auxiliares que pasen por las trazas horizontales de las generatrices VA y VB, porque estos planos cortan la superficie según las generatrices del contorno aparente vertical, determinando los puntos P y Q. Los otros puntos se determinan de la misma manera y,

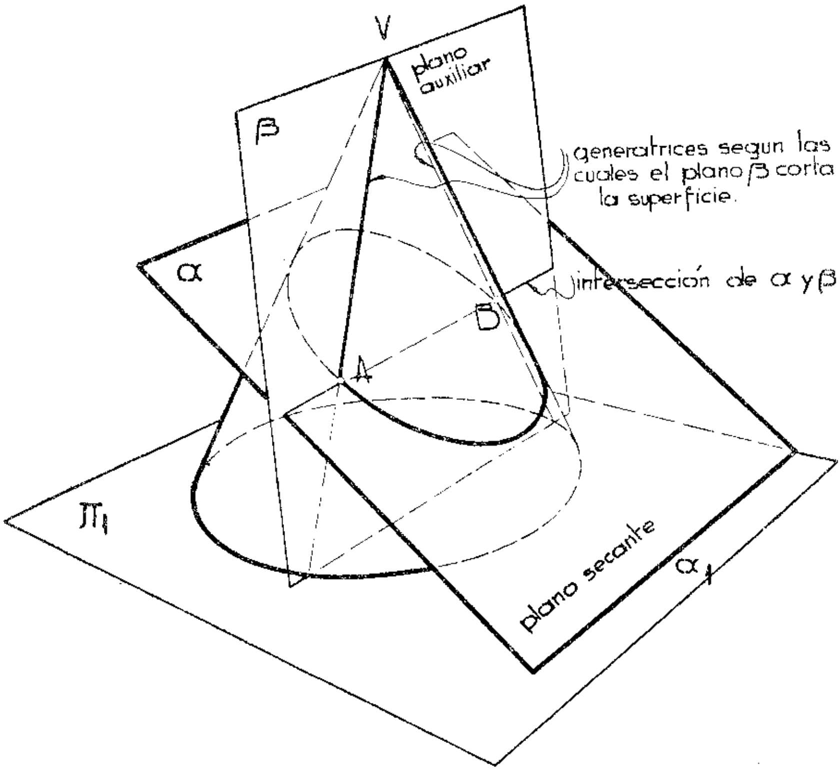


Fig. 342

unidos luego mediante trazos continuos, nos dan dos elipses, que son las proyecciones de la sección buscada.

Para obtener la verdadera magnitud de la sección se puede rebatir sobre el plano vertical, pero en vez de rebatir punto por punto, empleando el método general, se ha procedido, para simplificar las construcciones, en esta otra forma.

Se ha rebatido sobre π_2 primero α_1 y luego las horizontales que pasan por distintos puntos de la sección, operaciones que sabemos efectuar.

Entonces, por ejemplo, la intersección de la perpendicular por P_2 a la traza α_2, con el rebatimiento de la horizontal que pasa por P, es el rebatimiento de este punto de la sección sobre el plano π_2. Y así para los demás puntos, obteniéndose la elipse que da la verdadera

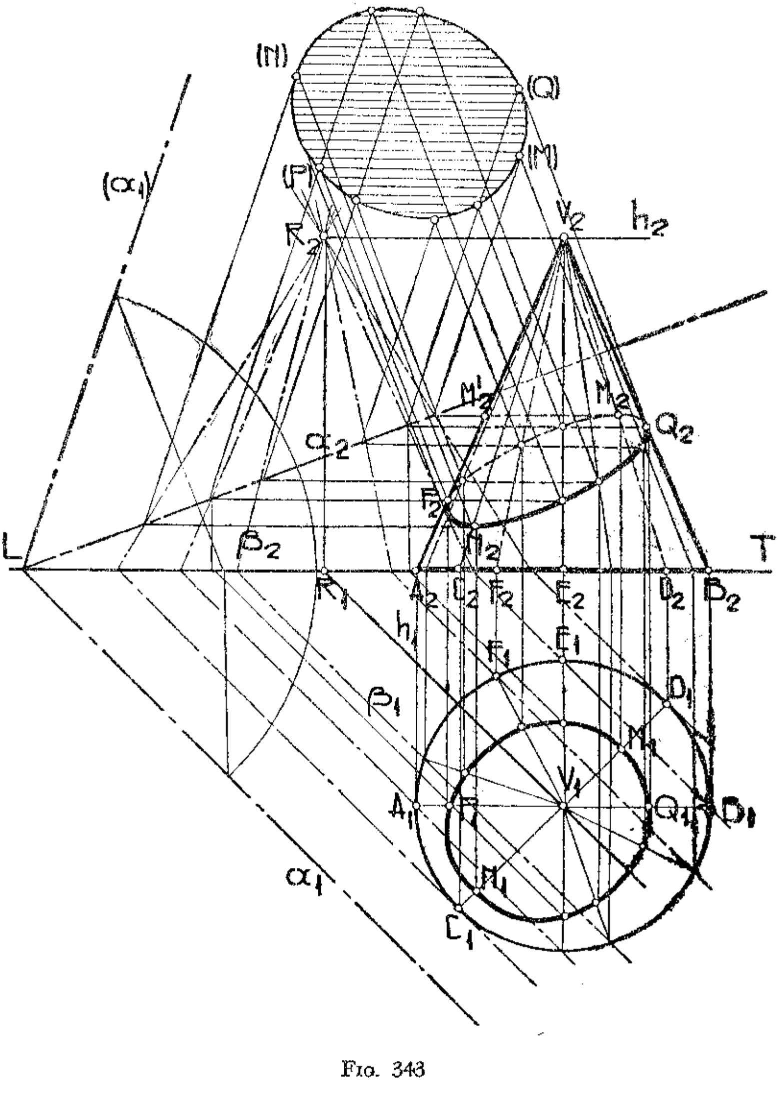


Fig. 343

magnitud pedida. Para el desarrollo se ha supuesto abierta la superficie a lo largo de la generatriz VD. Hecho centro en O, con radio $\overline{OD}$ igual a $\overline{V_2A_2}$ (verdadera magnitud de la generatriz), se describe

un arco, y sobre él se llevan las longitudes absolutas de los arcos de la base comprendidas entre las sucesivas generatrices, empezando por D:

$$\widehat{DE} = \widehat{D_1E_1}, \quad \widehat{EF} = \widehat{E_1F_1}, \quad \text{etc.}$$

Uniendo los puntos $D, E, F, \ldots$, con O se tienen las generatrices correspondientes (fig. 344).

El arco del sector circular obtenido tiene, evidentemente, una longitud igual a la longitud $\overline{\pi C_1 D_1}$ de la circunferencia de la base.

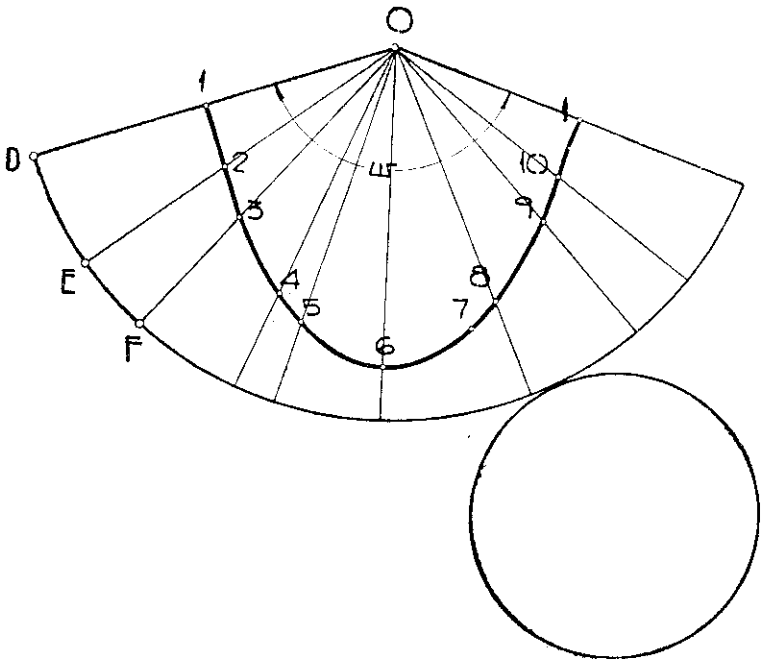


Fig. 344

El ángulo del sector es, como se sabe,

$$\omega = \frac{360° \cdot r}{g},$$

siendo r el radio de la base y g la generatriz.

Como resultado del corte producido quedó marcada una elipse sobre la superficie cónica considerada. Extendida ésta sobre un plano aquélla también se extiende, dando una curva especial que es la *transformada* de la sección. Para dibujarla es necesario llevar sobre cada generatriz del desarrollo la parte comprendida entre la base del cono y la sección. Si se tomasen las partes de generatrices directamente sobre la representación vertical, sería erróneo, pues, salvo las del con

torno aparente vertical, no están en tamaño real. Es necesario entonces hacerlas girar hasta colocarlas paralelamente a uno de los planos

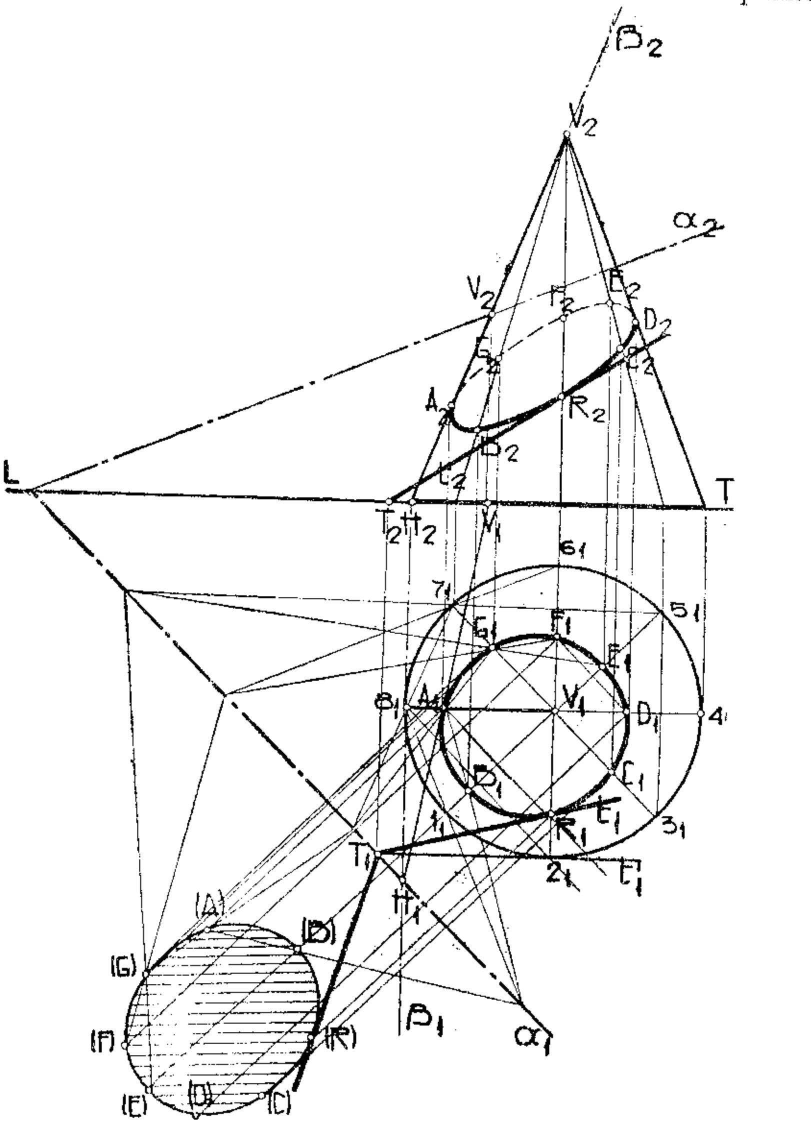


Fig. 345

la proyección, al vertical, por ejemplo, en cuya posición coincidirían con la generatriz VA (o con la VB). Como la cota de cada punto de la sección no varía al hacer el giro, para hallar el tamaño real de las

partes de generatrices del tronco basta conducir por la proyección vertical de cada uno de los puntos de la sección paralelas a LT hasta encontrar $\overline{V_2A_2}$, y entonces el segmento $\overline{A_2M'_2}$, por ejemplo, es la verdadera magnitud del segmento $\overline{D_2M_2}$.

Y así para los otros.

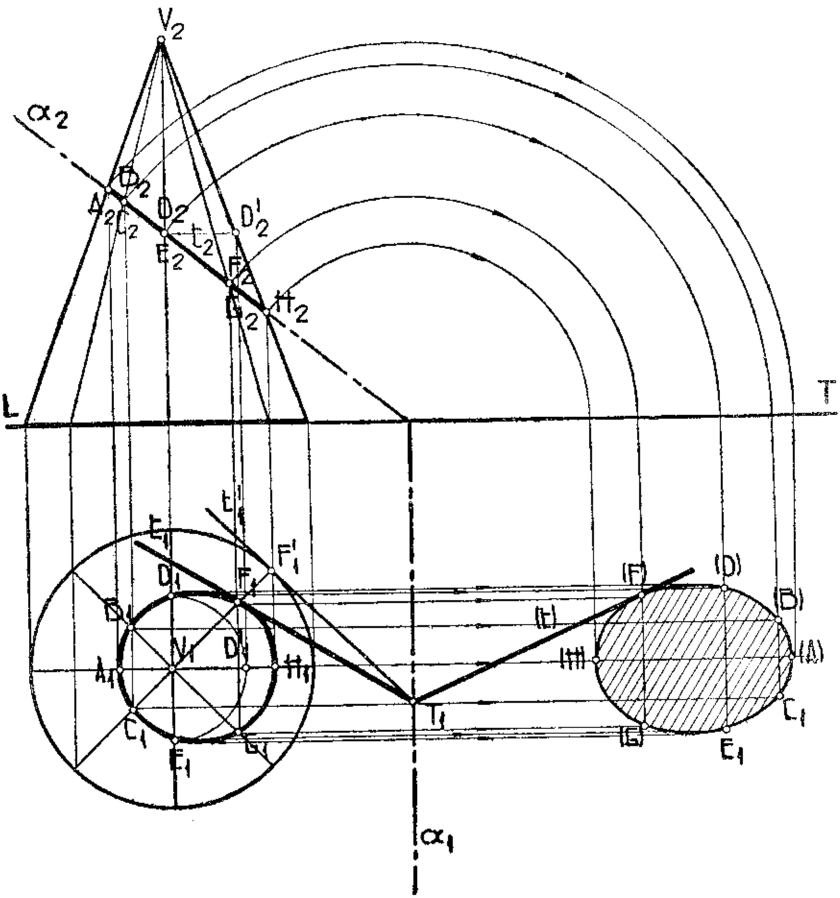


Fig. 346

Transportados después sobre el desarrollo de la superficie los segmentos obtenidos se obtiene en 1, 2, 3, 4, . . ., la transformada de la sección.

5. — El hallazgo de la sección plana se simplifica notablemente por medio de la homología.

En la figura 345 se ha considerado el mismo problema anterior

Se ha determinado primero un punto A de la sección, hallando la intersección de la generatriz $V8$ con el plano α mediante el empleo del plano auxiliar β.

Luego, por homología, se determinaron los puntos necesarios para el trazado de la proyección horizontal de la sección. Líneas de referencia fijaron después la proyección vertical. El centro de homología ha sido, naturalmente, el punto V_1, y α_1 el eje de homología.

Por afinidad se ha obtenido el rebatimiento de la sección sobre el plano horizontal.

El plano tangente en R a la sección contiene la generatriz VR. Tiene como traza horizontal la tangente por el punto 2 a la circunferencia de la base. Por otra parte, la tangente a la sección en R es la intersección del plano tangente a la superficie en ese punto y del plano secante. Como las trazas horizontales de esos dos planos se encuentran en T, la recta TR será la tangente en H a la sección.

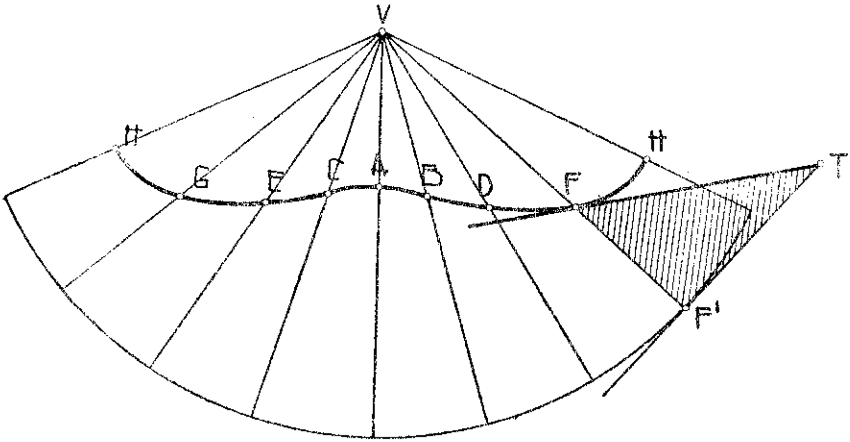


FIG. 347

Es fácil notar en la proyección horizontal que la tangente T_1R_1 a la sección y la tangente T_12_1 a la circunferencia son homológicas.

6. — Como caso particular se ha considerado en la figura 346 un plano secante perpendicular al plano vertical y no paralelo a ninguna generatriz. La sección es también una elipse.

Una pequeña advertencia conviene hacer con respecto a la determinación del punto D_1. Como su generatriz es de perfil, hubo necesidad de girarla hasta hacerla paralela al plano vertical. El punto D_2 se trasladó así a D_2', proyectado horizontalmente en D_1'. Deshecho el giro se encontró D_1. En la misma forma se procedió con E_1.

Por rebatimiento sobre el plano horizontal se obtuvo la verdadera magnitud de la sección.

En la figura 347 se ha hecho el desarrollo de la superficie con la transformada de la sección.

Para trazar la tangente FT a la transformada de la sección basta marcar $\overline{F'T}$ igual a $\overline{F'_1T_1}$ de la figura 346, pues en el espacio, $\overline{FT}$ es hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene como catetos el segmento $\overline{F'F}$ de generatriz y $\overline{F'T_1}$.

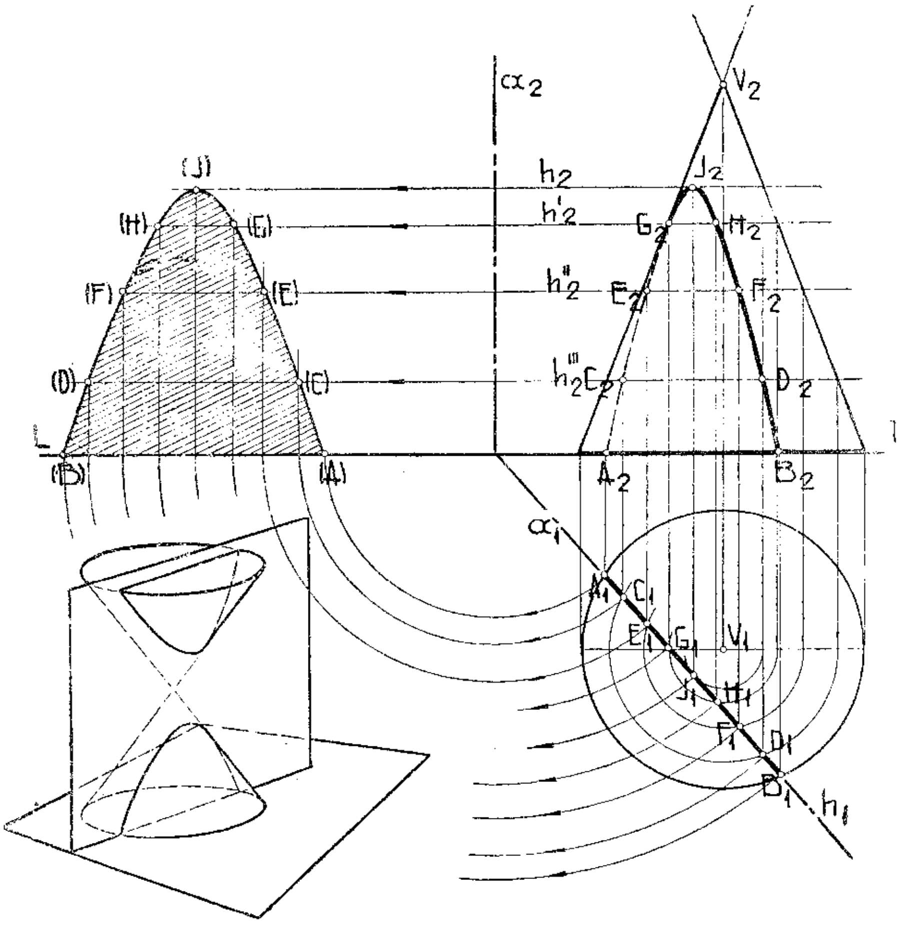


Fig. 348

7. — El plano secante puede ser paralelo a dos generatrices de la superficie cónica, es decir, vertical, en el caso particular que consideramos. La sección obtenida es entonces *hipérbola* (fig. 348).

Para determinarla pensemos ante todo que su proyección horizontal coincide con el segmento $\overline{A_1B_1}$ de traza horizontal del plano

Si entonces proyectamos los puntos A_1 y B_1 sobre la línea de tierra, tendremos en A_2 y B_2 los puntos más bajos de la proyección vertical de la sección. Para hallar otros puntos podríamos considerar una serie de generatrices de la superficie, en forma análoga a lo que se hizo en 2 de § 75, o recurrir a planos auxiliares horizontales que cortarían la superficie según paralelos y el plano secante según rectas horizontales, de proyección horizontal común h_1. Los puntos A, B, C, D, ..., comunes a los distintos paralelos y a esas horizontales, son puntos de la sección buscada. Unidos mediante un trazo continuo dan las proyecciones de una rama de hipérbola.

El punto más alto, J, es dado por el paralelo tangente a la traza α_1.

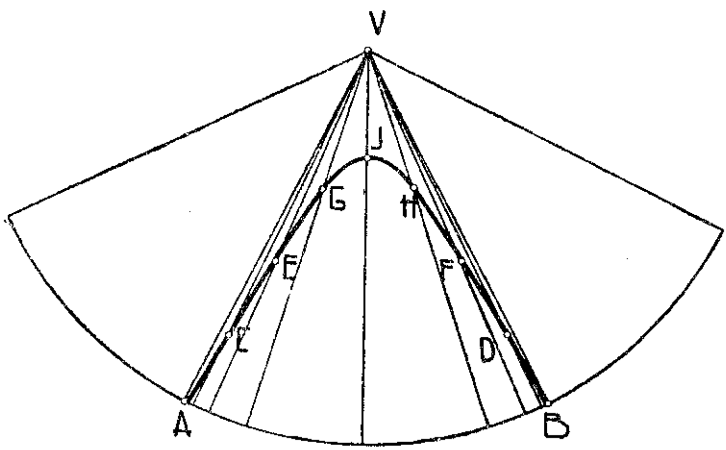


FIG. 349

A la izquierda de la figura se ha determinado, por rebatimiento sobre el plano vertical, la verdadera magnitud de la sección.

La figura 349 da el desarrollo de la superficie cónica con la transformada de la sección. Los segmentos de generatrices han sido tomados en tamaño real mediante la ya conocida rotación.

8. — Si el plano secante es paralelo a una sola de las generatrices de la superficie, la sección producida es una *parábola* (fig. 350).

Después de cuanto se ha visto bastan pocas explicaciones para entender la representación de las operaciones realizadas.

El plano secante α es perpendicular al plano π_2; en consecuencia, el segmento de traza vertical $\widehat{A_2B_2}$ es la proyección vertical de la sección. Una línea de referencia por B_2 determina B_1, proyección ho-

rizontal del vértice de la parábola. Los puntos A_1 y C_1 corresponden, en cambio, a los puntos más bajos de la curva.

Para obtener puntos intermedios se recurre a planos auxiliares horizontales. Uno de éstos, el β, por ejemplo, corta la superficie según el paralelo p y el plano α según la recta d; sus puntos de intersección D y E son puntos de la curva. Y así para los otros.

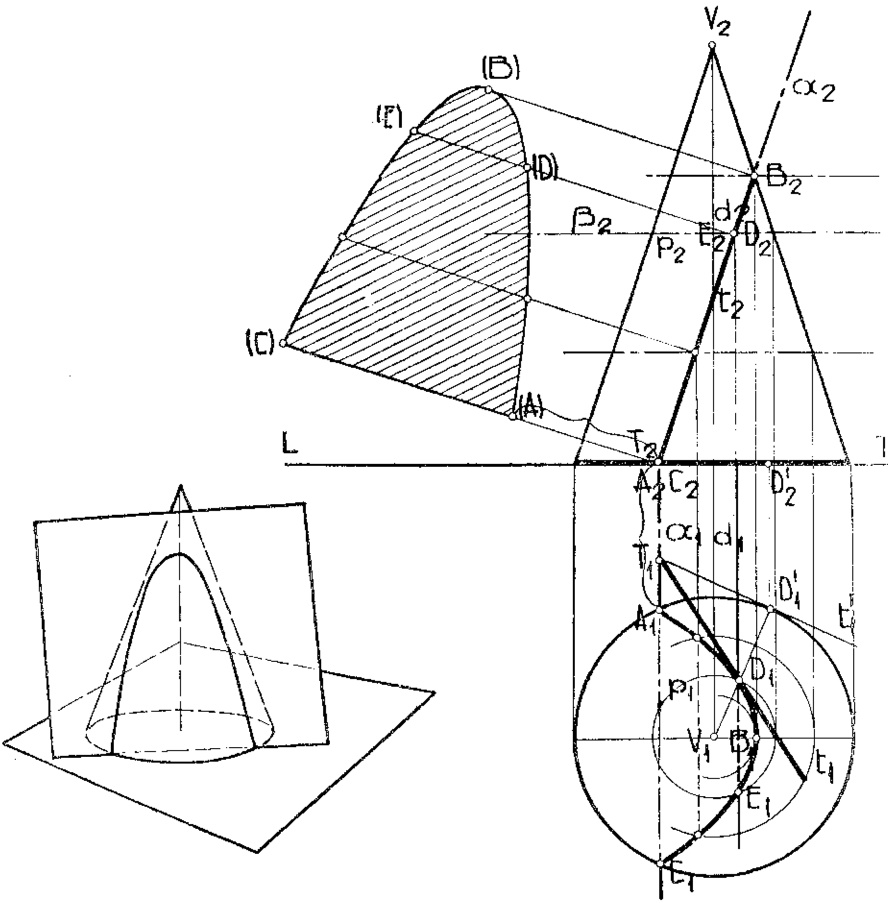


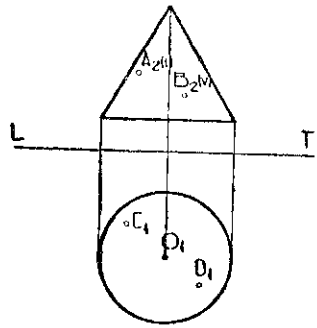
Fig. 350

Como en los demás casos, se ha trazado la tangente a la sección en uno de sus puntos D conduciendo primero la tangente t'_1 a la base y hallando luego, por homología, t_1.

Por rebatimiento sobre el plano vertical se obtiene la verdadera magnitud de la sección.

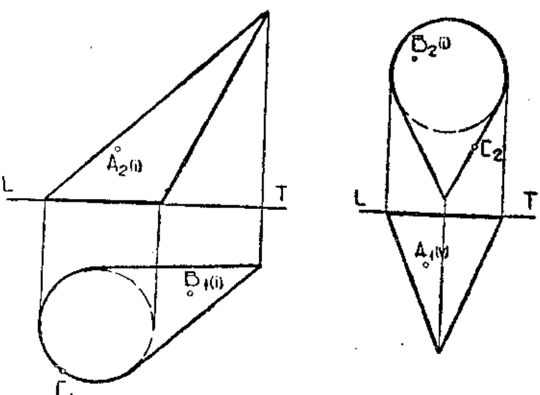
EJERCICIOS

92. Los puntos *A*, *B*, *C* y *D*, de los cuales se da una sola proyección, pertenecen a la superficie lateral del cono de revolución representado en la figura. Hallar la otra proyección. Con las notaciones $A_2(i)$ o $B_2(v)$ queremos indicar que el punto *A* es invisible, o que el punto *B* es visible, en proyección vertical.



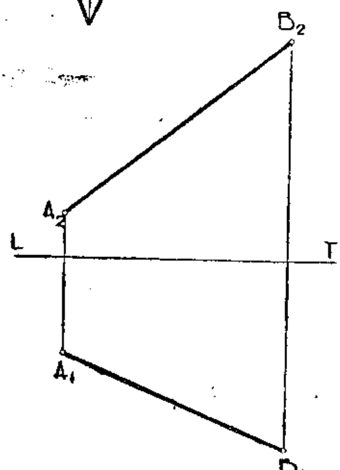
EJERCICIO 92

93. Hallar la proyección que falta, de cada uno de los puntos que se indican, pertenecientes a las respectivas superficies crónicas.

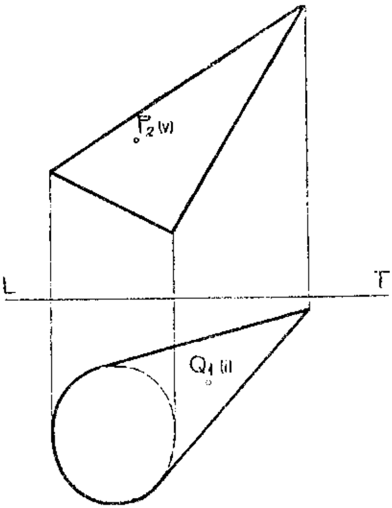


EJERCICIO 93

94. El segmento *AB* es el eje de un cono recto circular. *B* es el centro de la base, siendo 3 cm el diámetro correspondiente. Dar la representación del cono.



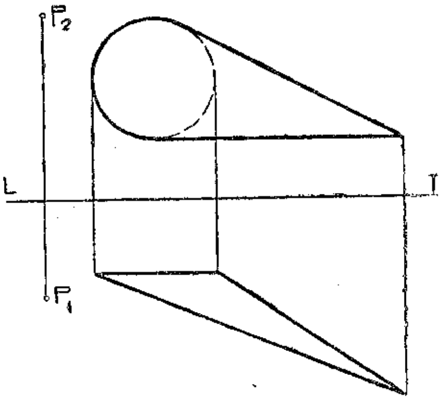
EJERCICIO 94



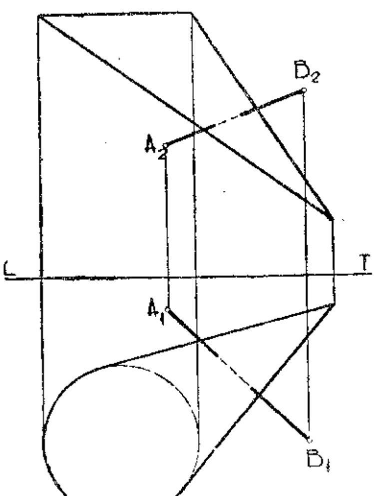
EJERCICIO 95

95. Construir el plano tangente en *P* a la superficie cónica que se indica. Hacer lo mismo en otro punto *Q*. Expresar cuáles son las rectas que individualizan cada plano tangente.

96. Construir el plano tangente por *P*, a la superficie cónica que se indica.



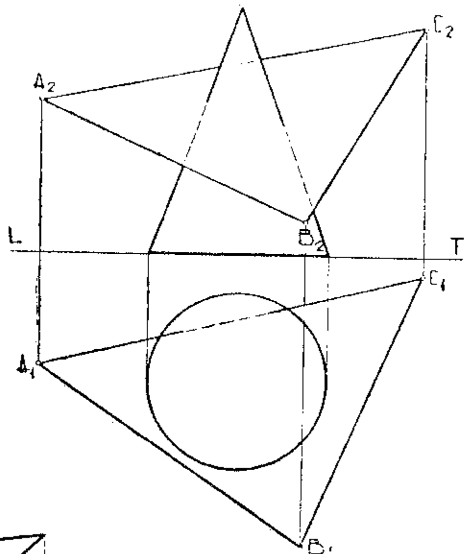
EJERCICIO 97



EJERCICIO 96

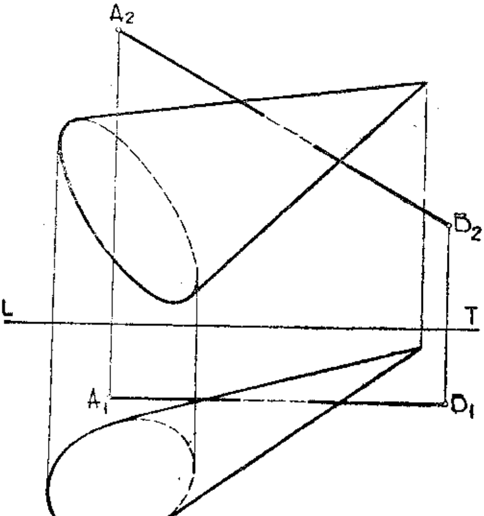
97. Construir el plano tangente a la superficie cónica que se indica, sabiendo que debe ser paralelo a la recta *AB*.

98. Hallar la sección producida por el plano *ABC* en la superficie cónica de la figura.



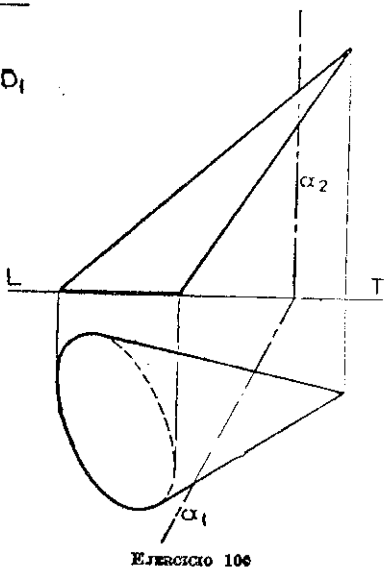
EJERCICIO 98

99. Hallar la intersección de la recta *AB* con la superficie cónica que se indica.



EJERCICIO 99

100. Hacer el desarrollo del tronco de cono oblicuo determinado por el plano α.



EJERCICIO 100

Capítulo XVII

SUPERFICIES CILINDRICAS

§ 76. REPRESENTACION

1. — Una superficie cilíndrica resulta individualizada si se conocen las proyecciones de la directriz *d* y las proyecciones de la dirección *r* de la generatriz (fig. 351).

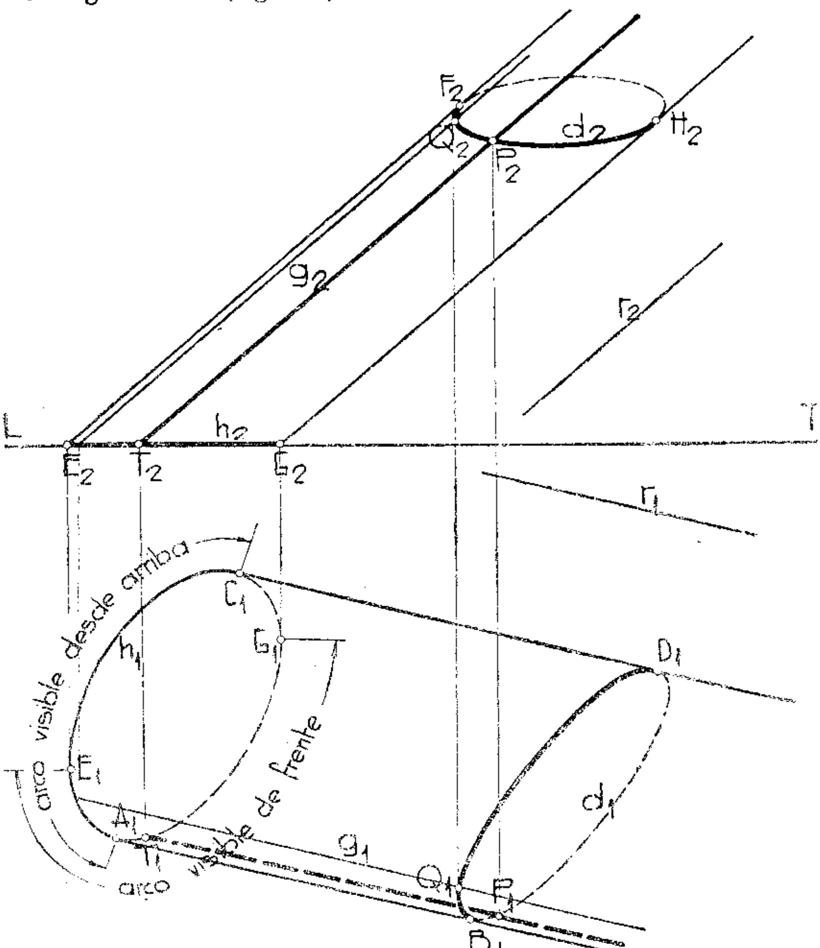


Fig. 351

Dados estos elementos pueden determinarse fácilmente cuantas generatrices se desean, trazando desde puntos de la directriz, punto P, por ejemplo, paralelas a la dirección r. Las trazas de un número suficiente de generatrices permiten dibujar las dos trazas de la superficie cilíndrica. En la figura se ha dibujado solamente la traza horizontal h_1. El contorno aparente de la superficie sobre el plano horizontal hállase limitado por las rectas A_1B_1 y C_1D_1, tangentes a su traza horizontal o a la proyección horizontal de la directriz.

Sobre el plano vertical las rectas E_2F_2 y G_2H_2, tangentes a la traza vertical (no dibujada) de la superficie o a la proyección vertical de la directriz, limitan el contorno aparente.

Esas rectas pueden obtenerse trazando las líneas de referencia E_1E_2 y G_1G_2, tangentes a la traza h_1, y luego por E_2 y G_2, paralelas a r_2.

2. — Si es conocida una de las proyecciones, Q_1, por ejemplo, de un punto Q de la superficie cilíndrica, se encuentra en seguida la otra proyección Q_2 dibujando la proyección horizontal g_1 de la generatriz que pasa por Q (fig. 351) y determinando luego g_2 mediante una paralela a r_2. El punto $Q \equiv (Q_1, Q_2)$ es visible sobre ambos planos (*).

3. — Como caso particular se ha representado en la figura 352 un cilindro recto en dos posiciones distintas.

En la primera el eje del cilindro es perpendicular al plano horizontal.

En la segunda el eje es una frontal. Las bases del cilindro situadas en planos de canto se proyectan verticalmente según segmentos de recta iguales al diámetro de las bases mismas. Horizontalmente se proyectan según dos elipses de fácil construcción. En efecto, de los infinitos diámetros de las bases hay dos que, siendo perpendiculares en el espacio, tienen sus respectivas proyecciones horizontales también perpendiculares: son, refiriéndonos a la base superior, los diámetros $\overline{MN}$ y $\overline{RQ}$, uno perpendicular y otro paralelo al plano vertical. Sus proyecciones serán, pues, ejes de la elipse. Tomando entonces $\overline{M_1N_1}$ perpendicular a A_1B_1, de longitud d, se tiene el eje mayor; luego, mediante líneas de referencia por R_2 y Q_2 se limita el eje menor $\overline{R_1Q_1}$.

4. — La figura 353 da la representación de un cilindro oblicuo de base circular contenida en el plano horizontal.

Son conocidos el centro O de la base y el eje e. El contorno aparente sobre el plano horizontal es dado por las tangentes a la base paralelas a la proyección horizontal del eje.

Antes de hallar el contorno aparente sobre el plano vertical deter-

---

(*) Dada la proyección horizontal Q_1 de un punto de la superficie quedan determinados en general dos puntos de la superficie: $Q \equiv (Q_1, Q_2)$ y $Q' \equiv (Q'_1, Q'_2)$. Este último no marcado en la figura.

minemos la traza vertical de la superficie cilíndrica. Basta para esto unir las trazas verticales de un número suficiente de generatrices. En la figura se han considerado ocho generatrices, obteniéndose en $A_2B_2C_2$ $D_2F_2G_2H_2$ la proyección vertical de la traza vertical.

Las rectas por 1_2 y 5_2 paralelas a e_2 limitan lateralmente el contorno aparente sobre el plano vertical. Ellas son, además, tangentes a la proyección vertical de la traza vertical.

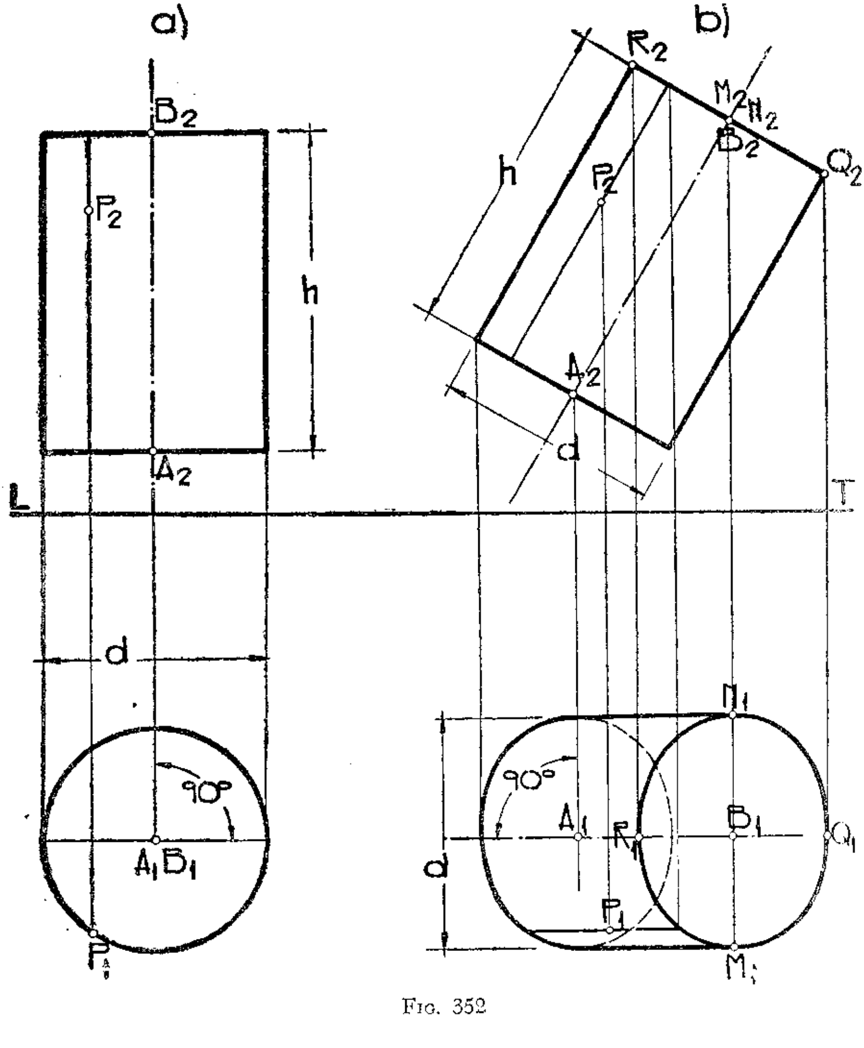


Fig. 352

§ 77. PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE CILINDRICA

1. — Por un punto dado de una superficie cilíndrica queremos hacer pasar un plano tangente a la superficie.

El plano tangente resulta determinado por la generatriz que pasa por el punto y por la tangente a una curva de la superficie en el punto en que la generatriz de contacto encuentra la curva (11 de § 69). Como curva de la superficie podemos considerar la propia traza.

Sea entonces P el punto de una superficie cilíndrica dada por su traza horizontal y una generatriz g (fig. 354).

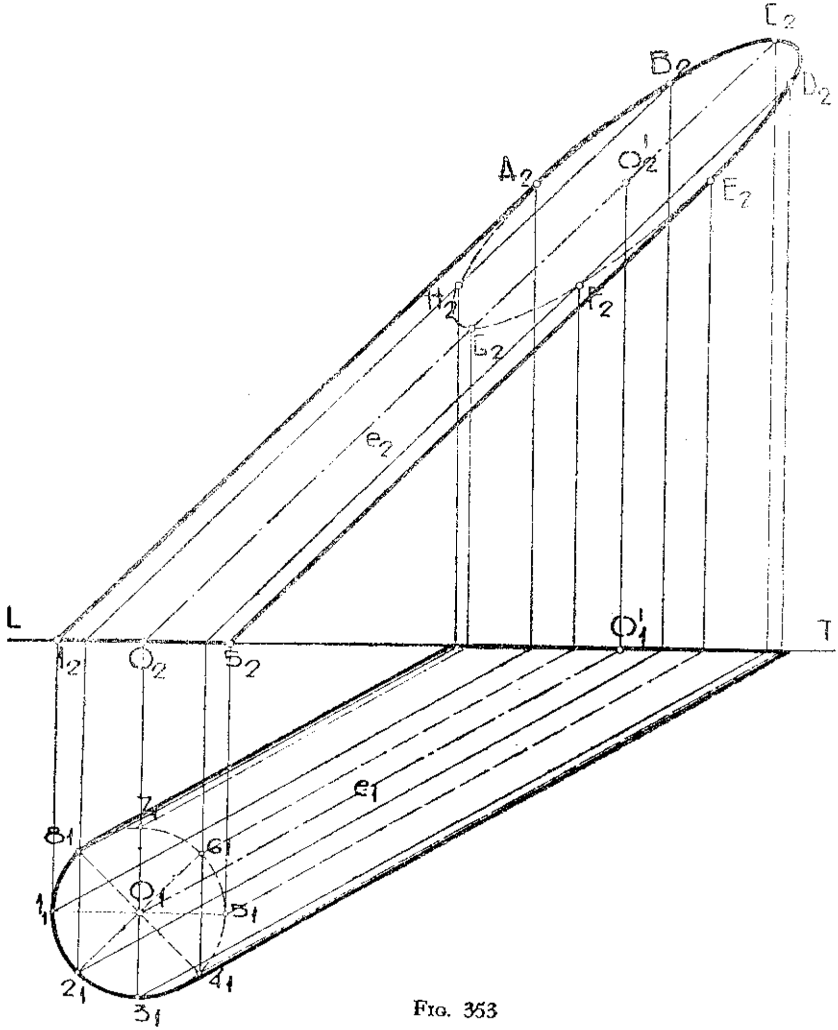


FIG. 353

Se traza la generatriz p que pasa por P y luego la tangente t_1 en M_1 a la traza horizontal de la superficie. El plano α determinado por p y t es el plano pedido.

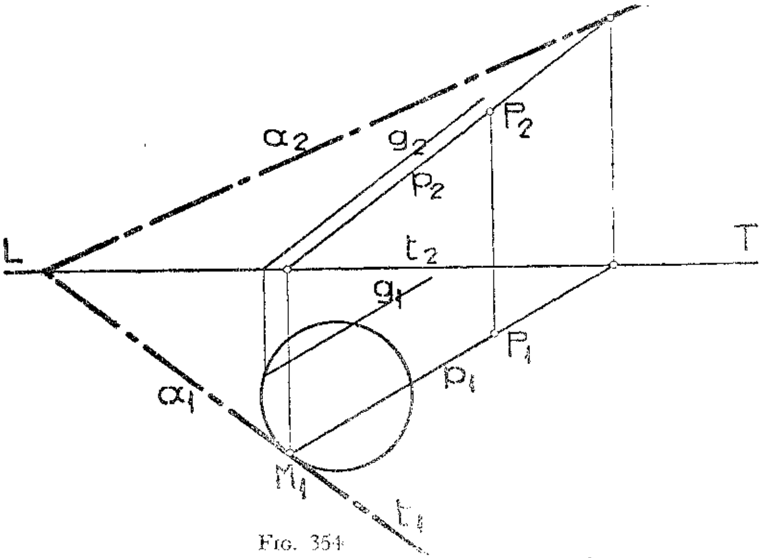


Fig. 354

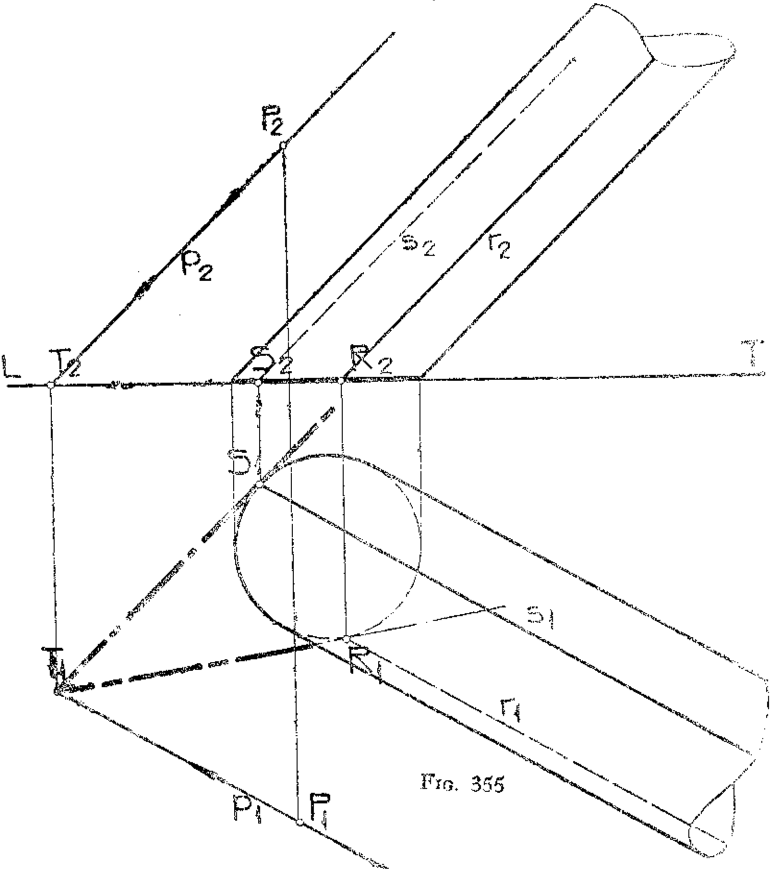


Fig. 355

2. — Queremos determinar ahora el plano tangente a una superficie cilíndrica por un punto exterior.

El plano buscado debe contener una generatriz de la superficie y también la paralela por el punto dado a las generatrices.

En la figura 355 se da un cilindro mediante su base circular y la dirección de sus generatrices. El punto exterior es P.

Se conduce por P la paralela p a las generatrices. Ella encuentra el plano de la base en el punto T. Por T_1 se conducen las rectas T_1R_1

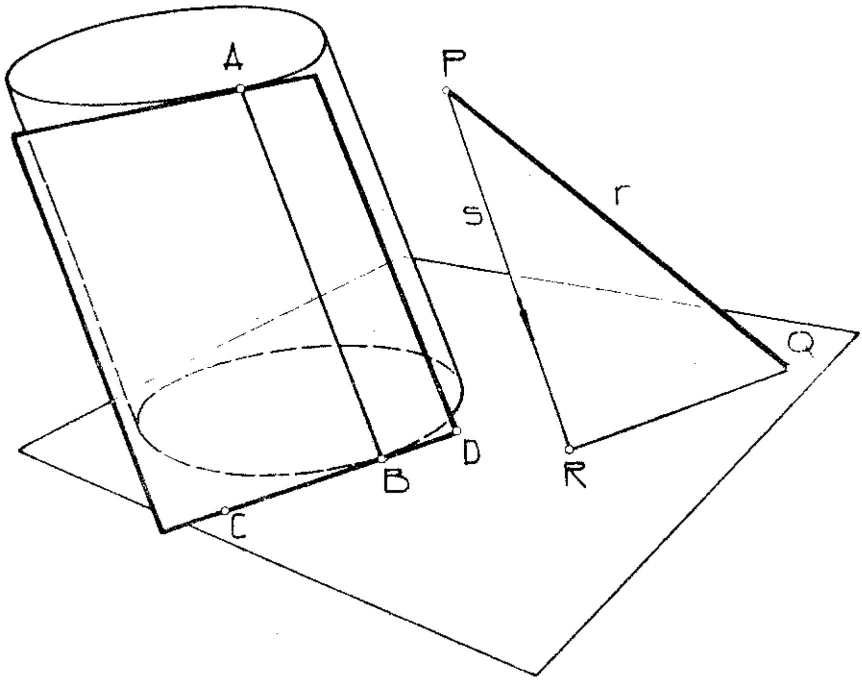


Fig. 356

y T_1S_1 tangentes a la base, y hay entonces dos soluciones: el plano PTR y el plano PTS, ambos tangentes a la superficie del cilindro.

Imaginado el cilindro como un cono cuyo vértice está a distancia infinita de la base, este problema no es sino un caso particular del problema análogo referente a una superficie cónica.

3. — El plano tangente a una superficie cilíndrica puede ser paralelo a una recta dada. Debe contener entonces una generatriz y ser paralelo al plano determinado por la recta dada y la paralela por un punto de ésta a las generatrices de la superficie (fig. 356).

Trátese entonces de un cilindro circular oblicuo y sea r la recta dada (fig. 357). Por el punto P de r se conduce la paralela s a las generatrices y se determina la traza α_1 del plano formado por r y s. El problema queda reducido al trazado de tangentes a la base del cilindro paralelas a α_1. Una de las tangentes es la recta t_1, que

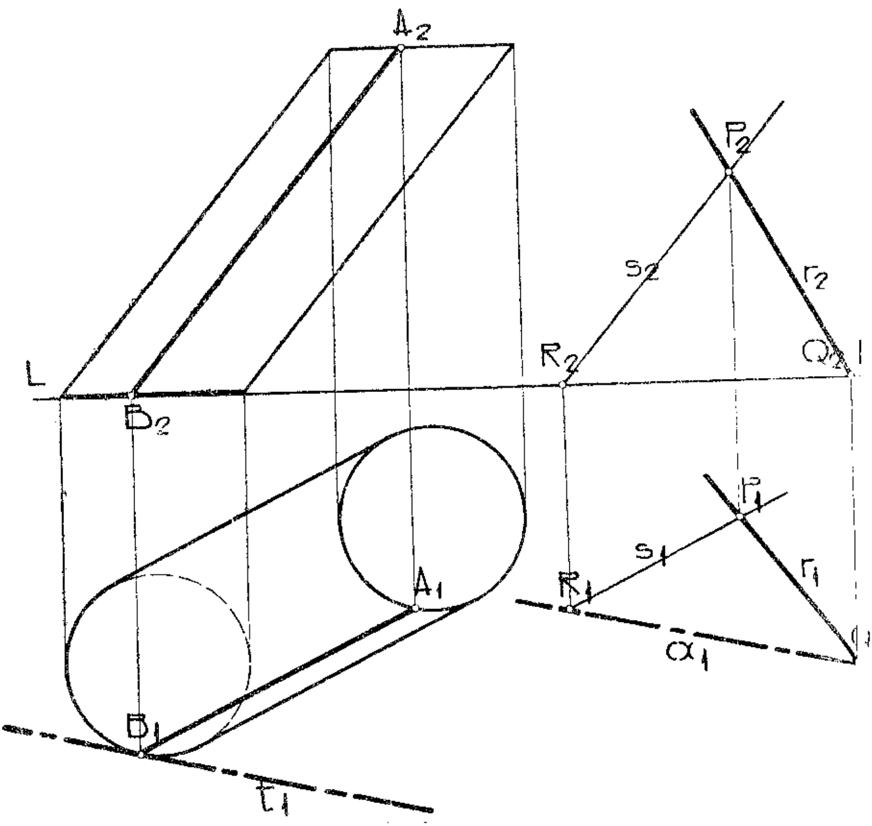


Fig. 357

permite individualizar la generatriz AB de tangencia. El plano que forman las rectas t y AB es el plano buscado. Hay otro plano también solución del problema: es el obtenido al trazar la segunda tangente a la circunferencia de la base, paralela a la traza α_1.

§ 78. SECCIONES PLANAS DE SUPERFICIES CILINDRICAS

1. — En general, un plano α (fig. 358) corta todas las generatrices de una superficie cilíndrica, determinando una cierta curva c. Si el plano es paralelo a las generatrices, la sección producida está formada

por tantas generatrices como son los puntos de intersección del plano secante, β, por ejemplo, con la directriz (o con la traza de la superficie).

Si la superficie cilíndrica es circular, toda sección plana es una elipse (en particular, una circunferencia o dos rectas cuando el plano secante es perpendicular o paralelo al eje de la superficie).

2. — Para hallar la sección plana de una superficie cilíndrica, en el caso de ser cortadas todas las generatrices, pueden emplearse los dos métodos generales siguientes:

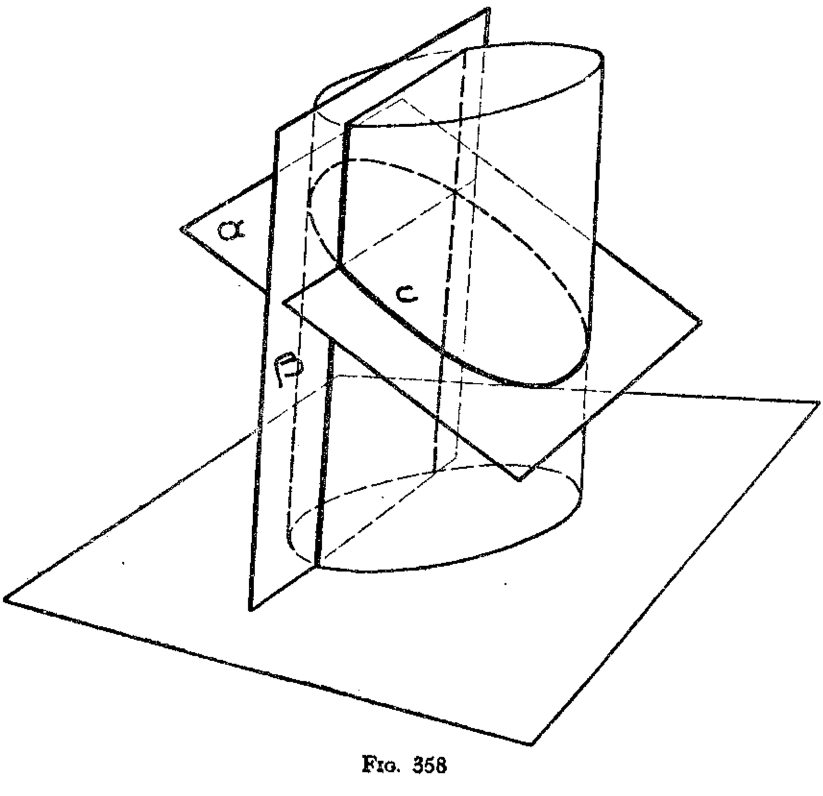


Fig. 358

1º Hallar la intersección del plano secante con un número suficiente de generatrices. Unidos mediante un trazo continuo los puntos obtenidos resulta la curva pedida.

2º Recurrir a planos auxiliares convenientemente elegidos que corten, por ejemplo, la superficie, según dos generatrices o según curvas paralelas a la directriz (o a la traza) de la superficie misma. Los puntos comunes a estas intersecciones y a las rectas según las cuales

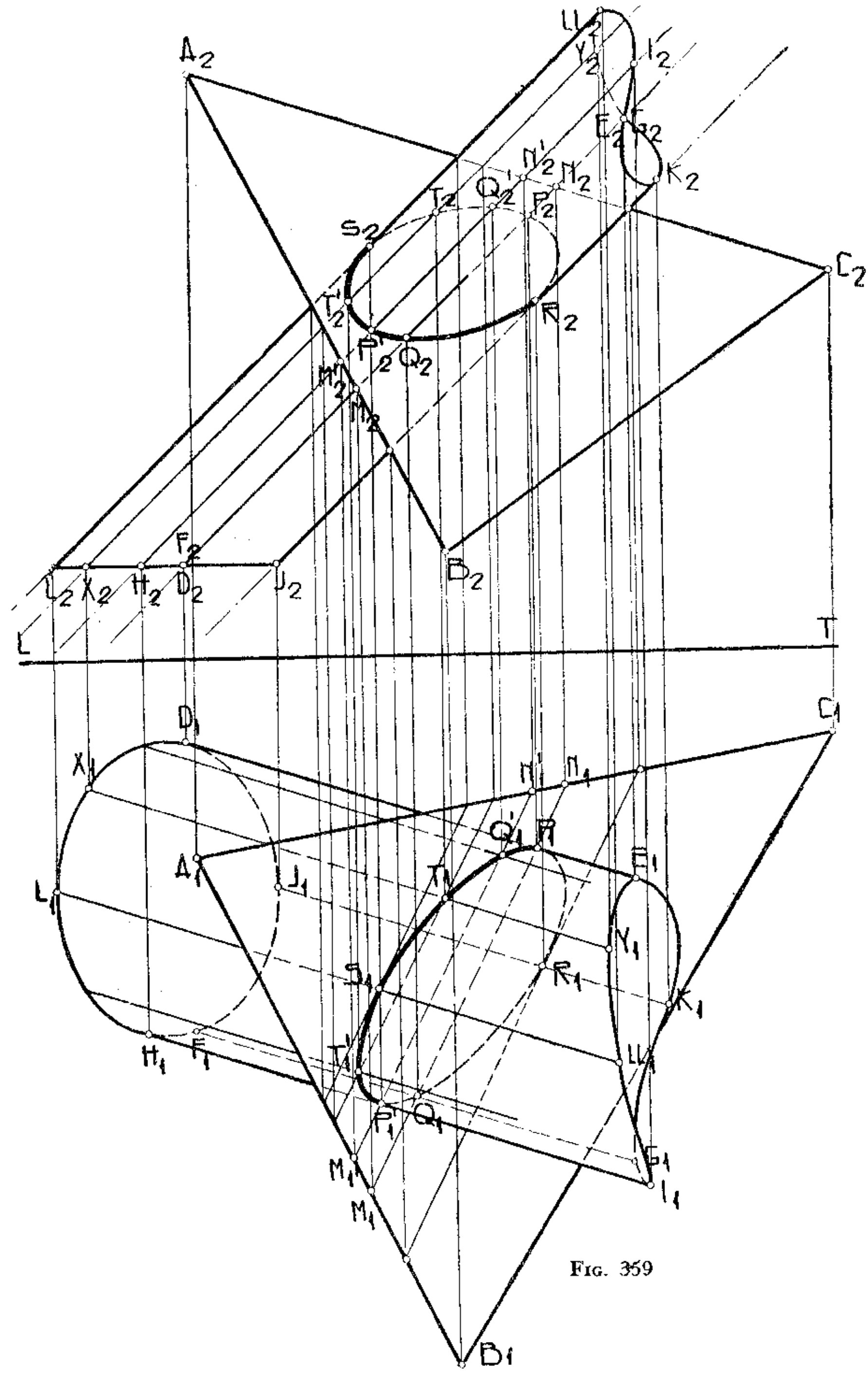

A2
B2
C2
D2
F2
H2
J2
L2
X2
E2
G2
I2
K2
S2
T2
T'2
P2
P'2
Q2
Q'2
R2
M2
M'2
N2
N'2
Y'2
L
T
A1
B1
C1
D1
E1
F1
G1
H1
I1
J1
K1
L1
X1
Y1
S1
T1
T'1
P'1
Q1
Q'1
R1
M1
M'1
N1
N'1

FIG. 359

el plano secante dado corta cada plano auxiliar son puntos de la sección buscada.

3. — Trátese, por ejemplo, de un cilindro circular oblicuo (figura 359) cortado por un plano *ABC*.

Siguiendo el primer método hallaremos la intersección de algunas generatrices con el plano dado.

Empecemos con la generatriz *DE*, que limita horizontalmente el contorno aparente de la superficie.

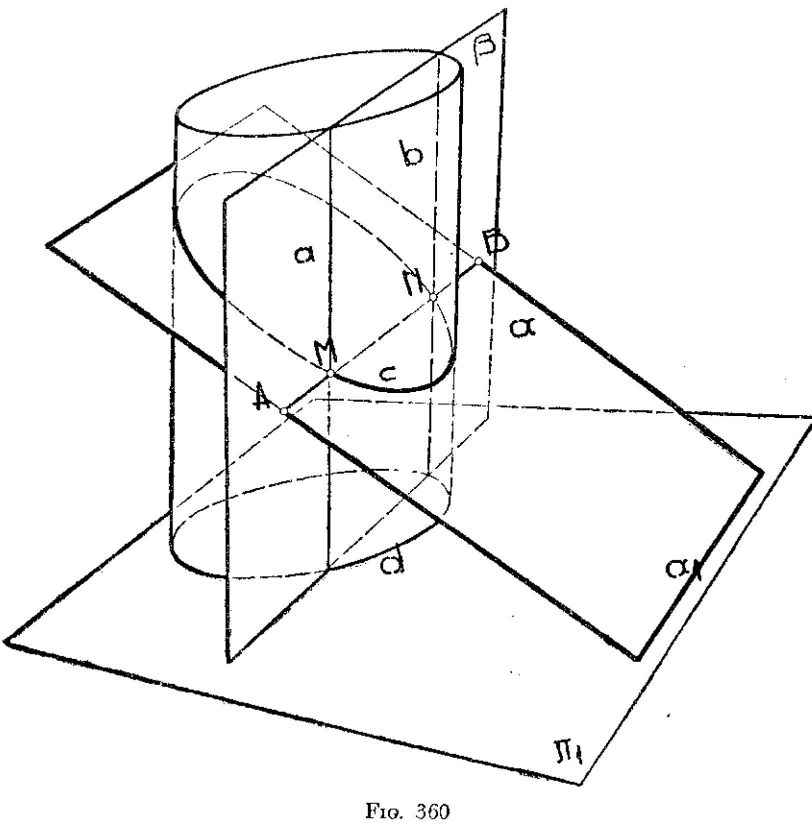


FIG. 360

El plano que proyecta *DE* sobre el plano vertical corta *ABC* según la recta *MN*. El punto *P*, en que se encuentran *MN* y la generatriz *DE*, es la intersección de ésta con el plano *ABC*; tenemos así un punto de la sección. Como D_2E_2 es proyección vertical de D_1E_1, pero también de F_1G_1, la misma recta *MN* permite determinar un segundo punto *Q* de la sección.

En la misma forma se procede con la otra generatriz *HI* del contorno aparente horizontal, obteniéndose los puntos *P'* y *Q'*.

Consideradas después las generatrices JK y $L\,LL$, que limitan sobre el plano vertical el contorno aparente, se obtienen los puntos R y S.

Otra generatriz cualquiera, XY, por ejemplo, da su propio punto de intersección T y también T', pertenecientes a la generatriz cuya proyección vertical coincide con la de XY.

4. — La figura 360 da la imagen espacial de un cilindro cortado por un plano α. Para hallar la sección empleando el segundo método pueden utilizarse planos auxiliares, tales como el β, por ejemplo, paralelos a las generatrices y paralelos también a la traza α_1 de α sobre el plano que contiene la directriz d. La superficie es cortada por estos planos auxiliares según generatrices, tales como a y b, y entonces los puntos M y N, en que la intersección AB de α y β corta a y b, son puntos de la sección.

5. — Trátese, como ejemplo, de un cilindro recto circular (figura 361) cortado por un plano cualquiera, α, dado por sus trazas.

El plano vertical β es paralelo a las generatrices de la superficie lateral del cilindro dado, y su traza β_1 es paralela a la traza α_1 del plano secante. Corta la superficie según las generatrices a y b y el plano secante α según la horizontal (h_1, h_2). Los puntos A y B, comunes a las generatrices a y b y a la horizontal h, son puntos de la sección.

El empleo de un número suficiente de planos auxiliares paralelos al β permite hallar los puntos necesarios para el trazado de la sección, que es una elipse cuya proyección horizontal coincide con la proyección horizontal de la base del cilindro y cuya proyección vertical es $A_2B_2D_2C_2$. Son puntos notables de la sección los puntos A_2 y D_2 del contorno aparente vertical, determinados por los planos auxiliares cuyas trazas horizontales pasan por A_1 y D_1; los puntos más bajo y más alto, M_2 y N_2, determinados por planos cuyas trazas horizontales son tangentes a la circunferencia de la base, y los puntos P_2 y Q_2, determinados por el plano que corta la base según un diámetro. La verdadera magnitud de la sección ha sido obtenida rebatiendo sobre el plano horizontal. Por afinidad pueden determinarse cuantos puntos se necesiten. En particular, el rebatimiento de los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ dan los ejes de la sección elíptica.

La tangente en un punto B de la sección es, como se sabe, la intersección del plano secante y el plano tangente a la superficie cilíndrica a lo largo de la generatriz que pasa por B. La traza horizontal de este último plano es γ_1, tangente en B_1 a la circunferencia de la base. La traza horizontal de la intersección de ambos planos es entonces T_1T_2, y como esta intersección debe pasar por B, la recta TB será la tangente buscada.

En la figura 362 se ha dibujado el desarrollo de la superficie del tronco, cortada a lo largo de la generatriz que pasa por M.

La superficie desarrollada tiene como eje de simetría la generatriz que pasa por el punto más alto, N, de la sección. Los puntos de infle-

xión de la transformada de la sección corresponden a los puntos P y Q, determinados por el plano auxiliar que pasa por el centro O de la base.

La tangente en el punto B de la transformada resulta determinada tomando $\overline{B_o T_o} = \overline{B_1 T_1}$ de la figura 361.

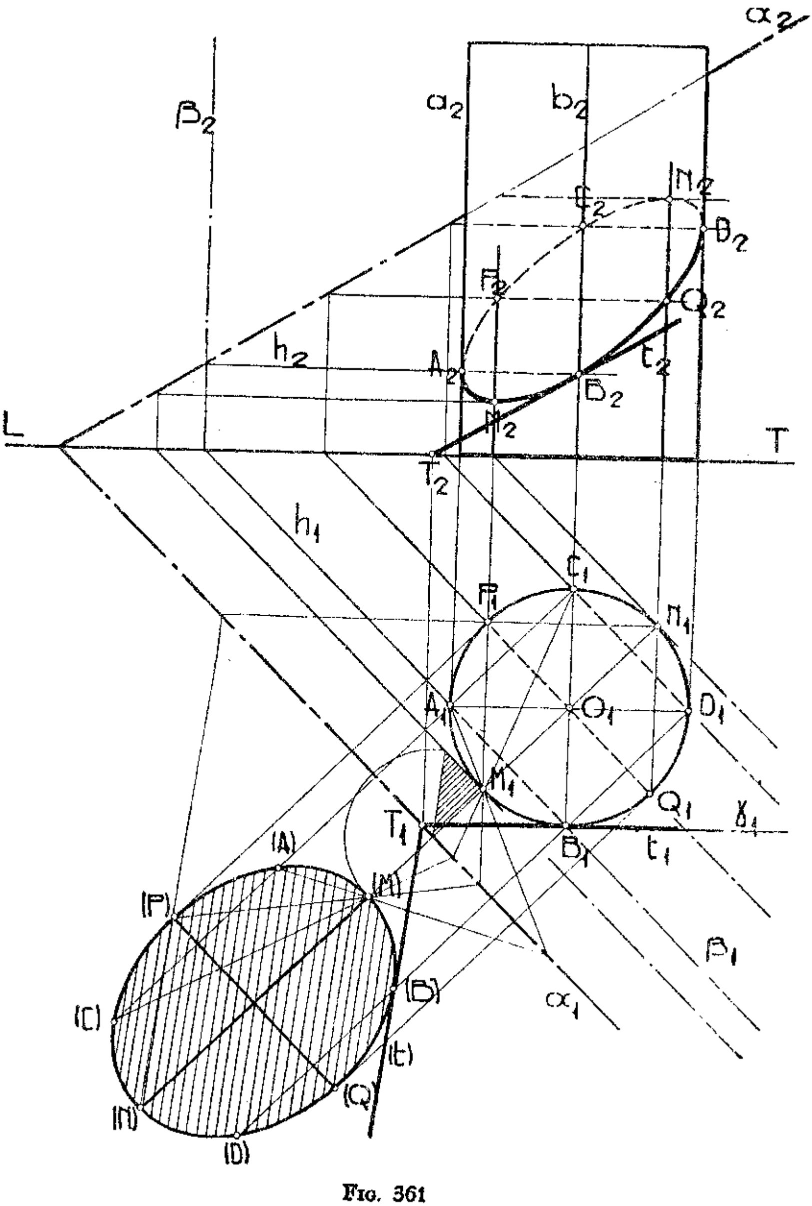


Fig. 361

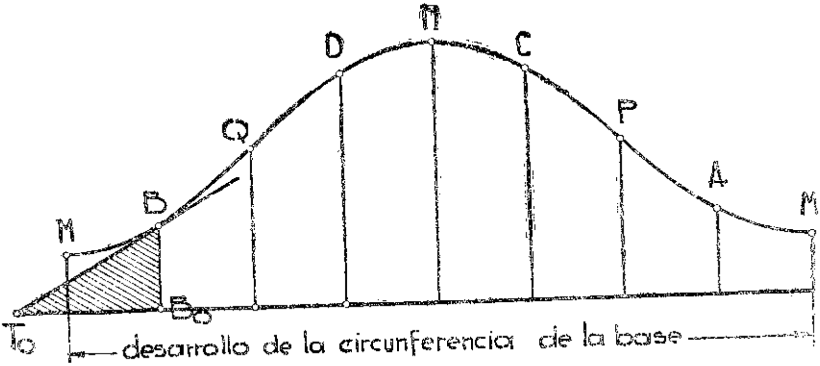


FIG. 362

6. — La figura 363 da la sección de un cilindro recto mediante un plano de canto. Se ha dibujado también el desarrollo de la superficie del tronco (fig. 363 bis).

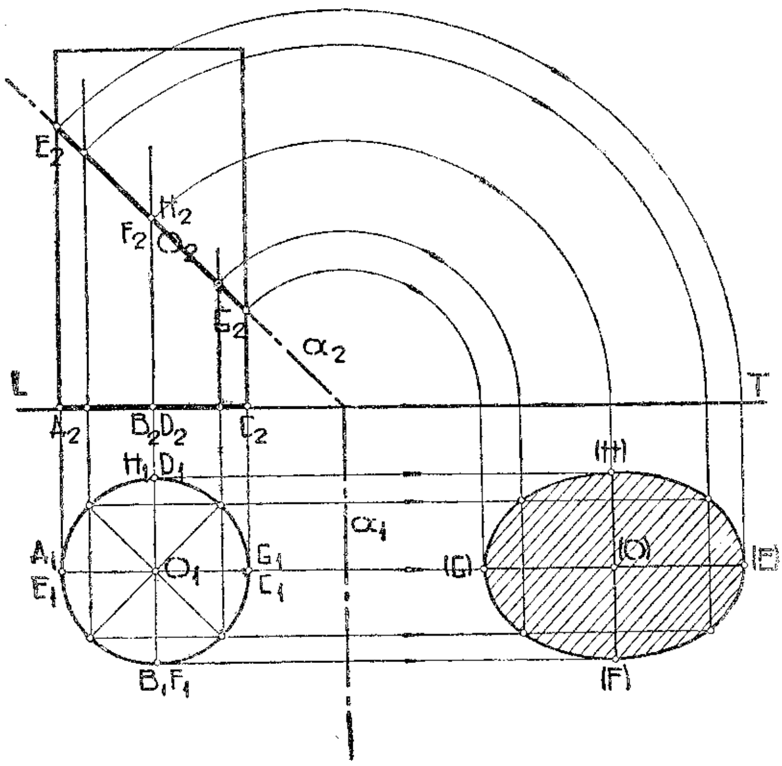


FIG. 363

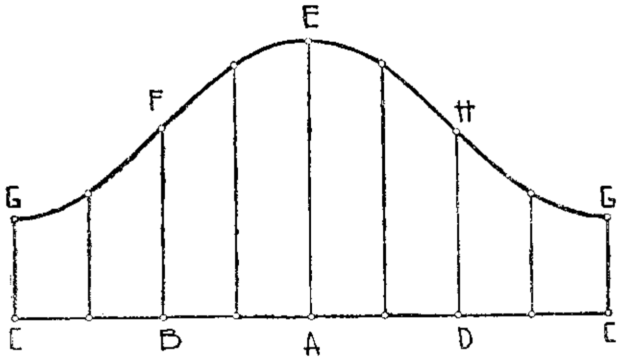


FIG. 363 BIS

§ 79. INTERSECCION DE UNA RECTA CON UNA SUPERFICIE CILINDRICA

1. — Se hace pasar por la recta un plano auxiliar que corte la superficie en la forma más simple. Los puntos P y Q, comunes a la sección producida y a la recta AB dada, son los puntos de entrada y salida de esta recta en la superficie cilíndrica (fig. 364).

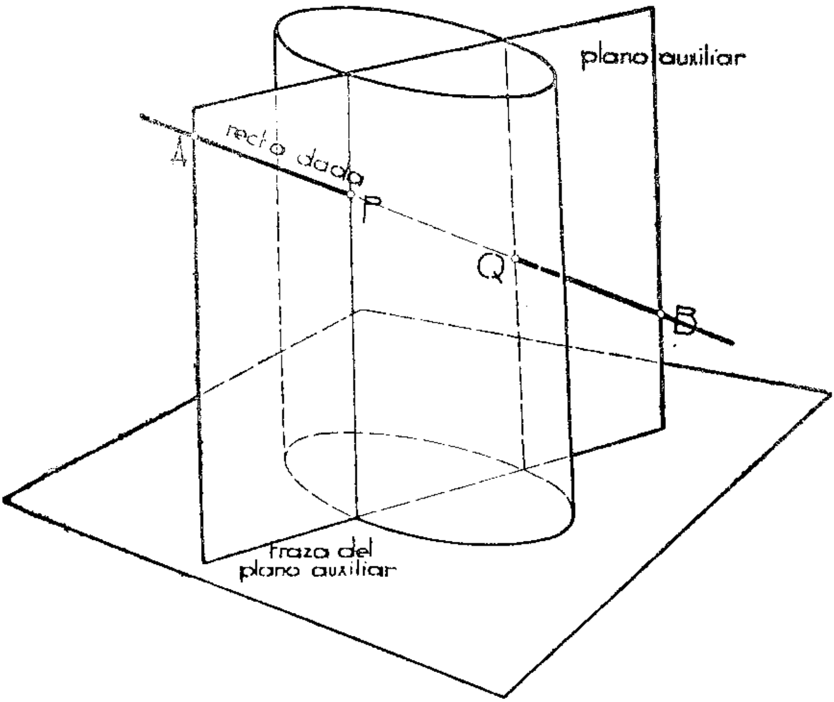


FIG. 364

2. — Sea (fig. 365) un cilindro oblicuo y una recta *a*. El plano auxiliar que produce la sección más simple es el que pasa por la recta y es paralelo a las generatrices.

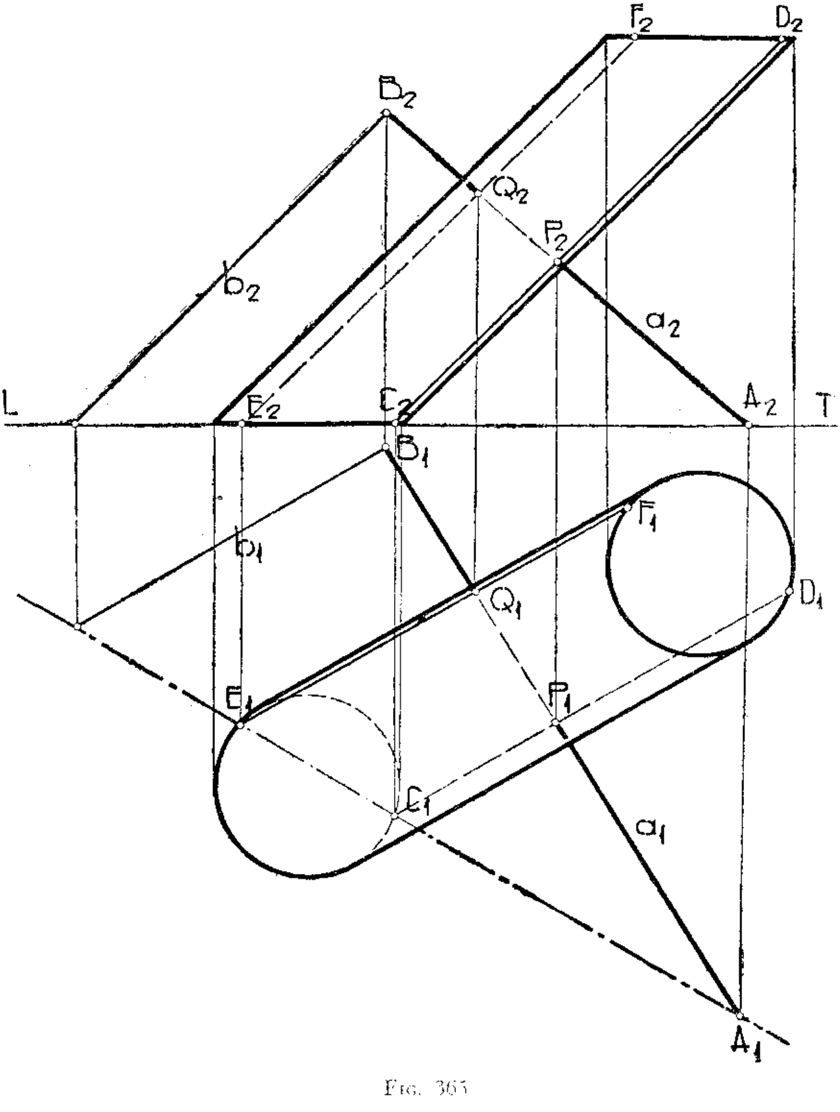


FIG. 365

Por un punto *B* cualquiera de la recta *a* conducimos la paralela *b* a las generatrices. El plano determinado por las rectas *a* y *b* corta la superficie según las generatrices *CD* y *EF*. Los puntos *P* y *Q*, comunes a estas dos rectas y a la recta dada, son los dos puntos pedido-

3. — La figura 366 se refiere, como caso particular, a un prisma **recto** atravesado por una recta ***a***.

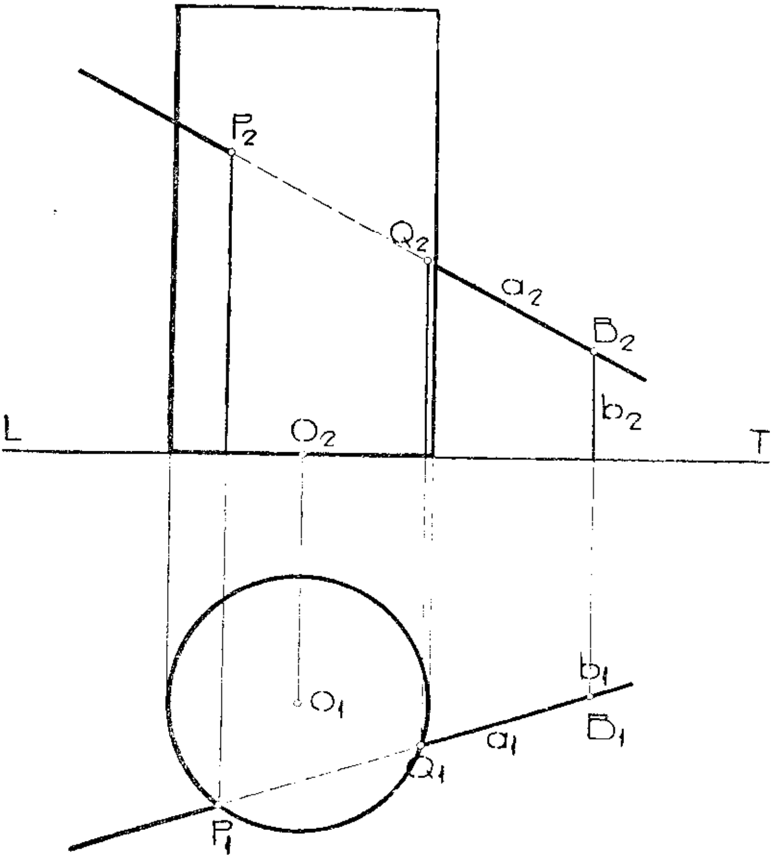
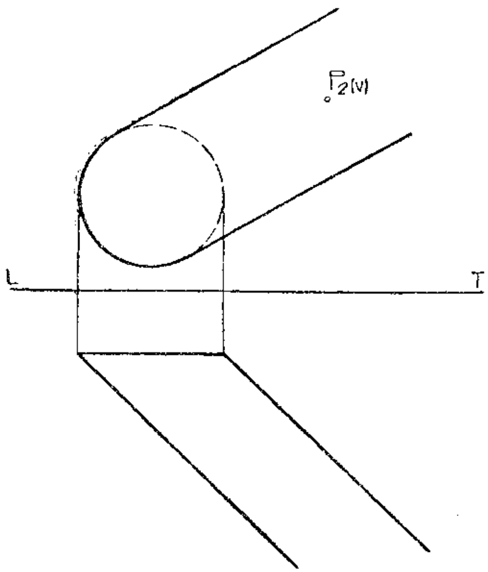


FIG. 366

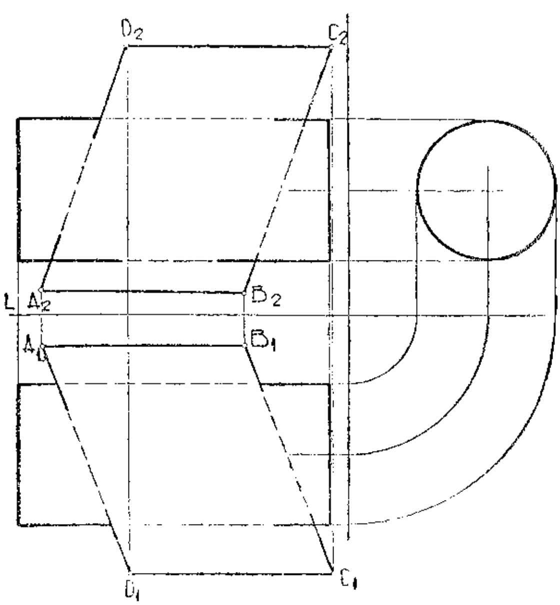
EJERCICIOS



EJERCICIO 101

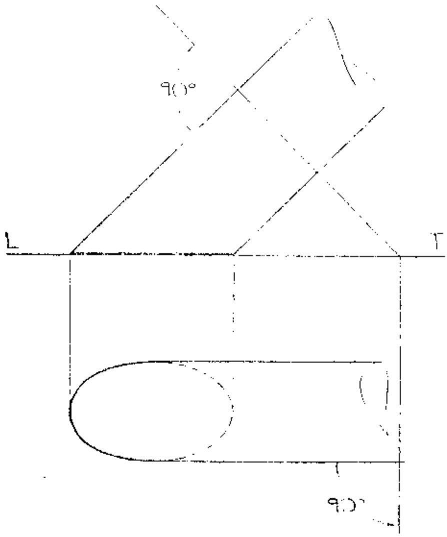
101. Hallar la proyección horizontal del punto *P* de la superficie cilíndrica representada. Determinar el plano tangente en *P* a la superficie.

102. Determinar la sección producida en el cilindro indicado en la figura, por el plano *ABCD*.

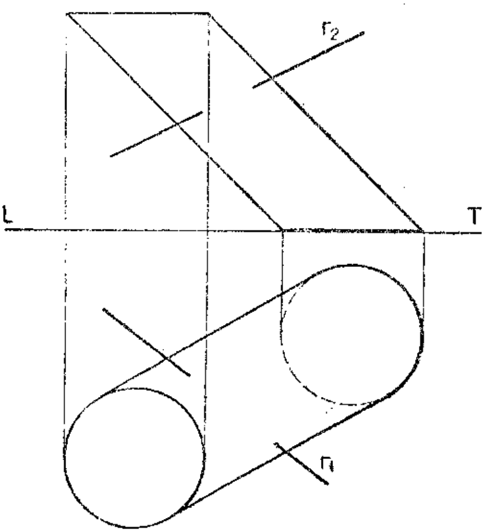


EJERCICIO 102

103. Determinar la sección recta del cilindro que se indica en la figura. Hacer después el desarrollo de la superficie del tronco. Marcar los puntos notables de la transformada de la base.



Ejercicio 103



Ejercicio 104

104. Hallar los puntos de intersección de la recta *r* con la superficie cilíndrica que se indica.

Capítulo XVIII

SUPERFICIES DE REVOLUCION

§ 80. REPRESENTACION

1. — Una superficie de revolución queda perfectamente definida si se conoce el eje y una curva meridiana.

El eje es considerado generalmente vertical (fig. 367).

Entre los infinitos meridianos de la superficie conviene representar aquél cuyo plano es paralelo a π_2. Se le llama, como ya sabemos, *meridiano principal*. En proyección vertical aparece en verdadera forma y magnitud; en proyección horizontal coincide con la traza homónima del plano que lo contiene. Cada paralelo de la superficie se proyecta horizontalmente según una circunferencia de centro O_1 y radio igual al del propio paralelo; verticalmente, se proyecta según un segmento igual a su diámetro y paralelo a LT.

La proyección horizontal de un meridiano cualquiera, l, coincide con la traza homónima β_1 del plano que lo contiene.

En lo que concierne a la proyección vertical, puesto que el meridiano principal puede ser considerado como rebatimiento de un meridiano cualquiera de la superficie sobre el plano vertical, se tendrá una afinidad homológica entre las proyecciones verticales de ambos meridianos, siendo e_2 el eje de afinidad y la perpendicular a e_2 la dirección de afinidad.

En cuanto al contorno aparente sobre el plano π_2, es dado por la proyección vertical del meridiano principal; sobre el plano horizontal es dado por uno o más paralelos, según la superficie considerada.

2. — Dada una de las proyecciones, P_1, por ejemplo, de un punto perteneciente a una superficie de rotación, hallar la otra proyección P_2 (fig. 368).

El paralelo que pasa por P_1 se proyecta horizontalmente según la circunferencia de centro O_1 y radio $\overline{O_1P_1}$.

Las líneas de referencia por los extremos A_1 y B_1 del diámetro paralelo a LT de esa circunferencia encuentran el meridiano principal en los puntos (A_2, B_2) y (A'_2, B'_2), determinando dos segmentos, $\overline{A_2B_1}$ y $\overline{A'_2B'_2}$, proyecciones de dos paralelos de igual radio y cuyas proyecciones horizontales se confunden en la única circunferencia de centro O_1 y radio $\overline{O_1P_1}$.

Considerando entonces uno u otro de esos paralelos se tiene P_2 o P'_2 como proyección vertical del punto considerado.

El problema tiene, pues, en general, dos soluciones.

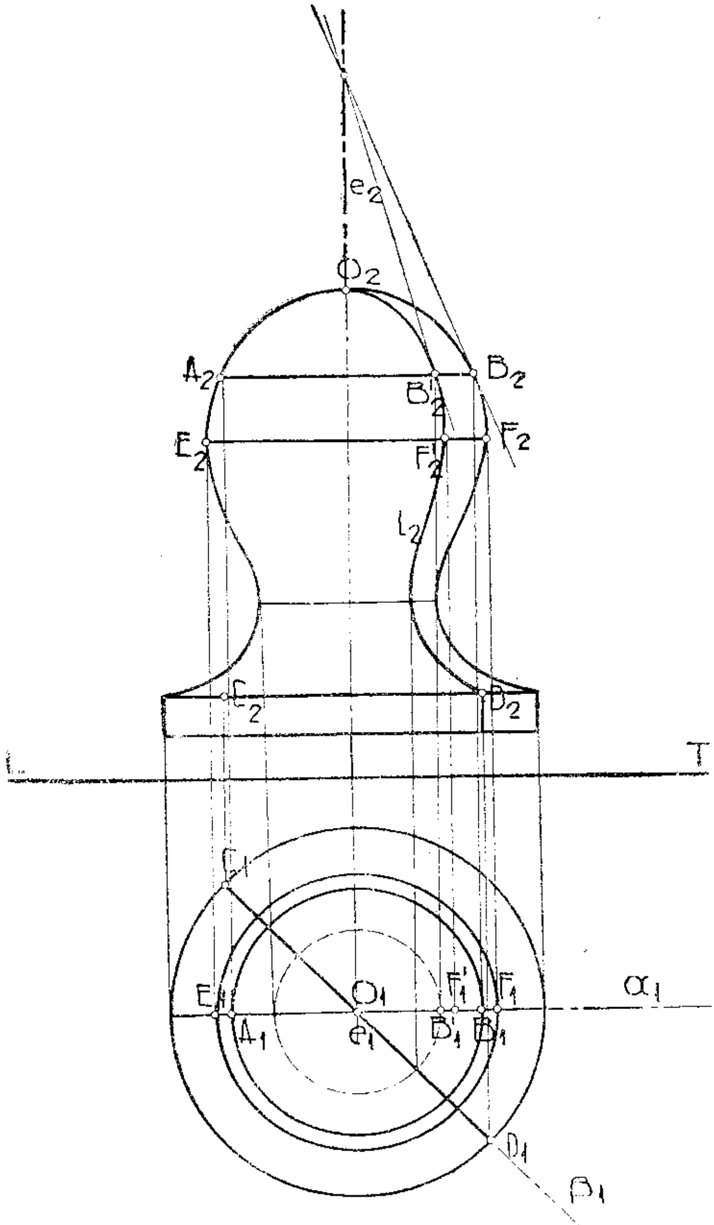


FIG. 367

Hallemos ahora, como problema inverso, aquellos eventuales puntos de la superficie conociendo la proyección vertical P_2 (fig. 369).

La proyección vertical del paralelo al cual pertenece P_2 es el segmento $\overline{A_2B_2}$. La horizontal es la circunferencia de centro O_1 y radio $\overline{O_1A_1}$ igual a $\overline{O_2A_2}$. La línea de referencia por P_2 determina sobre esa

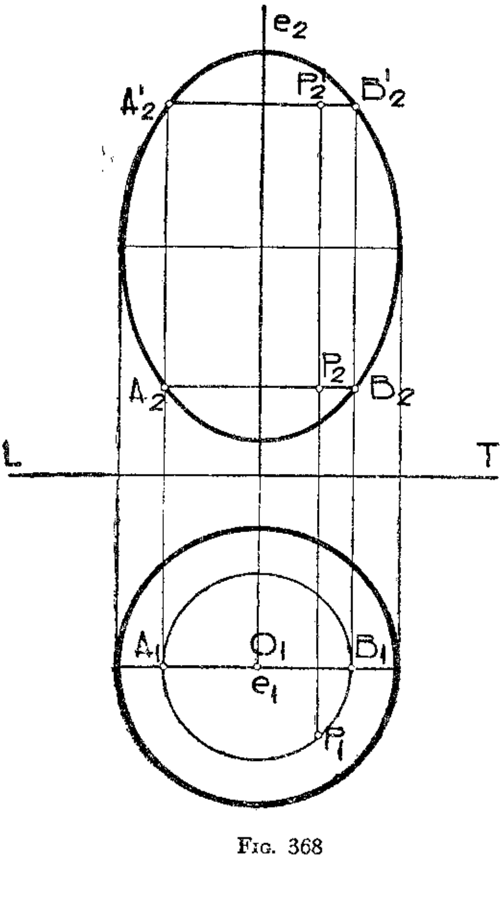


Fig. 368

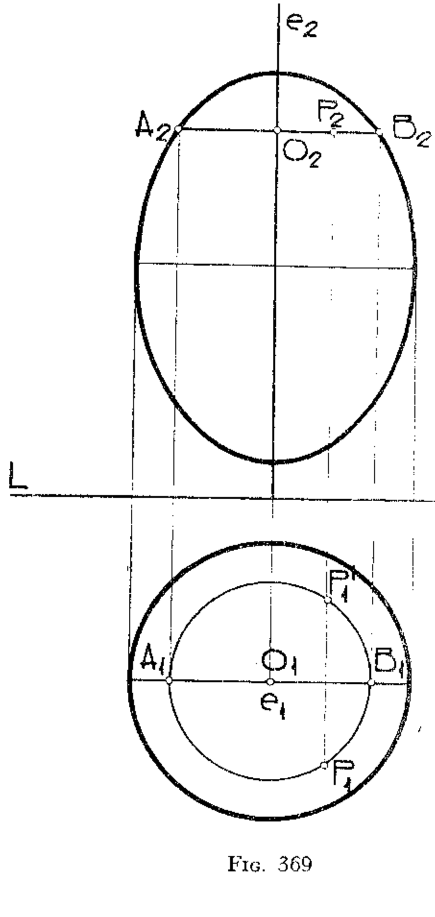


Fig. 369

circunferencia dos puntos, P_1 y P'_1. Las soluciones del problema son, pues, en general, dos; en nuestro caso, los puntos $P \equiv (P_1, P_2)$ y $P' \equiv (P'_1, P_2)$.

§ 81. PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE DE ROTACION

1. — La superficie es dada por su eje y por su meridiano principal (fig. 370). El punto dado es (P_1, P_2), perteneciente a la superficie.

Para hallar el plano tangente pedido bastará determinar las tangentes en P a dos líneas cualesquiera de la superficie, que pasan por P. El plano individualizado por esas dos tangentes es el plano pedido.

Las dos líneas pueden ser el paralelo y el meridiano a los cuales pertenece P.

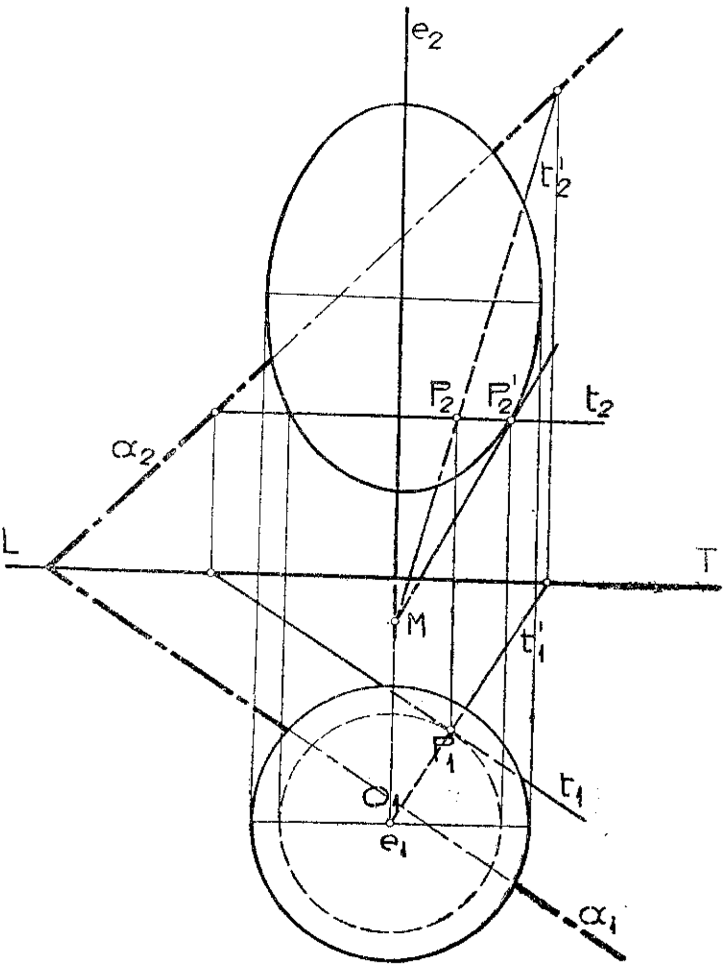


Fig. 370

La tangente por P al paralelo se proyecta horizontalmente según la tangente t_1 por P_1 a la circunferencia de centro O_1 y radio $\overline{OP_1}$. Su proyección vertical t_2 es paralela a LT.

La tangente por P al meridiano que pasa por él es una recta contenida en el plano del meridiano. Horizontalmente, se proyecta según

t'_1 sobre la traza horizontal del plano. Para hallar su proyección vertical t'_2 recordemos que el meridiano principal y otro meridiano cualquiera son figuras afines; y afines serán las tangentes en dos puntos correspondientes de dos meridianos.

Se traza entonces la tangente por P'_2 y se une P_2 con el punto M en que aquella tangente encuentra el eje de afinidad e_2. La recta MP_2 es la proyección vertical de la tangente al meridiano que pasa por P.

El plano α, formado por las rectas t y t', es entonces el plano tangente en P a la superficie dada.

2. — Hay otro procedimiento para encontrar el plano tangente a una superficie de rotación en uno de sus puntos P. Recordemos (4 de § 70) que ese plano es también tangente a la superficie cónica circunscripta a la superficie de rotación, según el paralelo al cual pertenece el punto.

Bastará entonces determinar la superficie cónica circunscripta y trazarle por P el plano tangente.

Es lo que se ha hecho en la figura 371.

Si $\overline{A_2B_2}$ es la proyección vertical del paralelo al cual pertenece P las tangentes al meridiano principal por A_2 y B_2 dan las generatrices del contorno aparente de la superficie cónica circunscripta.

El plano tangente a esta superficie auxiliar debe contener (1 de § 74) la generatriz VH que pasa por P y la tangente en H a la traza horizontal de la superficie cónica.

Su traza horizontal α_1 coincide con la tangente a la traza homónima de la superficie. Para determinar la traza α_2 habría que encontrar la traza vertical de la generatriz VH, o bien, ya que P es punto del plano, trazar por él una horizontal h, hallar su traza vertical T_2 y hacer pasar α_2 por T_2.

3. — Un tercer procedimiento consiste en utilizar como superficie auxiliar la superficie cilíndrica circunscripta a la superficie dada según el meridiano al cual pertenece el punto. Las dos superficies tienen en el punto considerado el mismo plano tangente. Todo se reduce, pues, a reproducir un problema conocido.

4. — Si nos proponemos hallar el plano tangente a una superficie de rotación por un punto exterior a la misma, todo puede ser reducido a trazar un plano tangente a la superficie cónica circunscripta a la superficie de rotación, siendo vértice el propio punto exterior. El problema tiene, en general, como es fácil comprender, infinitas soluciones. Para determinarlo habría que hallar la *línea de contacto* de ambas superficies y fijar sobre ella el punto de tangencia.

5. — Veamos entonces cómo se encuentra la línea de contacto de una superficie de rotación y de una superficie cónica a ella circunscripta.

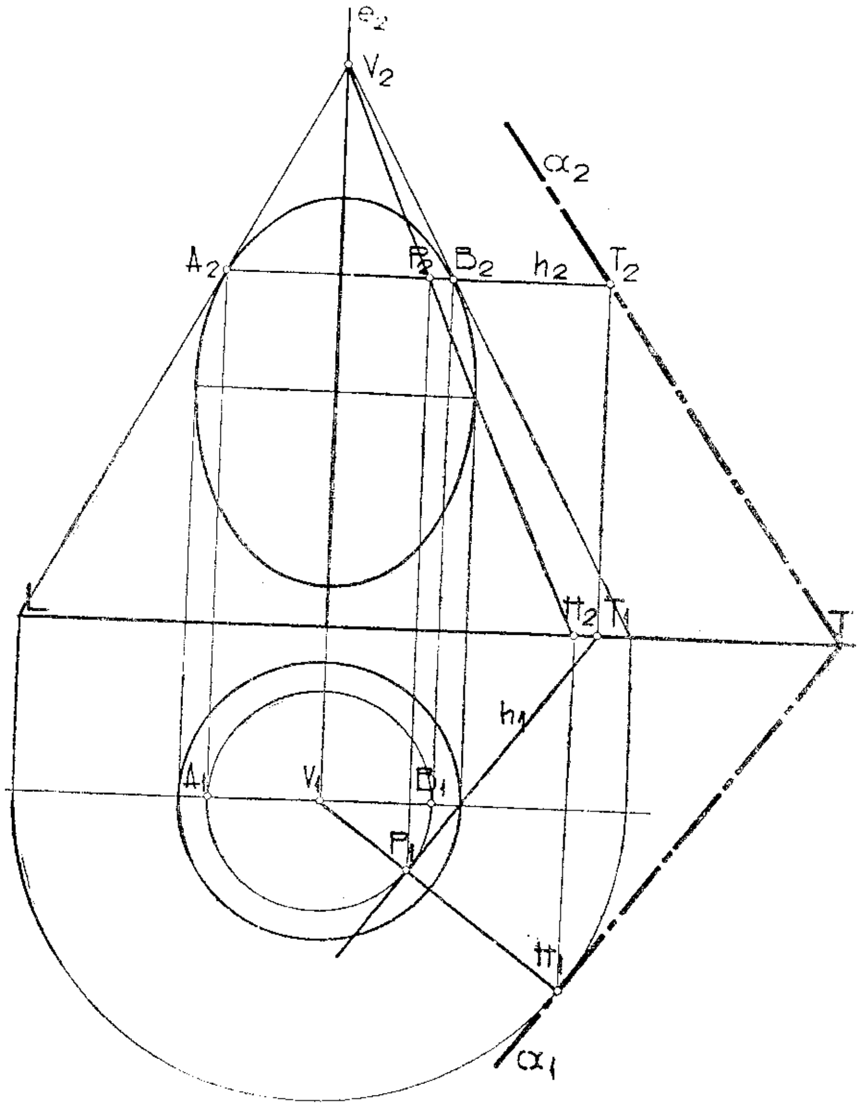
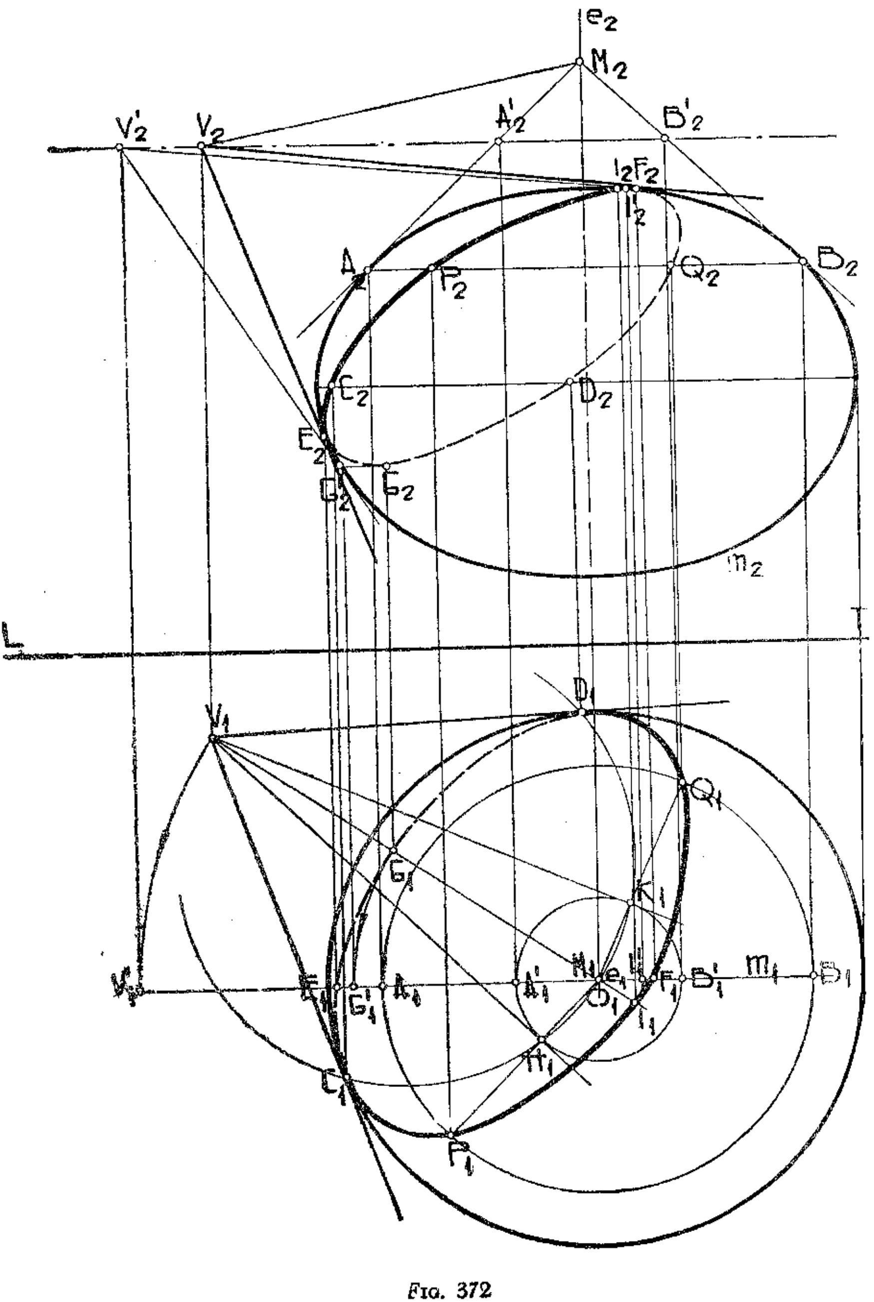


FIG. 371

Trátese de la superficie de rotación de eje *e* y meridiano principal *m* (fig. 372) y sea *V* el vértice de la superficie cónica circunscripta.

El método general usado más o menudo consiste en recurrir a superficies cónicas de rotación, auxiliares, circunscriptas a la super-



e₂
M₂
V'₂
V₂
A'₂
B'₂
I₂
F₂
I'₂
A₂
P₂
Q₂
B₂
C₂
D₂
E₂
G'₂
G₂
m₂
L
T
D₁
V₁
Q₁
G₁
K₁
M₁
e₁
O₁
B'₁
m₁
B₁
A₁
A'₁
G'₁
E₁
F₁
I₁
H₁
C₁
P₁

FIG. 372

ficie dada a lo largo de distintos paralelos. Determinada una de estas superficies cónicas auxiliares, podemos trazarle por el punto V los planos tangentes. Cada uno de éstos será tangente a la superficie cónica a lo largo de una generatriz y tangente también a la superficie dada en el punto común a esa generatriz y al paralelo elegido. Este punto es un punto de la línea de contacto buscada. Basta considerar entonces sucesivamente un número suficiente de paralelos para obtener los puntos necesarios para su trazado.

Sea $\overline{A_2B_2}$ la proyección vertical del primer paralelo arbitrariamente elegido; su proyección horizontal es la circunferencia de centro O_1 y radio $\overline{O_1A_1}$. La tangente A_2M_2 a la superficie puede ser considerada como generatriz de una superficie cónica circunscripta a la dada, según el paralelo elegido. Se trata de trazar por V los planos tangentes a esta superficie cónica.

Para simplificar la construcción de los planos tangentes que pasan por V conviene admitir que tanto esta primera superficie auxiliar como las siguientes tengan su respectiva base en el plano horizontal que pasa por V. Esta base se proyecta, refiriéndonos a la primera superficie, verticalmente según el segmento $\overline{A'_2B'_2}$ horizontalmente según la circunferencia de radio $\overline{O_1A'_1}$. La recta que une M con V tiene como traza sobre el plano de la base el mismo punto V. Las tangentes V_1H_1 y V_1K_1 a la base permiten individualizar las generatrices MH y MK de contacto de los planos tangentes a la superficie cónica auxiliar. Prolongados hasta el plano del paralelo considerado determinan los puntos P y Q de la línea de contacto.

Fijados otros paralelos, pueden buscarse todos los puntos necesarios para el trazado de esa línea.

Notando que cualesquiera sean los paralelos elegidos siempre deben trazarse por V_1 tangentes a circunferencias de centro O_1, se puede, para simplificar la determinación de los sucesivos puntos de tangencia, como lo enseña la *Geometría Elemental*, dibujar la circunferencia de diámetro $\overline{V_1O_1}$.

Los puntos de la línea de contacto situados *sobre el ecuador* son C y D, determinados por la circunferencia de diámetro $\overline{V_1O_1}$ al cortar la proyección horizontal del ecuador.

Los puntos de la curva de contacto situados sobre el *meridiano principal* se obtienen mediante las tangentes por V_2 a la proyección vertical de ese meridiano. Son (E_1, E_2) y (F_1, F_2).

Para encontrar los puntos *más alto* y *más bajo* del contorno aparente observemos que el plano meridiano que pasa por V constituye un plano de simetría del contorno aparente. Las tangentes por V' a ese meridiano determinarán entonces los puntos límites más alto y más bajo. Pero es necesario llevar previamente sobre el plano π_2 tanto ese plano meridiano como el punto V. Girando alrededor del eje MO, el punto V se ubica en $V' \equiv (V'_1\ V'_2)$ En cuanto al meri-

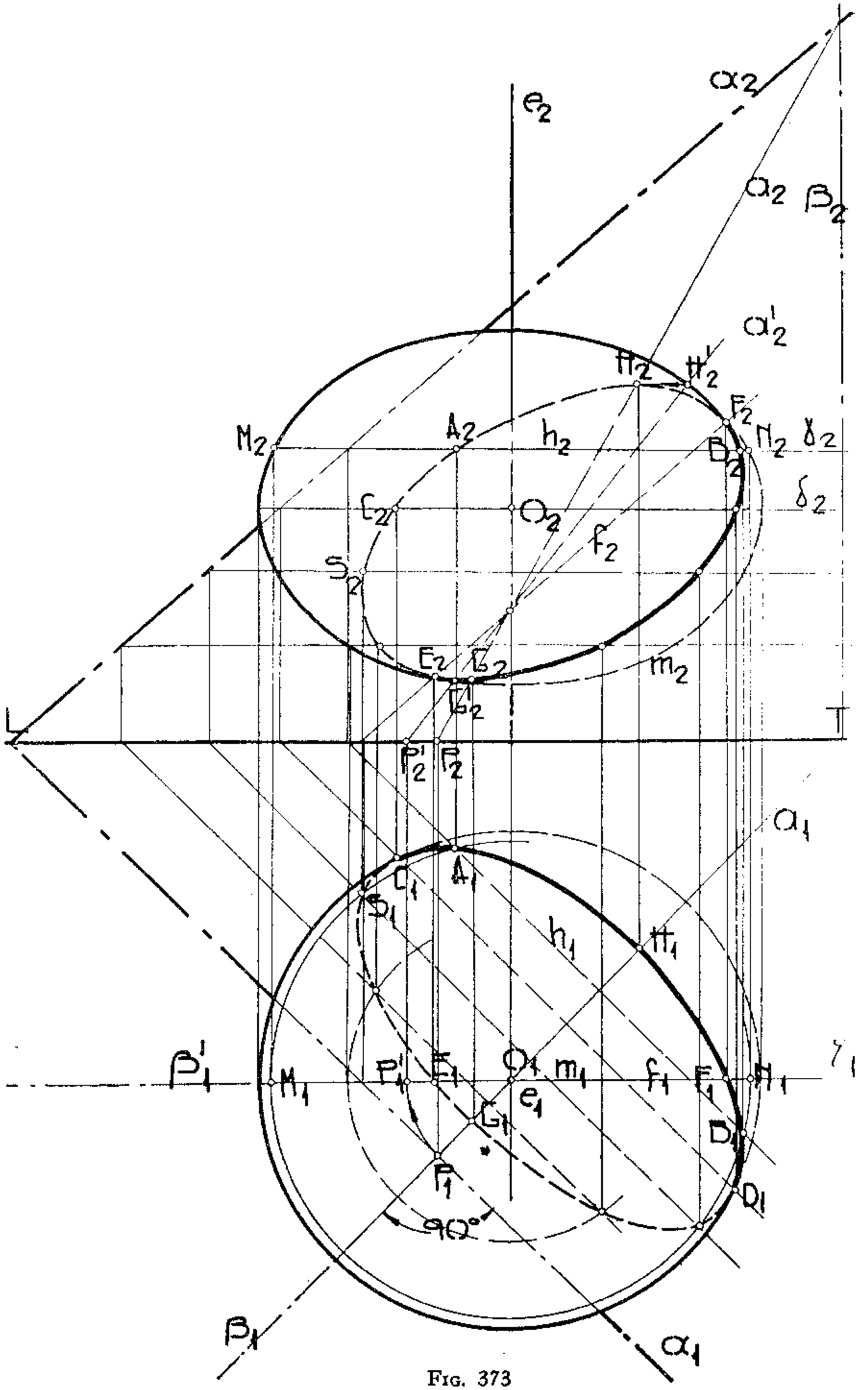


FIG. 373

diano, cuya proyección horizontal está en la recta V_1O_1, ocupará la posición del meridiano principal.

Se conducen entonces las tangentes $V_2'G_2'$ y $V_2'I_2'$ por V_2' al meridiano principal; los puntos de tangencia G_2' e I_2' determinan los paralelos que al deshacer el giro permiten individualizar los puntos buscados (G_1, G_2) e (I_1, I_2).

§ 82. INTERSECCION DE UNA SUPERFICIE DE ROTACION CON UN PLANO

1. — Se determina por puntos recurriendo a planos auxiliares convenientemente elegidos. Los que dan secciones de más fácil construcción son los perpendiculares al eje de la superficie (planos horizontales) o los que pasan por él. Los primeros cortan la superficie según paralelos, de construcción inmediata: los segundos producen secciones cuya proyección horizontal es la misma traza horizontal del plano auxiliar considerado y cuya proyección vertical es de fácil determinación.

Uno cualquiera de los planos auxiliares corta el plano secante según una recta r, y entonces los eventuales puntos de intersección de r con la curva c, determinada por ese mismo plano auxiliar al cortar la superficie dada, son puntos de la sección pedida.

Considerando un número suficiente de planos auxiliares se obtienen los puntos necesarios para el trazado de esa sección.

2. — Trátese de una superficie de rotación dada por su eje (e_1, e_2) y su meridiano principal (m_1, m_2) (fig. 373). Sea (α_1, α_2) el plano secante.

Consideremos varios planos auxiliares horizontales. Sea γ_2 uno de ellos. Este determina en la superficie el paralelo que se proyecta verticalmente según el segmento M_2N_2; horizontalmente, según la circunferencia de centro O_1 y radio $\overline{O_1M_1}$.

El plano secante α es cortado por γ_2 según la recta horizontal (h_1, h_2), y entonces los puntos A y B, comunes a esta recta y a aquel paralelo, son puntos de la sección que se busca.

Y así para otros planos auxiliares.

En estas secciones interesan los siguientes puntos notables:

1º Los puntos sobre el ecuador. Ellos separan en proyección horizontal la parte visible de la sección, de la parte invisible (plano δ).

2º Los puntos que están sobre el meridiano principal. Ellos separan en la proyección vertical la parte visible de la sección de la parte invisible (plano ε).

3º Los puntos más alto y más bajo. Para éstos notemos que la sección entera es simétrica con respecto al plano vertical cuya traza [illegible] pasa por O_1 y es perpendicular a α_1. Como esos puntos pertenecen a los planos α y β, pertenecerán a su intersección $a \equiv (a_1, a_2)$ y per-

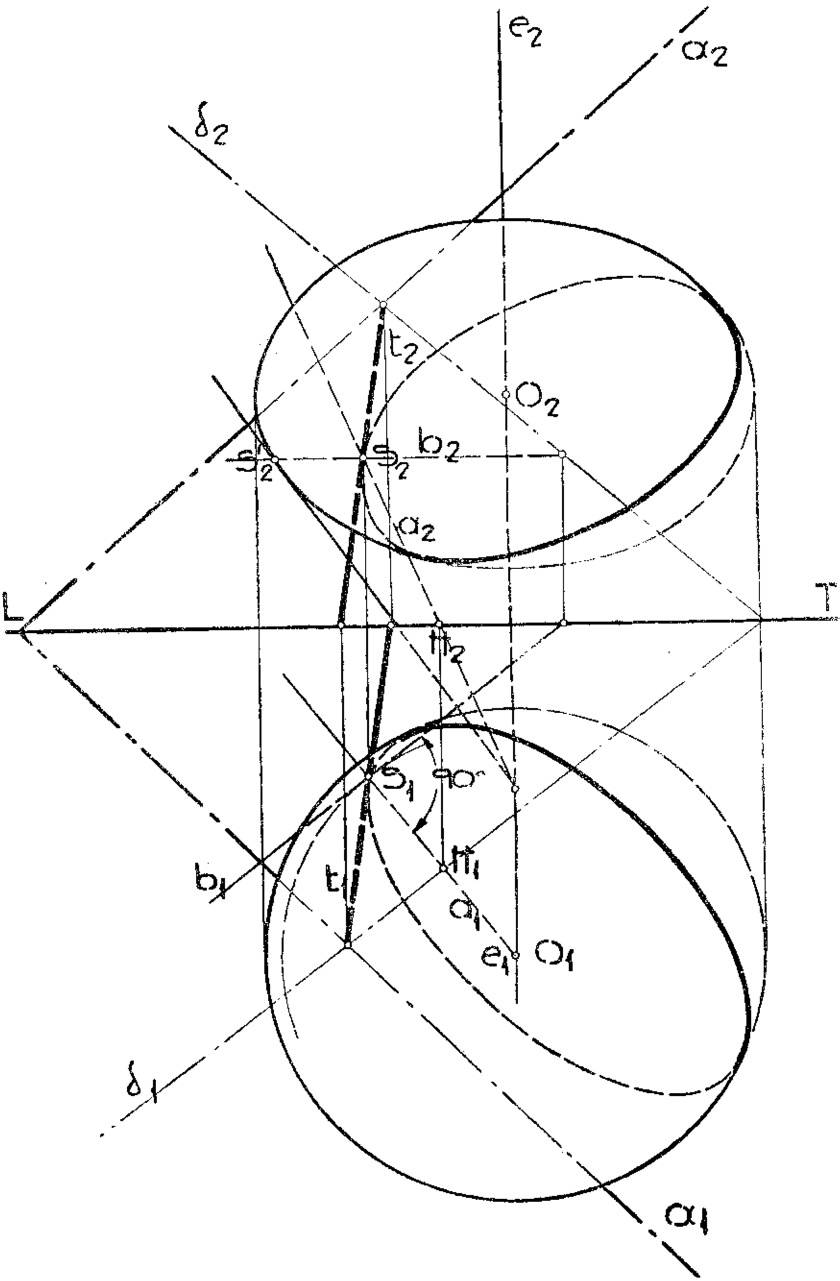


FIG. 374

tenecerán también, naturalmente, a la sección meridiana producida en la superficie por el plano auxiliar β.

Debemos hallar entonces los dos puntos de intersección de la recta a y de la sección meridiana determinada por β. Para simplificar procederemos como en 4 del parágrafo anterior. Giraremos la recta a y el plano β hasta colocarlos paralelamente al plano vertical de proyección. Las nuevas proyecciones de a serán $O_1P'_1$ y a'_2 y la nueva traza de β será ρ'_1. La sección meridiana contenida en β será ahora el meridiano principal cortado por $(O_1P'_1 \; a'_2)$ en los puntos G' y H' Volviendo a la posición primitiva resultan los puntos G y H buscados.

3.—La tangente a la curva de la sección plana encontrada en uno cualquiera de sus puntos queda determinada como intersección del plano dado α y del plano tangente a la superficie en ese punto.

En la figura 374 se ha representado la misma superficie de rotación del ejercicio anterior y un punto $S \equiv (S_1, S_2)$ de la sección producida por el plano α.

El plano tangente por S a la superficie puede ser hallado mediante cualquiera de los procedimientos indicados. Nosotros lo hicimos por afinidad, obteniendo así sus trazas δ_1 y δ_2. La recta $t \equiv (t_1, t_2)$, intersección de los planos α y δ, es la tangente por S a la sección plana.

4.—Nos proponemos encontrar ahora el punto de intersección de una recta y una superficie de rotación.

Por la recta dada se hace pasar un plano auxiliar. Se busca la sección producida, y entonces los puntos comunes a esta sección y a la recta son los puntos pedidos.

Es lo que se ha hecho en la figura 375. La recta dada es $r \equiv (r_1, r_2)$. Los puntos de intersección hallados son P y Q.

§ 83. SUPERFICIE ESFERICA

1.—La superficie esférica es una superficie de revolución engendrada por una semicircunferencia que gira alrededor de su diámetro.

Es de revolución con respecto a cualquiera de sus diámetros, y entonces, cualquiera sea el plano secante utilizado, la sección es siempre una circunferencia.

En particular, si el plano secante pasa por el centro, la sección es una *circunferencia* máxima de diámetro igual al de la superficie. En caso contrario la sección es una *circunferencia menor*.

2.—La proyección de una superficie esférica sobre cualquier plano es una circunferencia máxima.

La representación de una superficie esférica puede estar constituída entonces por dos circunferencias de diámetro igual al de la su

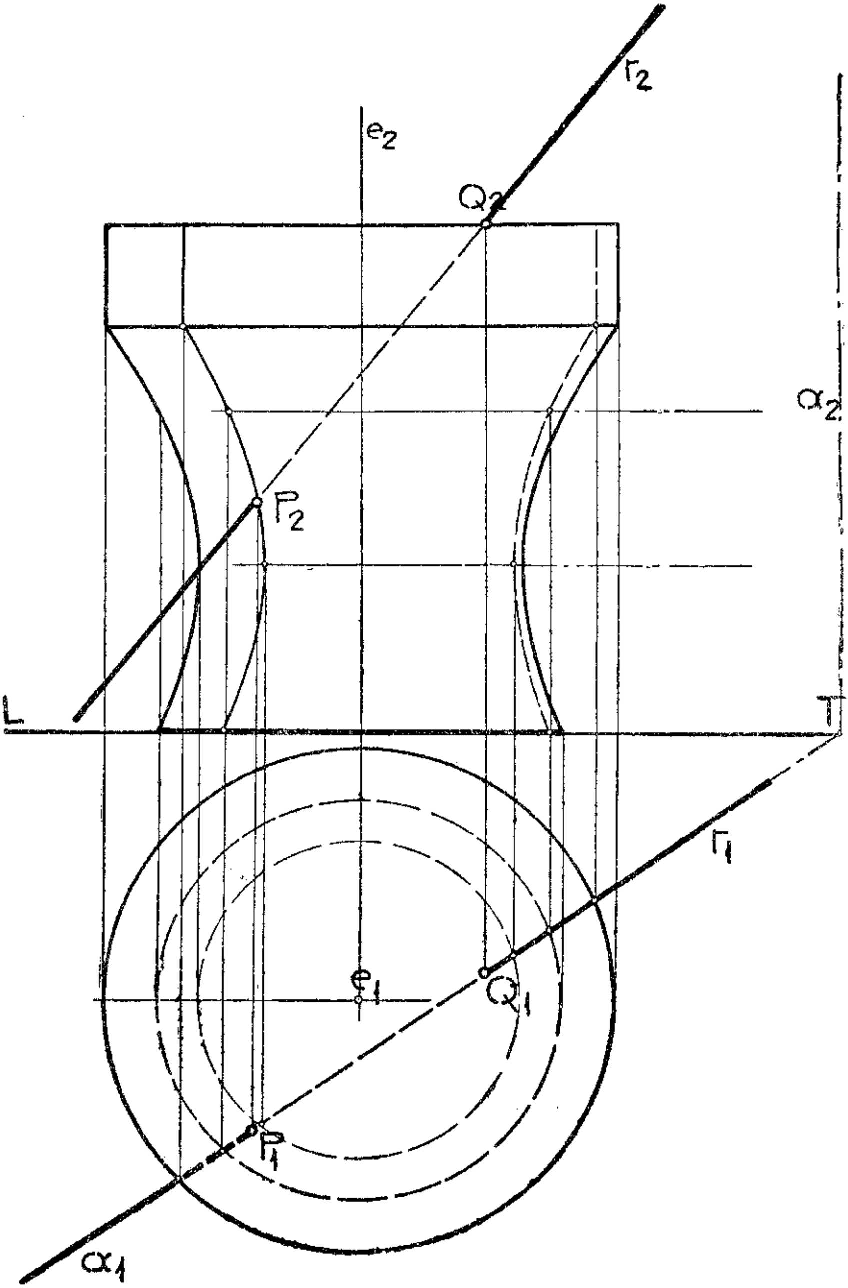


FIG. 375

perficie, y tales que sus centros O_1 y O_2 estén sobre una misma línea de referencia (figura 376). Puede tomarse como eje de rotación la vertical e, proyectada horizontalmente en O_1, y como generatriz la semicircunferencia $A_2B_2C_2$ de centro O_2. El meridiano principal es la circunferencia $A_2B_2C_2D_2$. Cada paralelo de la superficie se proyecta horizontalmente según una circunferencia de centro O_1, verticalmente según un segmento de recta paralelo a LT.

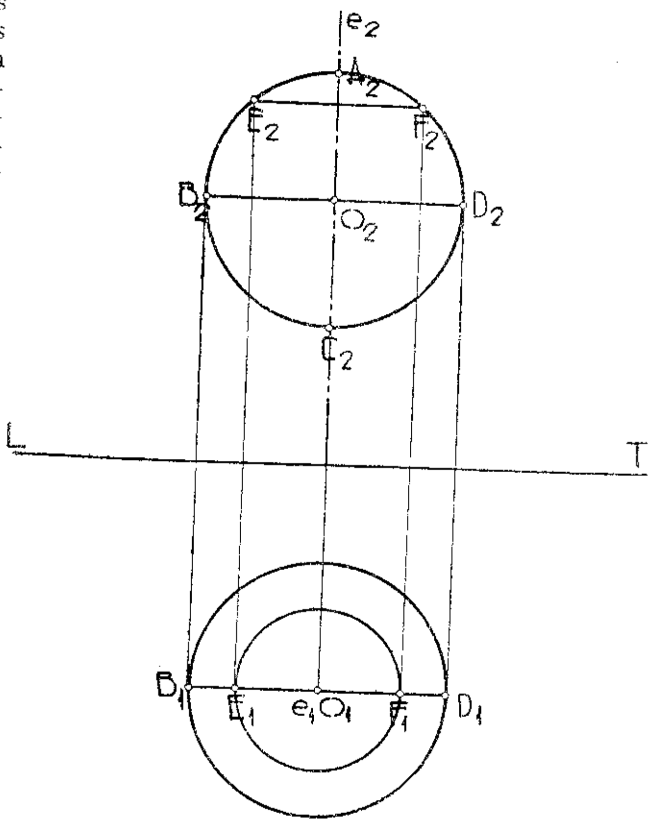


FIG. 376

La figura 377 da la determinación de la proyección horizontal de un punto P de la superficie cuando se conoce su proyección vertical.

3. — El plano tangente a una superficie esférica por uno de sus puntos, P, puede ser obtenido empleando el método general establecido para las superficies de revolución.

Puede procederse también así:

La recta tangente por P al paralelo que pasa por este mismo punto es la horizontal $h \equiv (h_1, h_2)$ (fig. 378). Por otra parte, la tangente por P a la circunferencia determinada por el plano secante y que pasa por P y es paralelo al plano vertical es la frontal $f \equiv (f_1, f_2)$.

El plano determinado por las rectas h y f es el plano tangente buscado.

4. — En la figura 379 se ha determinado la sección de una superficie esférica mediante un plano de canto.

La proyección vertical de la sección es el segmento $\overline{A_2B_2}$ de traza vertical del plano secante.

La proyección sobre el plano horizontal es una elipse. Un punto cualquiera, P, de la sección se obtiene utilizando un plano auxiliar horizontal β, que corta la superficie según un paralelo y el plano α según una recta de punta, r. Resultan entonces simultáneamente los dos puntos (P_1, P_2) y (P'_1, P_2) de la sección.

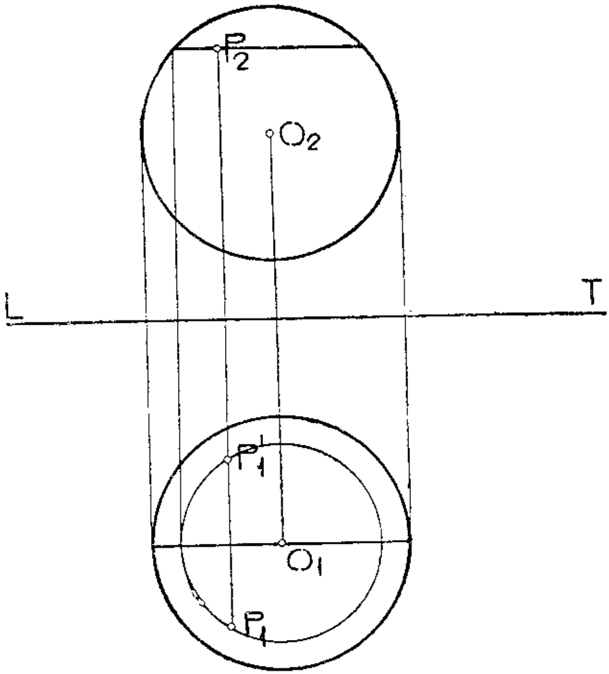


Fig. 377

Los puntos A_1 y B_1 limitan el eje menor de la elipse. La perpendicular al segmento $\overline{A_1B_1}$, en su punto medio C_1, permite hallar el eje mayor $\overline{D_1E_1} = \overline{A_2B_2}$.

La intersección del plano secante con el plano del ecuador hace conocer los puntos Q_1 y Q'_1 sobre el contorno aparente horizontal.

5. — En la figura 380 se ha determinado la sección producida en una superficie esférica mediante un plano diametral.

En primer lugar fueron determinadas las trazas (α_1, α_2) del plano mediante las proyecciones de la horizontal (h_1, h_2) que pasa por el centro O de la superficie.

La sección producida es, naturalmente, una circunferencia máxima cuyas proyecciones sobre los planos π_1 y π_2 son elipses. Queremos individualizar estas elipses.

Entre los infinitos diámetros de la circunferencia máxima antes mencionada hay uno, el paralelo al plano horizontal, que se proyecta sobre este plano en tamaño real $\overline{A_1B_1}$, segmento de la recta h_1. En

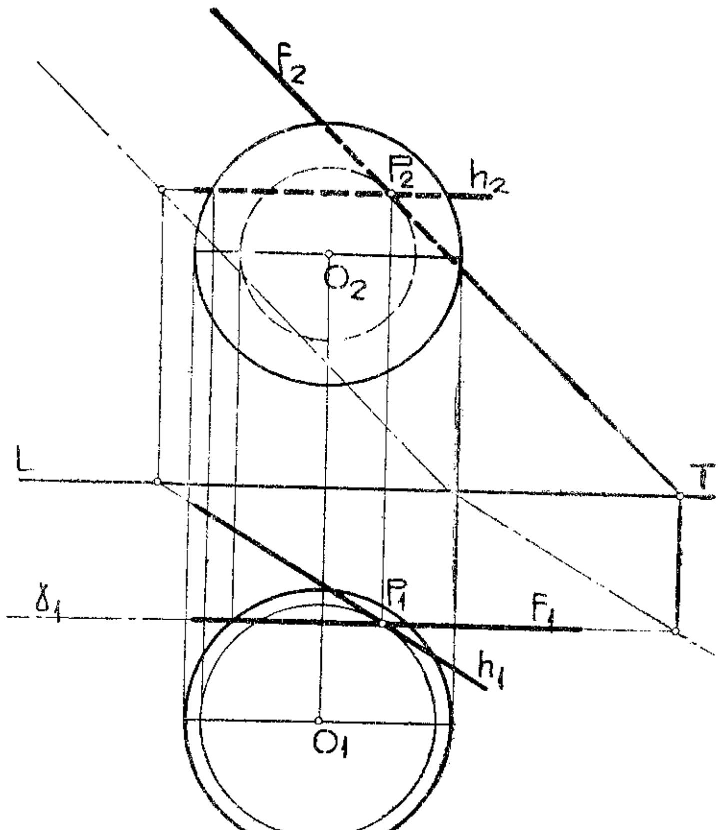


Fig. 378

$\overline{A_1B_1}$ tendremos entonces el eje mayor de la elipse según la cual se proyecta la sección sobre el plano π_1.

El eje menor estará sobre la perpendicular por O_1 al segmento A_1B_1. Para determinarlo hagamos el rebatimiento sobre π_1 del plano vertical β, que contiene el diámetro cuya proyección da el eje menor. Girando alrededor de β_1, la circunferencia determinada por β en la

superficie se ubica en la circunferencia de centro (O) y radio igual al de la superficie. Como el punto T_1, traza horizontal de la recta que contiene aquel diámetro, no se mueve, $T_1(O)$ será el rebatimiento de la recta y $\overline{(C)(D)}$ el rebatimiento del diámetro. Volviendo a la posición primitiva se obtienen en C_1 y D_1 los puntos que limitan el eje menor de la elipse. Esta puede ser trazada entonces.

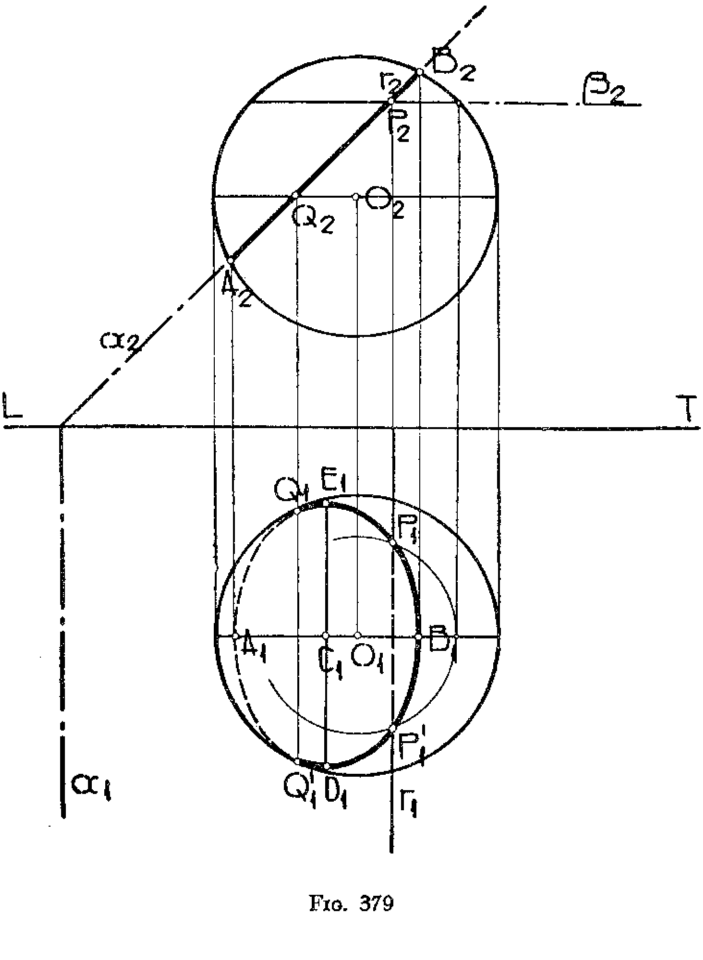


Fig. 379

En la proyección vertical se procede en forma análoga, notando que el diámetro $\overline{EF}$ de la sección, paralelo al plano vertical, da en [illegible] el eje mayor de la elipse. El otro eje se obtiene rebatiendo sobre un plano de canto y que contiene el diámetro cuya proyección vertical es el eje menor de la sección. Volviendo a la posición primitiva resulta

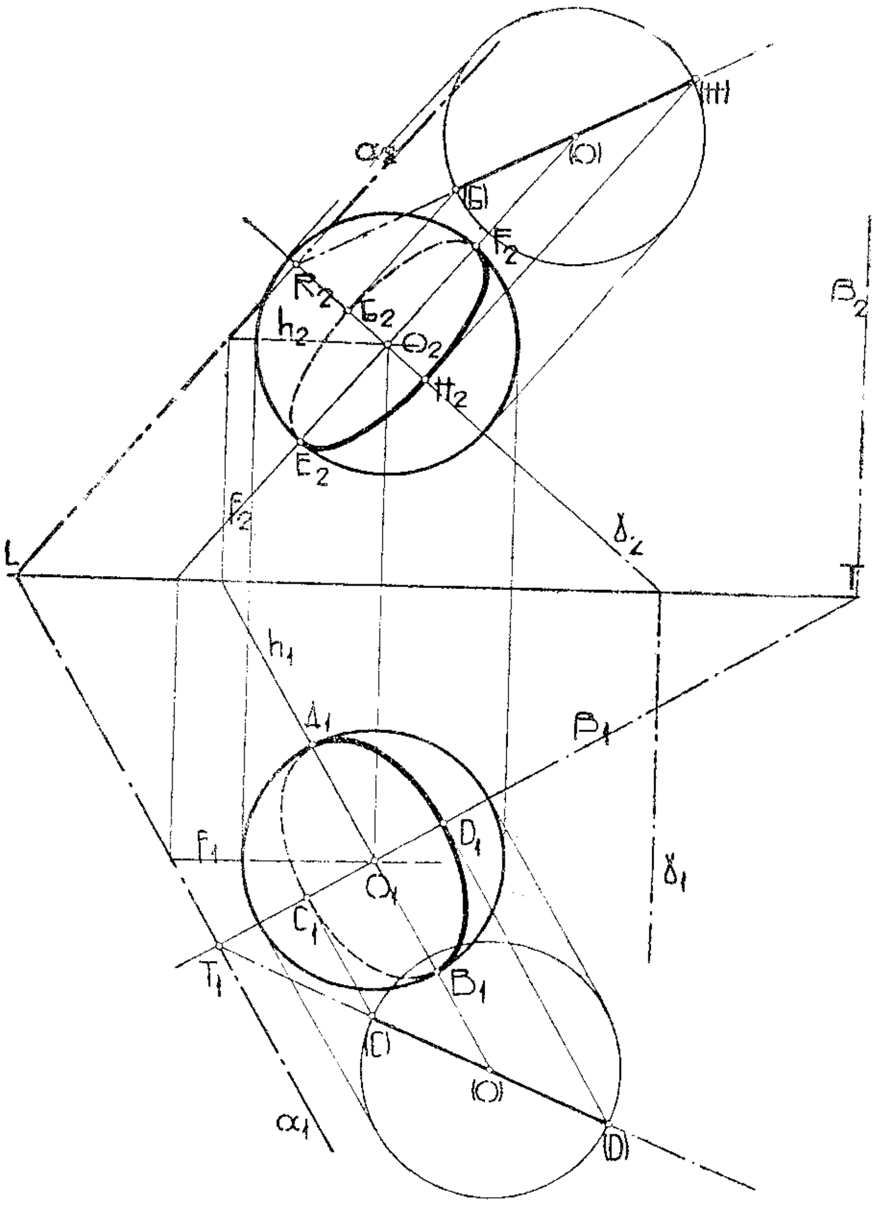

(H)
(O)
α_2
(G)
F_2
R_2
G_2
h_2
O_2
H_2
E_2
β_2
P_2
δ_2
L
T
h_1
A_1
β_1
D_1
P_1
O_1
δ_1
C_1
T_1
B_1
(C)
(O)
α_1
(D)

Fig. 380

en $\overline{G_2H_2}$ el referido eje. La proyección vertical de la sección puede así ser construída.

6. — Nos proponemos determinar ahora la sección producida en una superficie esférica por un plano cualquiera no diametral (fig. 381).

La sección es siempre una circunferencia, pero no máxima, como en el número anterior. Su centro O' no será el centro O de la superficie, de modo que lo primero que debe hacerse es ubicar las proyecciones de O', proyecciones que serán centros de las elipses según las cuales se proyecta la sección.

La *Geometría Elemental* enseña que la recta que une el centro de la superficie esférica con el centro de una sección producida mediante un plano secante es perpendicular al plano. Las normales r_1 y r_2 a las trazas α_1 y α_2 del plano secante son entonces las proyecciones de la recta OO', y el punto $O' \equiv (O'_1, O'_2)$ es la intersección de r con α. Por fácil y conocida se suprimió en la figura la construcción auxiliar de esa intersección.

Para determinar la elipse correspondiente al plano π_1 pensemos que de los infinitos diámetros de la sección hay uno, el horizontal, $\overline{AB}$, que se proyecta sobre π_1 en verdadera magnitud y que da, en consecuencia, el eje mayor de la elipse. La paralela por O'_1 a la traza α_1 nos da así la dirección del eje mayor.

Pensemos también que hay otro diámetro, $\overline{CD}$, de la sección, perpendicular al primero, es decir, situado sobre una recta re máxima pendiente del plano α, cuya proyección es perpendicular a la dirección del eje mayor. El nos dará entonces el eje menor de la elipse.

Conocidas las rectas sobre las cuales están ambos ejes, hallemos sus longitudes. Para esto consideremos el plano β que proyecta horizontalmente el diámetro CD de la sección, y hagamos su rebatimiento sobre π_1 girando alrededor de β_1. La circunferencia máxima producida por β en la superficie esférica se rebate en la circunferencia de centro (O) y radio igual al de la superficie. El centro O' de la sección se rebate en (O') y la recta CD se ubica en $R_1(O')$. El segmento $\overline{(C)(D)}$ es entonces el rebatimiento del diámetro $\overline{CD}$.

Volviendo a la posición primitiva queda determinado el eje menor $\overline{C_1D_1}$. Y como $\overline{(C)(D)}$ es la verdadera magnitud del diámetro de la sección, bastará tomar $\overline{A_1B_1} = \overline{(C)(D)}$ para individualizar el eje mayor.

La elipse ya puede ser trazada.

En forma análoga se procede para determinar la proyección vertical de la sección.

7. — Hallemos la intersección de una recta $r \equiv (r_1, r_2)$ con una superficie esférica de centro $O \equiv (O_1, O_2)$ (fig. 382).

Por la recta se hace pasar un plano auxiliar. Los puntos comunes a la sección producida y a la recta dada son los puntos buscados.

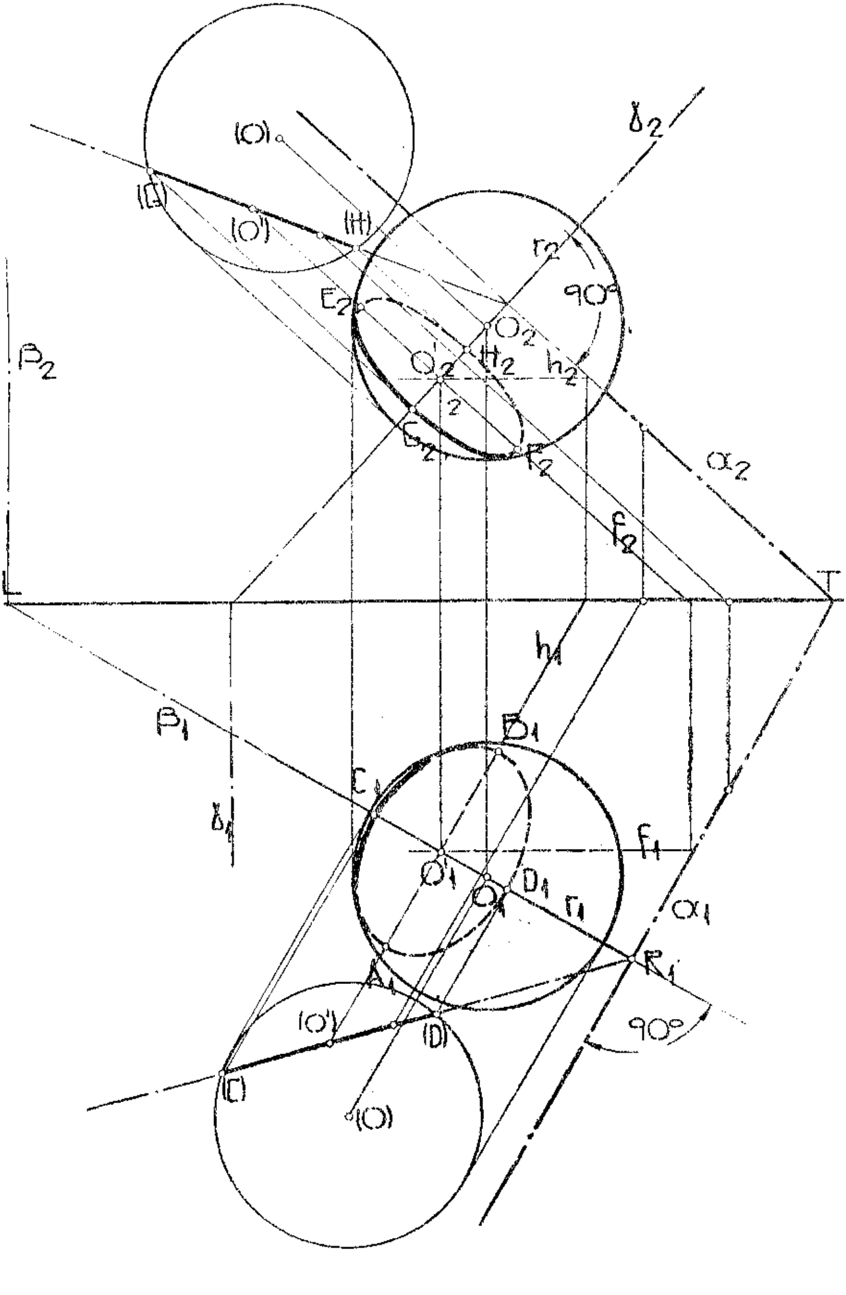

(O)
δ_2
(G)
(O')
(H)
r_2
90°
E_2
O_2
β_2
O'_2
H_2
h_2
G_2
F_2
α_2
f_2
L
T
h_1
β_1
B_1
C_1
δ_1
f_1
O'_1
O_1
D_1
r_1
α_1
R_1
A_1
(O')
(D)
90°
(C)
(O)

Fig. 381

Como plano auxiliar hemos utilizado el que proyecta horizontalmente la recta *r*.

Las perpendiculares por O_1 y O_2 a las trazas del plano auxiliar permiten localizar el centro $C \equiv (C_1, C_2)$ de la sección. La proyección horizontal de ésta es el segmento $\overline{A_1B_1}$, verdadera magnitud del diá-

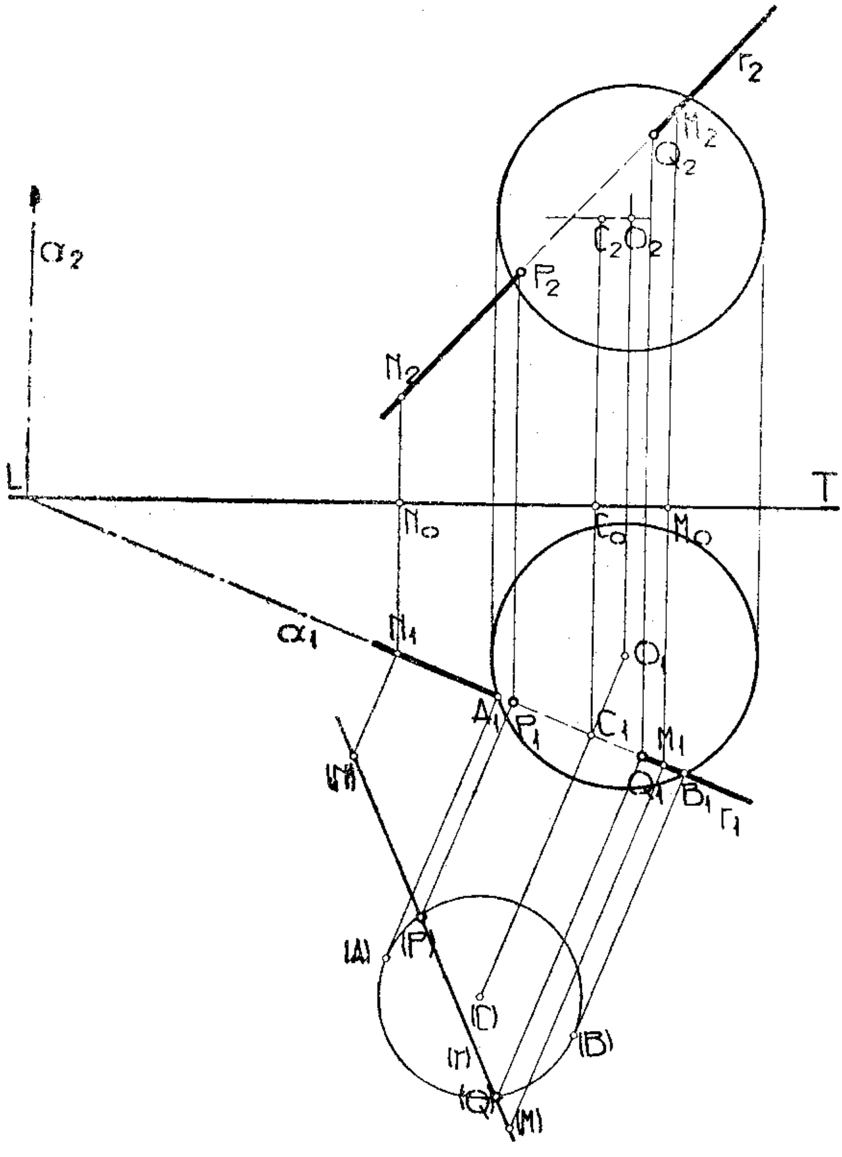


Fig. 382

metro correspondiente. Si entonces rebatimos sobre el plano π_1 tanto la sección como la recta, se obtienen los puntos comunes (P) y (Q). Al deshacer el rebatimiento los puntos (P_1, P_2) y (Q_1, Q_2) son los que se buscan.

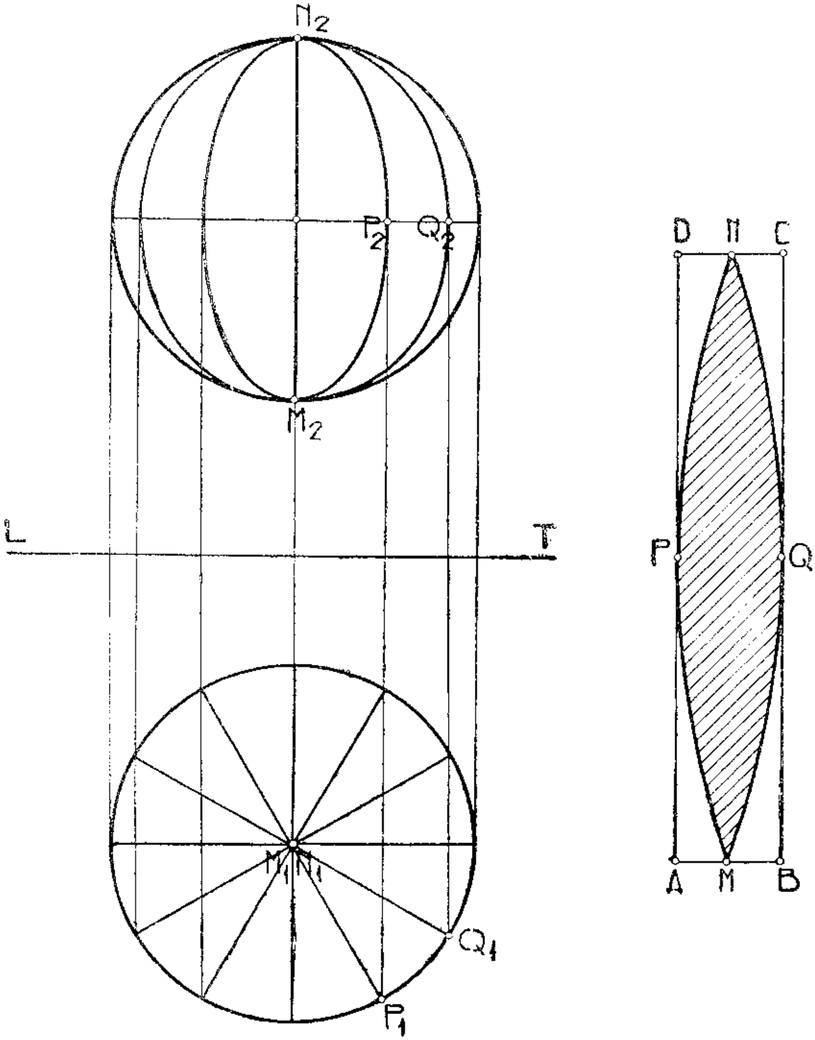
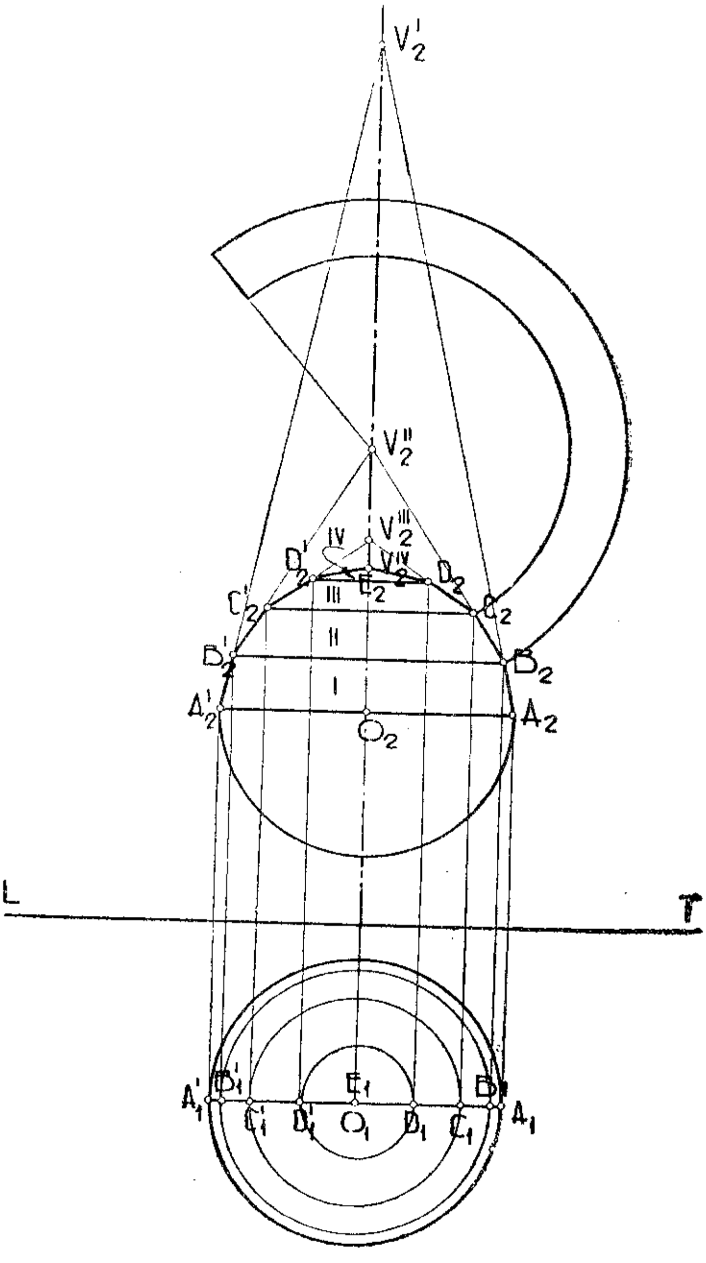


FIG. 383

Si se quiere, puede hallarse también la proyección vertical de la sección, operación que, como se ha visto, no resulta indispensable en este problema.



V'2
V''2
V'''2
IV
D'2
VIV2
E2
D2
C'2
III
C2
II
B'2
B2
I
A'2
A2
O2
L
T
B'1
E1
B1
A'1
C'1
D'1
O1
D1
C1
A1

FIG. 385

8. — La superficie esférica no es desarrollable. Estudiaremos entonces únicamente su desarrollo aproximado, de interés práctico en calderería sobre todo.

Dos son los métodos utilizados: desarrollo aproximado por *husos* y desarrolo aproximado por *zonas*.

En la figura 383 se tiene una superficie esférica dividida en doce partes iguales o husos por medio de meridianos, cuyas proyecciones horizontales son diámetros del contorno aparente y cuyas proyecciones verticales son elipses.

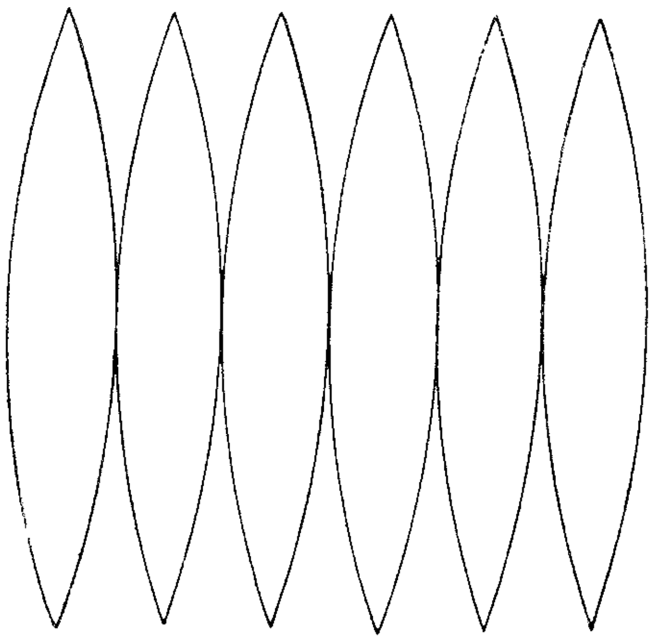


FIG. 384

La superficie de un huso no es desarrollable. Se trata entonces de reemplazarla por medio de una superficie plana suficientemente aproximada. Para esto se dibuja un rectángulo $ABCD$ cuyas dimensiones sean $\overline{AB} = \frac{1}{12}$ de la circunferencia máxima, o sea, $\overline{AB}$ = longitud del arco del huso tomado sobre el ecuador, y $\overline{AD} = \frac{1}{2}$ de la circunferencia máxima. Se marcan los puntos medios M y N de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ y P y Q de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$. Se hace pasar un arco de circunferencia por los puntos M, P y N, y otro por M, Q

y N, y entonces la superficie plana $MQNPM$ es el desarrollo aproximado de uno de los doce husos de la superficie.

La figura 384 da, mediante este método, el desarrollo aproximado de la mitad de la superficie de una esfera.

El segundo método es el desarrollo aproximado por zonas. En la figura 385 la superficie esférica ha sido dividida en zonas: I, II, III, IV, ..., mediante planos paralelos tales que $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2} = \overline{C_2D_2} = \ldots$ Reemplazados los arcos $\widehat{A_2B_2}$, $\widehat{B_2C_2}$, $\widehat{C_2D_2}$, ..., por

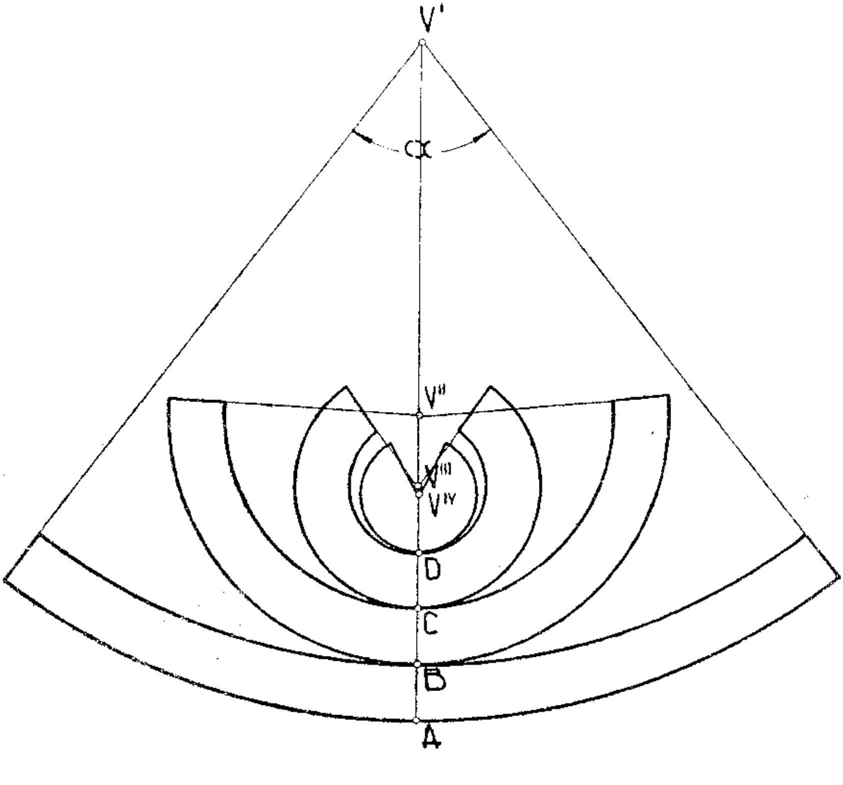


FIG. 386

las cuerdas respectivas, cada zona puede ser reemplazada, con cierta aproximación, por la superficie lateral de un tronco de cono. La zona II, por ejemplo, puede ser reemplazada por la superficie lateral del tronco de cono cuyo vértice es V_2^{II} y cuyas bases son los círculos determinados por los planos paralelos de trazas verticales $B_2'B_2$, $C_2'C_2$.

Esta zona II ha sido desarrollada, aproximadamente, al lado de

la proyección vertical de la superficie esférica utilizando como radio del sector circular el segmento $\overline{V_2^{II}B_2}$.

En la figura 386 se ha obtenido el desarrollo de las cuatro zonas de la mitad superior de la superficie esférica.

§ 84. APLICACIONES

1. — En la figura 387 se ha hecho la representación de una bóveda esférica.

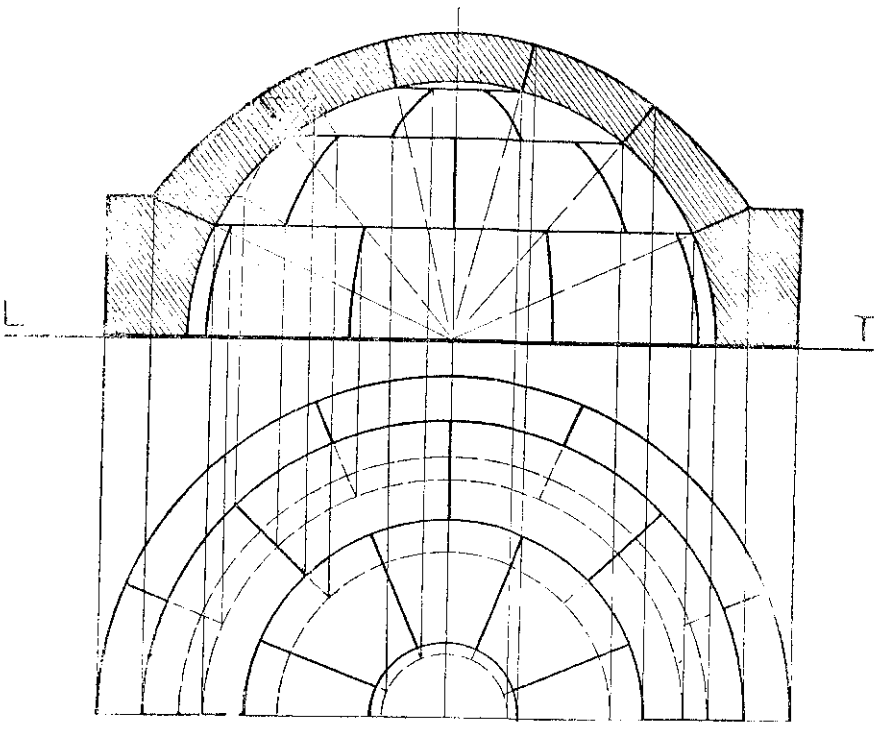


FIG. 387

El lector puede notar cómo las juntas de las distintas dovelas se proyectan sobre el plano vertical según segmentos de rectas o arcos de elipses.

En la figura 388 se reproduce la cúpula de Santa María de las Gracias, de Milán, que tiene bóveda mural interna esférica y techo cónico.

§ 85. TORO

1. — Cuando una circunferencia gira con su plano alrededor de una recta situada en su plano y que no corta la circunferencia hasta volver a la posición primitiva, se tiene una superficie de rotación llamada *toro.*

La figura 389 da la representación de un toro cuyo eje de rotación es vertical.

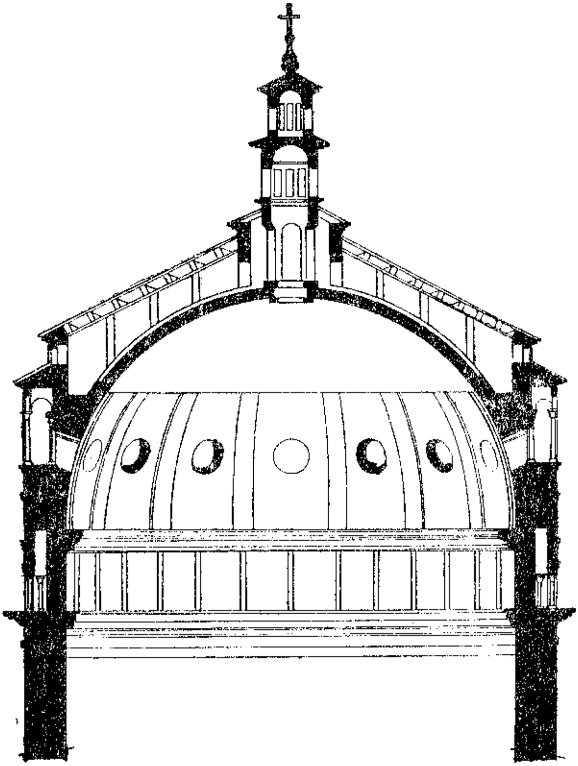


FIG. 388

El contorno aparente sobre el plano horizontal es dado por las proyecciones de sus paralelos máximo y mínimo. Sobre el plano vertical es una línea mixta única.

2. — Dada una de las proyecciones de un punto de la superficie, la vertical, por ejemplo, se determina la otra proyección empleando el método general dado para las superficies de rotación (fig. 389).

En la figura 390 el punto (A_1, A_2) es visible sobre el plano π_2 e invisible sobre el π_1; el (A_1', A_2) es invisible sobre ambos planos.

El punto (B_1, B_2) es visible sobre ambos planos; el (B_1', B_2) es visible en proyección horizontal e invisible en proyección vertical; lo mismo ocurre con los puntos (B_1'', B_2) y (B_1''', B_2).

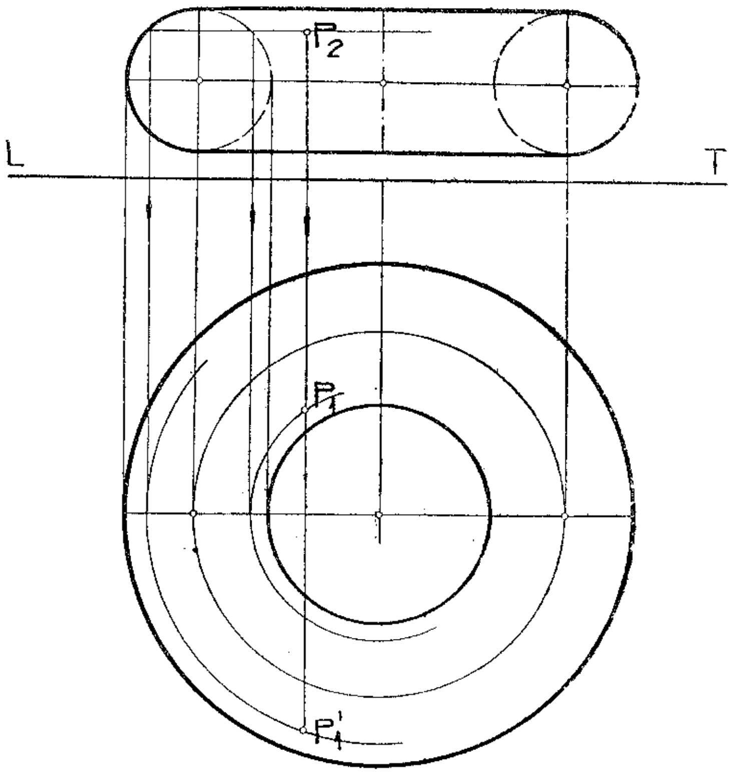


FIG. 389

3. — Hallemos la sección plana de un toro. Sea (α_1, α_2) el plano secante (fig. 391).

Se puede recurrir a planos auxiliares horizontales. El de traza β_2, por ejemplo, corta la superficie según dos paralelos: el de radio $\overline{O_1A_1}$ y el de radio $\overline{O_1B_1}$. Corta, además, el plano dado según la horizontal (h_1, h_2). Los puntos *1*, *2*, *3* y *4*, comunes a esta recta y a aquellos paralelos, son puntos de la sección buscada.

Y así para otros puntos.

Especial importancia tienen los puntos *5*, *6*, *7* y *8*, pertenecientes a los paralelos máximo y mínimo, pues ellos separan en la proyección horizontal la parte visible de la invisible; y tienen también

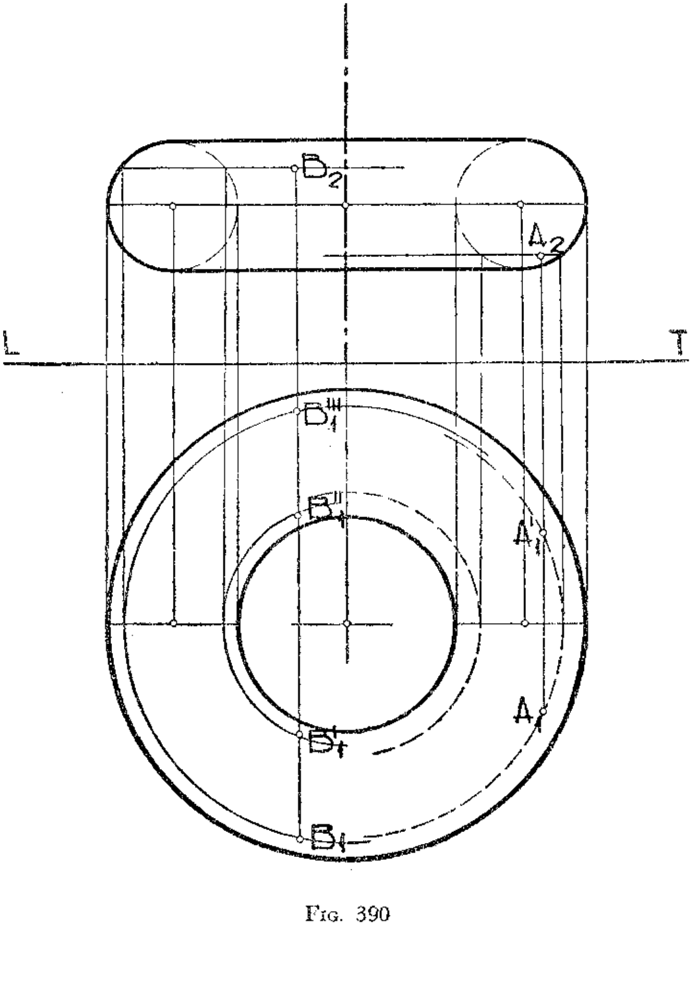


Fig. 390

importancia los puntos *9*, *10*, *11* y *12*, por ser los puntos más bajos y más altos de la sección.

La tangente a la sección por uno de sus puntos se determina siguiendo el método general como intersección del plano tangente a la superficie en ese punto y el plano secante.

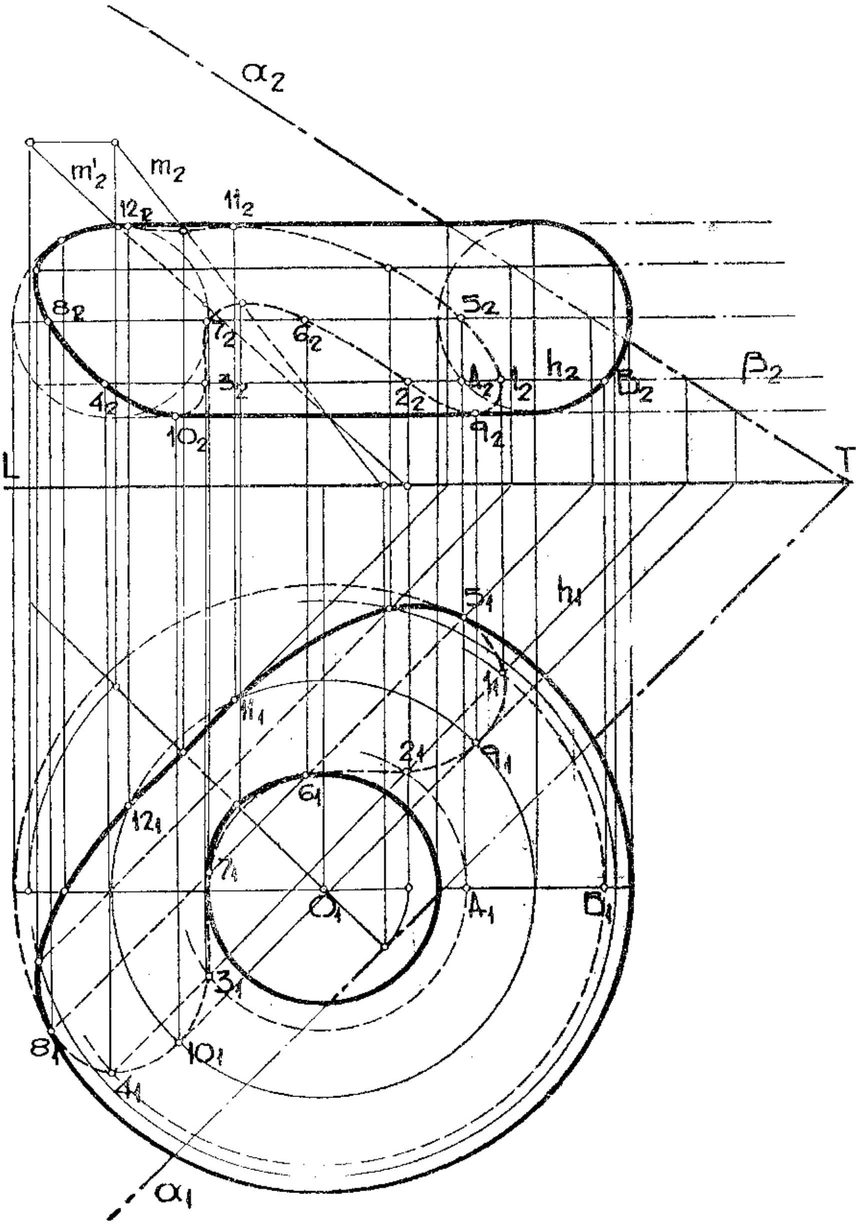

α2
m'2
m2
12 2
11 2
8 2
7 2
6 2
5 2
h2
4 2
3 2
2 2
A2
1 2
B2
β2
10 2
9 2
L
T
5 1
h1
1 1
11 1
2 1
9 1
6 1
12 1
7 1
O1
A1
B1
3 1
8 1
10 1
4 1
α1

Fig. 391

4. — La figura 392 da la sección de un toro mediante un plano paralelo al plano vertical y tangente en un punto de la circunferencia de garganta.

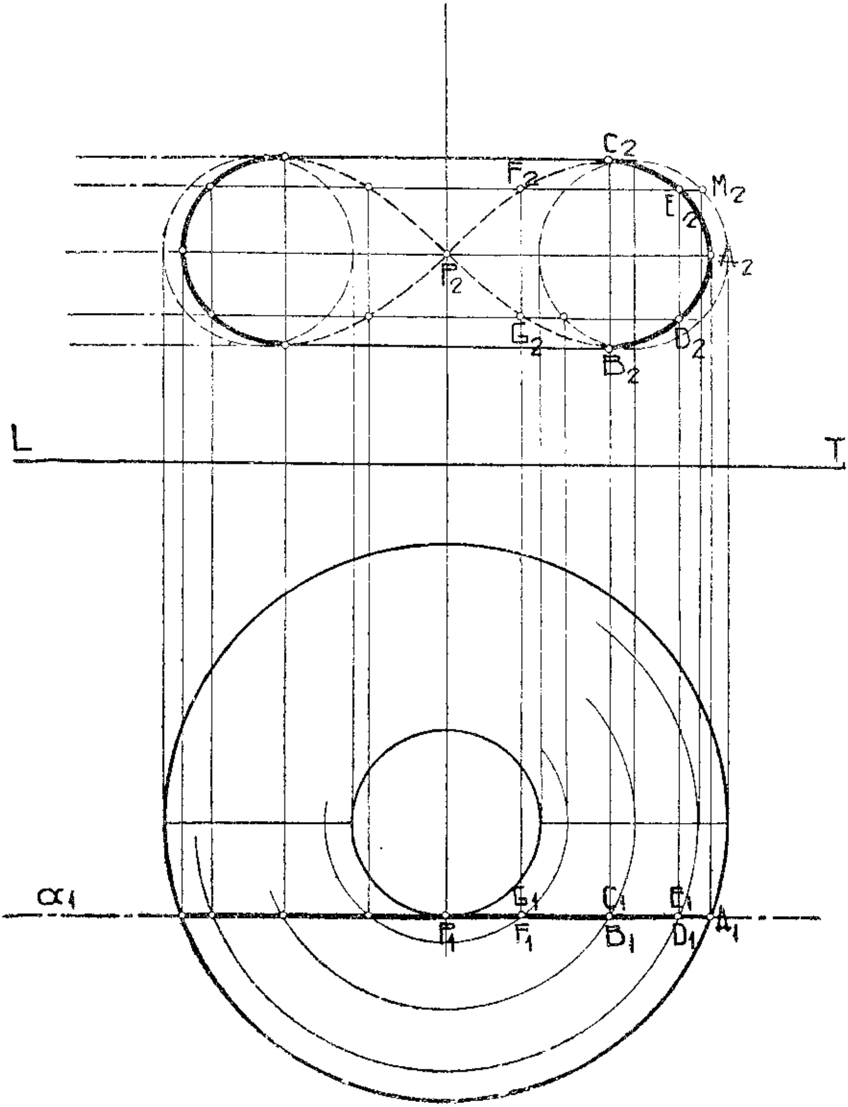


Fig. 392

Sea α el plano secante, tangente en P a la superficie. Determinemos algunos puntos de la sección. El ecuador proporciona el punto (A_1, A_2); los paralelos más bajo y más alto proporcionan los puntos

(B_1, B_2) y (C_1, C_2); los paralelos situados en el plano arbitrario que pasa por M_2, por ejemplo, determinan los puntos (D_1, D_2), (E_1, E_2), (F_1, F_2), (G_1, G_2), etc.

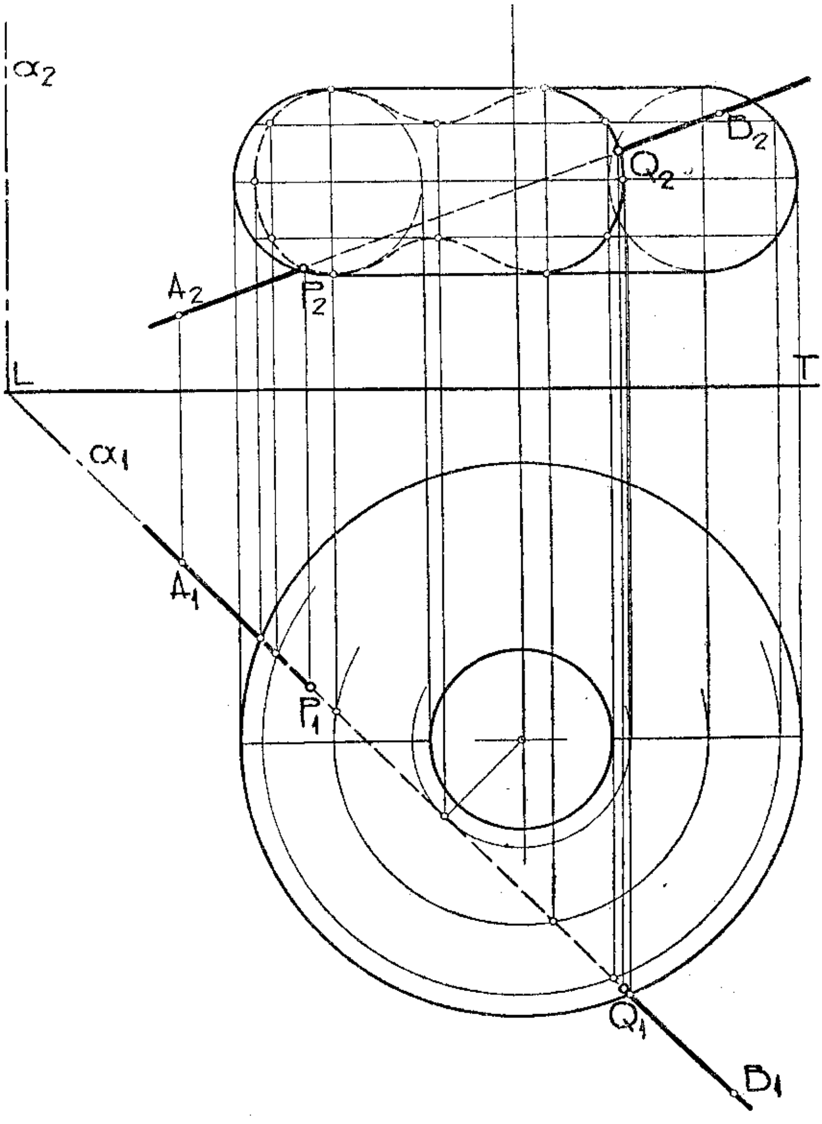


Fig. 393

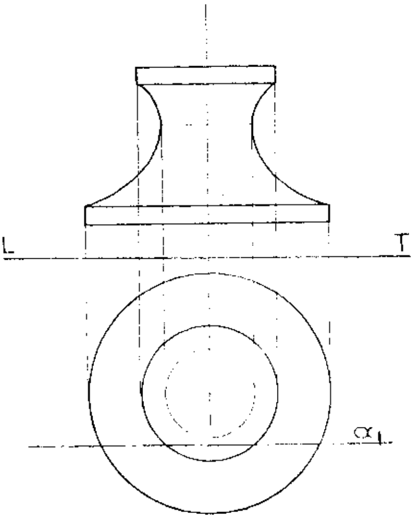
Unidos los puntos obtenidos se obtiene la curva de la sección. Tiene la forma de un ocho y se llama *lemniscata*.

5. — Para hallar la intersección de una recta AB con un toro se sigue el procedimiento general conocido (fig. 393).

Se hace pasar por la recta un plano, el que la proyecta horizontalmente, por ejemplo. Se halla la sección producida por este plano, y entonces los puntos P y Q, comunes a la recta dada y a la sección, son los puntos pedidos.

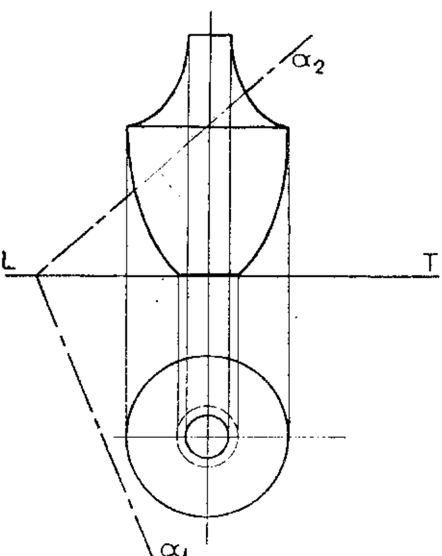
EJERCICIOS

105. Un sólido ha sido torneado en la forma que indica la figura. Hallar la sección producida por el plano α paralelo al vertical de proyección.



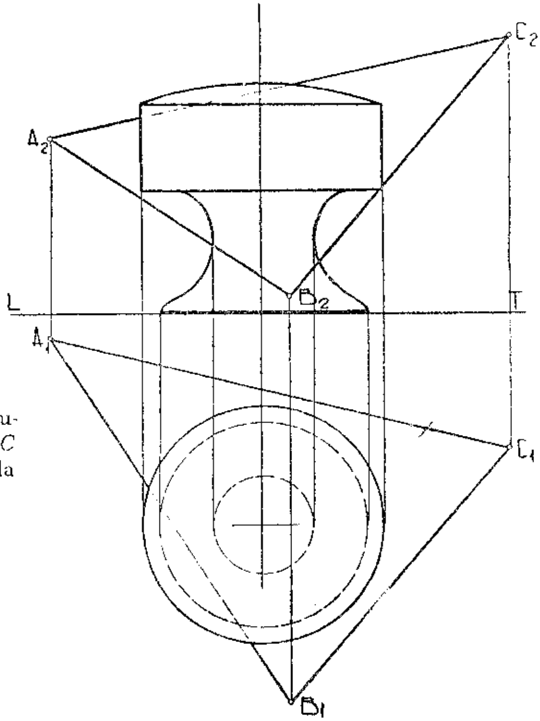
EJERCICIO 105

106. Hallar la sección producida por el plano α en la superficie que se indica en la figura.



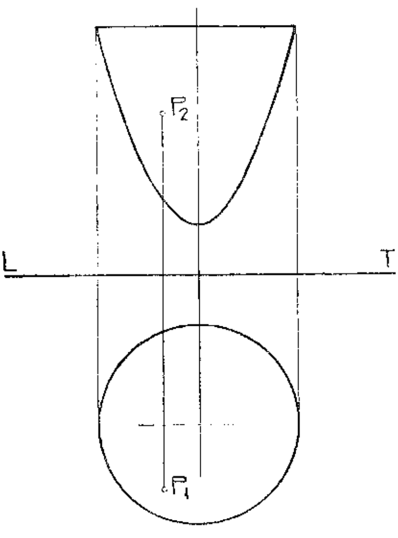
EJERCICIO 106

107. Hallar la sección producida por el plano ABC en la superficie indicada en la figura.

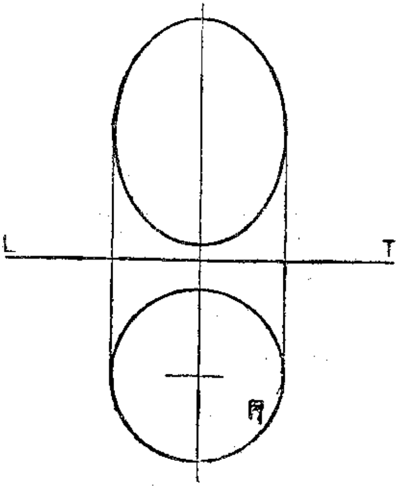


EJERCICIO 107

108. La figura que sigue es la representación de la superficie de un paraboloide, obtenida, como se sabe, por la rotación de una parábola alrededor de su eje. Hallar el plano tangente en el punto $P \equiv (P_1, P_2)$.



EJERCICIO 108

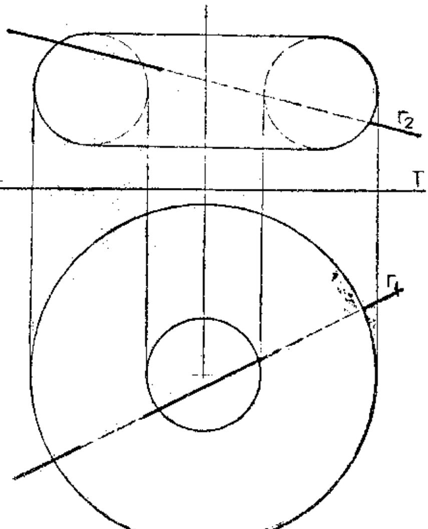


EJERCICIO 109

109. Construir el plano tangente a la superficie de revolución dada en la figura, conocida la proyección horizontal P_1 del punto de tangencia. El punto P pertenece a la superficie.

110. Representar una esfera de radio igual a 4 cm y que sea tangente a los dos planos de proyección.

111. Representar una esfera de radio igual a 5 cm que sea cortada por el plano π_2 según un círculo dado.



EJERCICIO 115

112. Representar una esfera cuyo centro [illegible] dado α según un círculo dado. Constrúyase por O un plano β perpendicular al α, hállese la intersección de los dos planos, rebátase sobre π_1, etc.

113. Construir la línea geodética para dos puntos A y B de una superficie esférica de centro dado O y radio r. Hágase paralelo a π_1 el plano ABO, dibújese la circunferencia máxima por A y B, centro O. Vuélvase a la posición primitiva (*).

114. Construir el plano tangente, a una superficie esférica por uno de sus puntos P, conociendo P_2.

115. Hallar la intersección del toro con la recta indicada en la figura.

(*) El arco AB de circunferencia máxima de una superficie esférica de la distancia mínima, sobre esa superficie, entre los puntos A y B. Por esta propiedad el arco AB llámase *línea geodésica*, o *geodética*, de la superficie esférica, entre sus puntos A y B. En general, llámanse *líneas geodésicas* de una superficie aquellas líneas trazadas sobre esta superficie tales que todo arco convenientemente limitado de ellas mide la mínima distancia entre sus extremos. En el caso de superficies desarrollables las líneas geodésicas tienen transformadoras rectilíneas.

CAPÍTULO XIX

SUPERFICIES HELICOIDALES

§ 86. HELICE CILINDRICA

1. — Si suponemos una sección recta Ω de una superficie cilíndrica e imaginamos que un punto móvil P, partiendo de la posición inicial P_o sobre Ω se mueve sin salir de la superficie, de modo que a cada instante permanezca constante la relación k entre el segmento

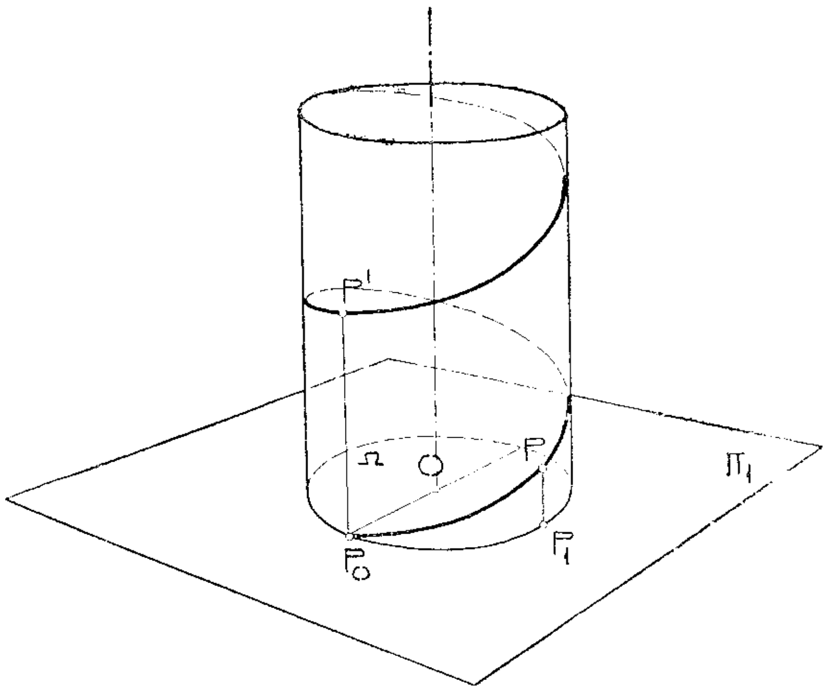


FIG. 394

$\overline{P_1P}$ (distancia del punto a la sección recta) (fig. 394) y el arco correspondiente $\widehat{P_oP_1}$, es decir que

$$\frac{\overline{P_1P}}{\widehat{P_oP_1}} = k$$

el lugar geométrico de las distintas posiciones de P constituye una curva alabeada que se llama *hélice cilíndrica.*

El segmento $\overline{P_1P}$ es la ordenada del punto P con respecto al plano de la sección. El arco $\widehat{P_0P_1}$ es su *abscisa curvilínea.* El eje de la superficie es el *eje de la hélice.*

Continuando el punto P su movimiento, ocupará en cierto instante la posición P' sobre la generatriz de la superficie, que pasa por P_0.

La distancia $\overline{P_0P'} = p$ es el paso de la hélice, y la porción de esta curva comprendida entre P_0 y P' constituye una *espira* de la hélice.

Si l es la longitud de la sección recta de la superficie, se tiene, evidentemente,

$$\frac{\overline{P_0P'}}{l} = k,$$

es decir,

$$p = kl.$$

Como caso particular, si la superficie cilíndrica es de rotación, la hélice es llamada *cilíndrica circular,* y entonces

$$p = 2\pi rk.$$

En este caso suele definirse la hélice como el lugar geométrico de las distintas posiciones de un punto P que recorre con movimiento uniforme una circunferencia, mientras ésta se desplaza, también con movimiento uniforme, manteniendo su plano perpendicular a la recta lugar de las distintas posiciones de su centro.

2. — Se sabe que en un plano el lugar de puntos tales como $P, P', P'', \ldots$ (fig. 395), cuyas distancias a una recta fija x mantienen

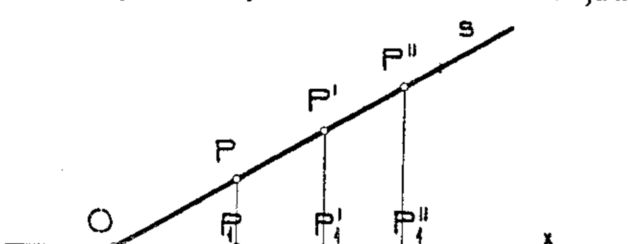


FIG. 395

una relación constante con la distancia de los respectivos pies a un punto fijo O de la recta, es otra recta s. Se comprende entonces que la transformada de una hélice cilíndrica es también una recta, y la hélice es, en consecuencia, la línea de menor longitud, o sea, la *línea geodésica,* entre dos puntos de una superficie cilíndrica no situados sobre la misma generatriz.

3. — De cuanto precede resulta el procedimiento para construir con facilidad la representación de una hélice, dibujando primero sobre

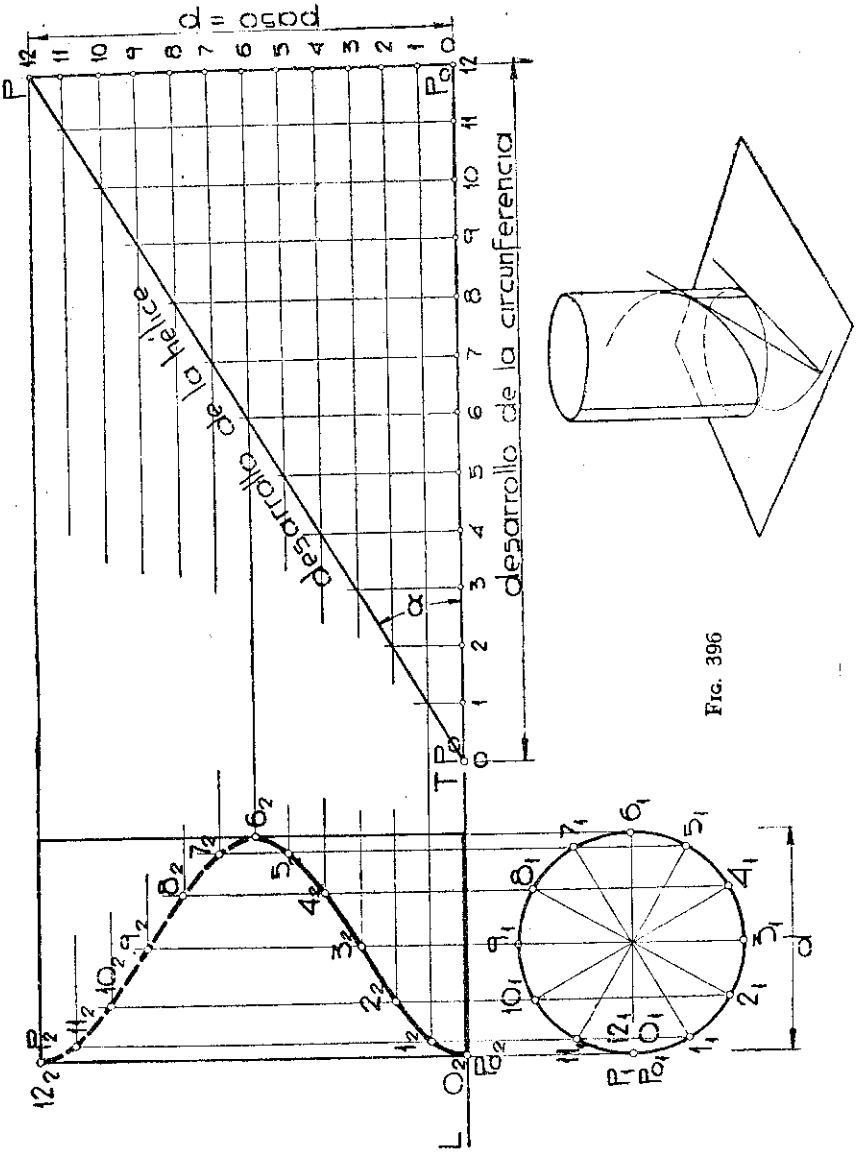

paso = p
desarrollo de la hélice
desarrollo de la circunferencia
d

FIG. 396

el plano del desarrollo una recta s y pasando luego a la superficie cilíndrica primitiva. Supongamos que ésta sea de rotación y perpendicular a π_1 (fig. 396).

La proyección horizontal de la hélice coincide, naturalmente, con el contorno aparente horizontal de la superficie cilíndrica, es decir, con la circunferencia de la base. Para hallar la proyección vertical se ha trazado a la derecha de la figura el desarrollo de la circunferencia de la base, el paso y el desarrollo de la hélice.

Considerado el punto P_o como origen de las espiras se ha dividido la circunferencia, su desarrollo, así como el paso, en cierto número de partes iguales, doce en nuestro caso. Entonces, basta llevar sobre las proyecciones verticales de las distintas generatrices, a partir del plano de la sección recta al cual pertenece P_o, a partir de LT en nuestro caso, segmentos iguales a los comprendidos entre la transformada de la circunferencia de la base inferior y los puntos en que la transformada de la hélice encuentra las respectivas generatrices del desarrollo. Resulta así, como segunda proyección de la hélice, una *sinusoide*.

4. — Hemos visto que, cualquiera sea el punto P de la hélice considerada, verifícase que

$$\frac{\overline{P_1P}}{\widehat{P_oP_1}} = \text{constante} = k.$$

Si $\overline{P_1P}$ se vuelve igual al paso, el arco se vuelve igual a la circunferencia de la base, y entonces verifícase también

$$\frac{p}{\text{circunf.}} = k.$$

Pero el triángulo rectángulo dibujado a la derecha de la figura 396 hace ver que

$$\frac{p}{\text{circunf.}} = \operatorname{tg}\alpha;$$

luego,

$$k = \operatorname{tg}\alpha.$$

Este ángulo α recibe el nombre de *ángulo de pendiente* de la hélice.

Supongamos ahora (fig. 397) dos puntos, M y N, de la hélice, y hagamos pasar por sus correspondientes generatrices el plano secante ω.

Por definición de hélice verifícase

$$\frac{\overline{M_1M}}{\widehat{P_oM_1}} = \frac{\overline{N_1N}}{\widehat{P_oN_1}}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{\overline{N_1N}}{\overline{M_1M}} = \frac{\widehat{P_oN_1}}{\widehat{P_oM_1}}. \qquad [1]$$

Por otra parte, los triángulos semejantes M_oM_1M y M_oN_1N dan

$$\frac{\overline{M_oN_1}}{\overline{M_oM_1}} = \frac{\overline{N_1N}}{\overline{M_1M}}. \qquad [2]$$

Comparando [1] y [2] se obtiene

$$\frac{\overline{M_oN_1}}{\overline{M_oM_1}} = \frac{\widehat{P_oN_1}}{\widehat{P_oM_1}},$$

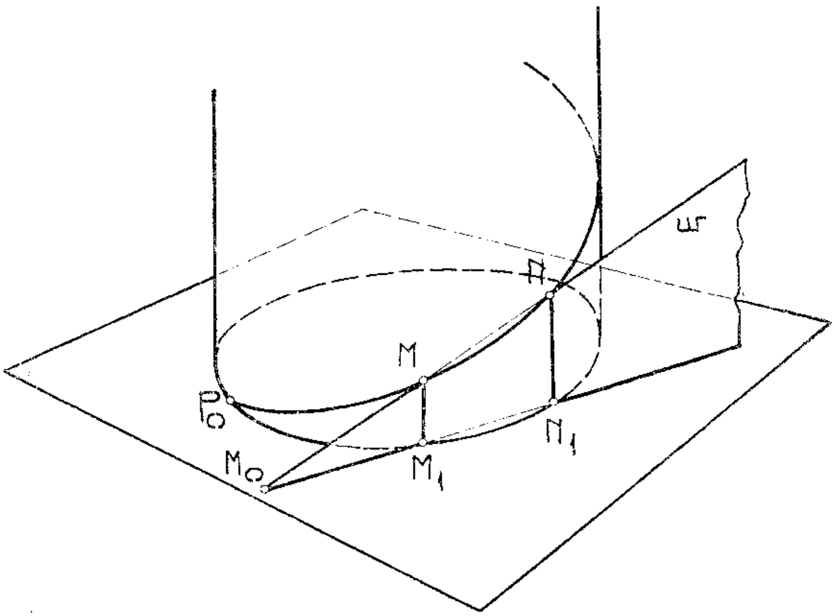


Fig. 397

de donde, por conocida propiedad de las proporciones.

$$\frac{\overline{M_1N_1}}{\overline{M_oM_1}} = \frac{\widehat{M_1N_1}}{\widehat{P_oM_1}}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{\widehat{P_oM_1}}{\overline{M_oM_1}} = \frac{\widehat{M_1N_1}}{\overline{M_1N_1}}.$$

Si el punto N se acerca indefinidamente a M, la secante MN tiende a ser la tangente en M a la hélice y el cociente $\frac{\widehat{M_1N_1}}{\overline{M_1N_1}}$ tiende a la unidad.

También tenderá a la unidad, entonces, el cociente $\frac{\widehat{P_oM_1}}{\overline{M_oM_1}}$.

En el límite se tiene, en consecuencia, la tangente t en M (figura 398) y

$$\widehat{P_oM_1} = \overline{M_oM_1}.$$

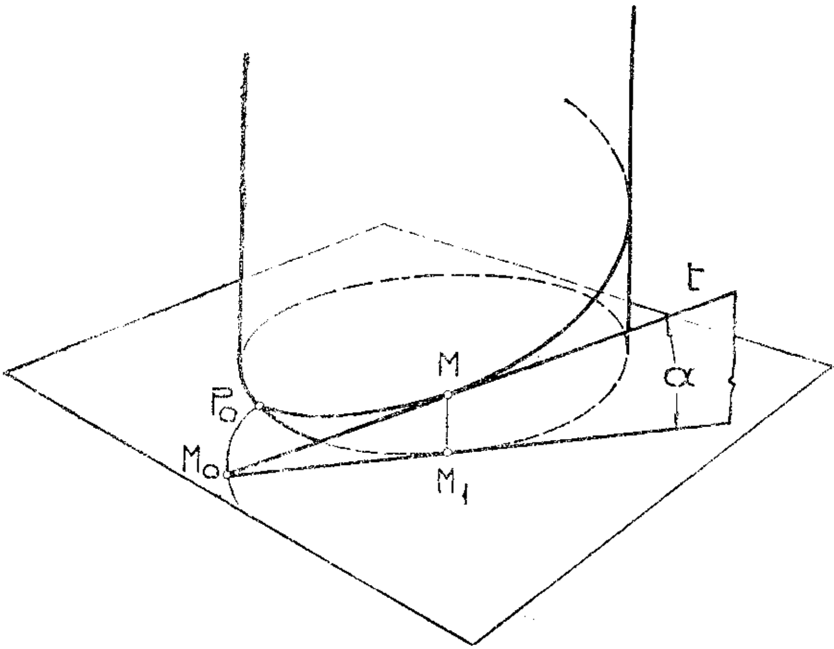


FIG. 398

Resulta así:

1º Que la tangente a la curva en uno cualquiera, M, de sus puntos, forma con el plano de la base un ángulo cuya tangente trigonométrica es igual a la del ángulo de pendiente de la hélice.

En efecto:

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{M_oM_1}} = \frac{\overline{M_1M}}{\widehat{P_oM_1}} = k = \operatorname{tg} \alpha.$$

2º Que la proyección sobre el plano de la base de la porción de tangente comprendida entre el punto de contacto y el punto en que la tangente encuentra el plano de la base es igual a la abscisa curvi-

línea del punto. Esta proyección recibe el nombre de *subtangente* de la curva en el punto considerado.

5. — Se tiene, entonces, que las trazas sobre el plano de la base de la superficie cilíndrica de las tangentes a la hélice, conducidas por puntos A, B, C, D, ..., de la misma, son puntos A_1, H_1, H_1' y H_1'' de la evolvente de la circunferencia de la base (fig. 399).

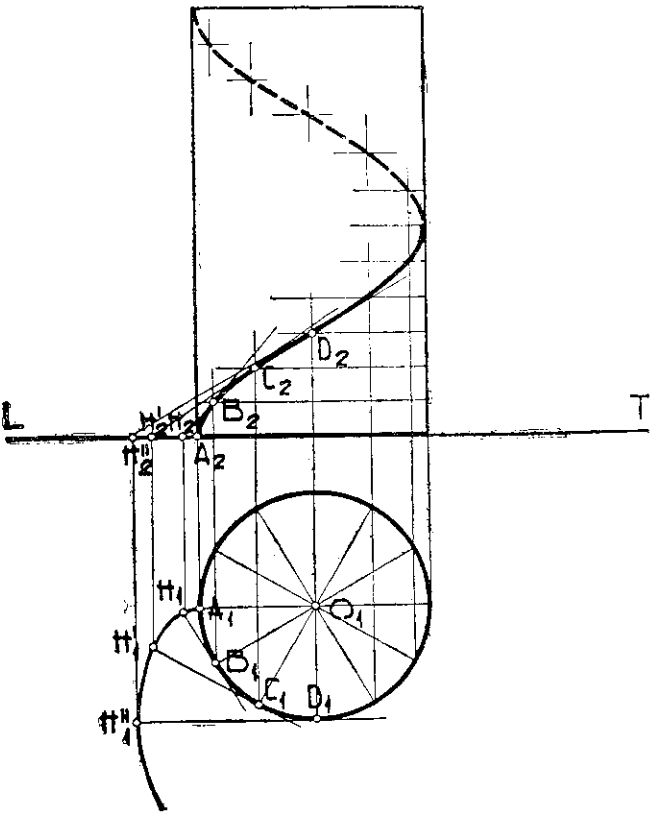


FIG. 399

6. — Se tiene, también, que la verdadera magnitud de una porción de tangente, CH', por ejemplo, comprendida entre el punto C de tangencia y la traza H' sobre el plano de la base, es la verdadera longitud de la parte ABC de hélice correspondiente.

7. — Construyamos ahora la tangente a la hélice por uno de sus puntos P (fig. 400).

Se sabe que la tangente a la proyección de una curva es la proyección de la tangente a la curva. Entonces, la tangente por P_1 a la circunferencia de centro O_1 es la proyección horizontal t_1 de la tangente buscada. La traza horizontal de la tangente t se individualiza fácilmente recordando las conclusiones del punto 4 de este parágrafo; es decir, basta tomar sobre t_1 el segmento P_1H_1 = arco A_1P_1 rectificado. Una línea de referencia por H_1 determina H_2; se une después H_2 con P_2. Quedan así halladas las proyecciones t_1 y t_2 de la tangente buscada.

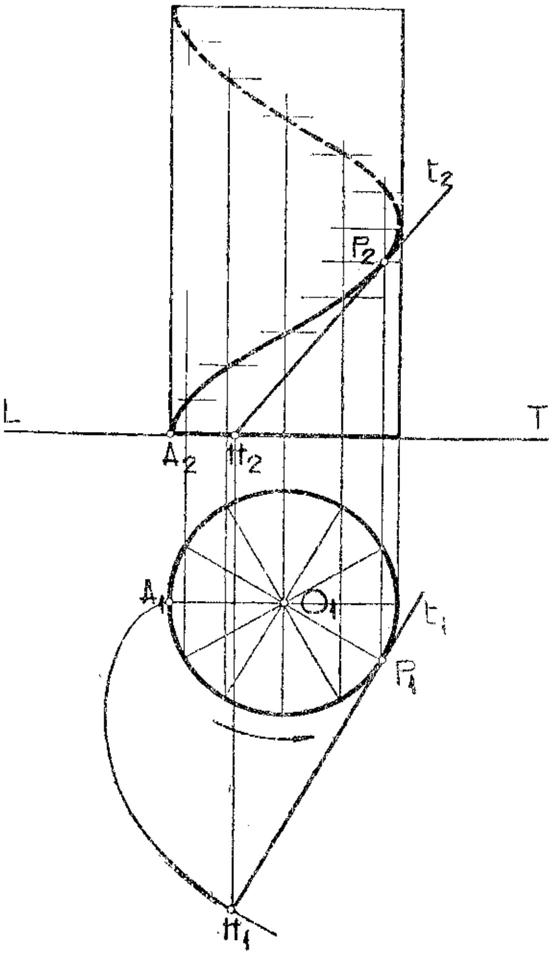


Fig. 400

§ 87. SUPERFICIES HELICOIDALES

1. — Se da el nombre de superficie helicoidal, o simplemente helicoide, a la superficie engendrada por hélices de eje común e igual paso, descriptas por los diferentes puntos de una línea dada.

Suele ser definida también como engendrada por la composición de un movimiento uniforme alrededor de un eje, con un movimiento de traslación paralelo al eje, efectuado por los distintos puntos de una línea dada.

Toda superficie cilíndrica de rotación cuyo eje coincide con el eje de una superficie helicoidal determina sobre ésta una hélice de paso igual al de las infinitas hélices que contiene el helicoide.

En general, los helicoides son superficies alabeadas no desarrollables.

2. — La línea móvil que engendra el helicoide puede ser una recta. Dícese entonces que aquél es un helicoide reglado.

Si la recta generatriz se apoya en el eje, este eje será una directriz rectilínea de la superficie reglada y se tendrá un helicoide a *directriz rectilínea* o *cerrado*, que podrá ser *recto* u *oblicuo* según que la generatriz forme o no un ángulo recto con el eje.

Si la generatriz es alabeada con respecto al eje, se obtendrá un helicoide abierto, que también puede ser *recto* u *oblicuo*.

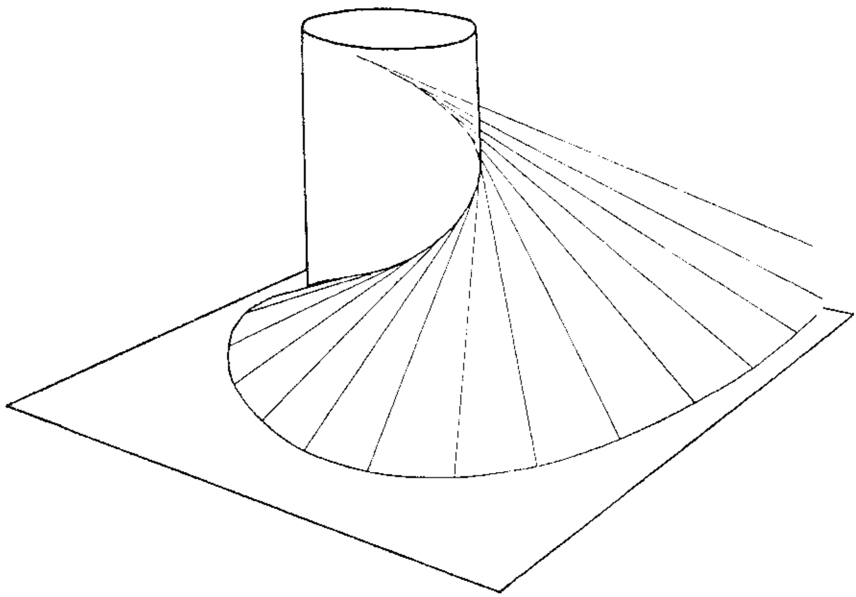


Fig. 401

En un helicoide abierto habrá una hélice de radio mínimo igual a la mínima distancia entre la generatriz y el eje: es la *hélice de garganta*.

Si el helicoide es cerrado, la hélice de garganta se reduce al eje.

3. — Como caso particular, un helicoide reglado puede ser desarrollable. Ocurre esto cuando es la superficie lugar de las tangentes a una hélice circular (fig. 401). Su representación se reduce entonces

a conducir por un número suficiente de puntos de la hélice las correspondientes tangentes. Las trazas de estas tangentes determinan sobre cada plano de proyección la traza de la superficie helicoidal.

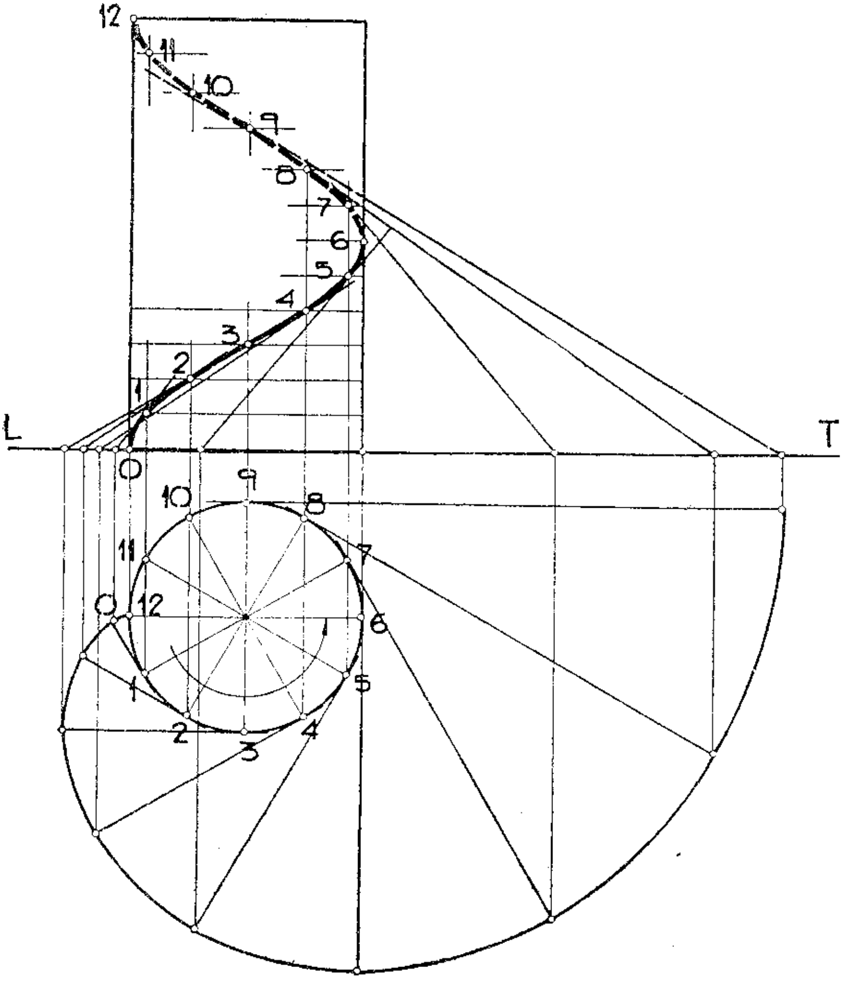


FIG. 402

Es lo que se ha hecho en la figura 402 para la traza horizontal.

4. — Como el helicoide al cual nos referimos es desarrollable, el plano tangente en uno de sus puntos lo es a lo largo de la generatriz que pasa por el punto y contiene, además, la tangente a otra curva

de la superficie en el punto común a esta curva y a la generatriz de contacto (fig. 403).

Siendo, en general, conocida la traza horizontal de la superficie, el plano tangente queda individualizado mediante la generatriz *g* que pasa por el punto dado *P* y la tangente *t* a la traza horizontal de la superficie en el punto *Q*, común a *g* y a esa traza horizontal.

La figura 404 da la correspondiente representación.

5. — El helicoide desarrollable tiene la propiedad de poder deslizarse sobre sí mismo, sin estiramientos ni roturas, mediante un movimiento helicoidal continuo que va desarrollando la superficie hasta transformarla en un plano. Durante este movimiento la hélice direc-

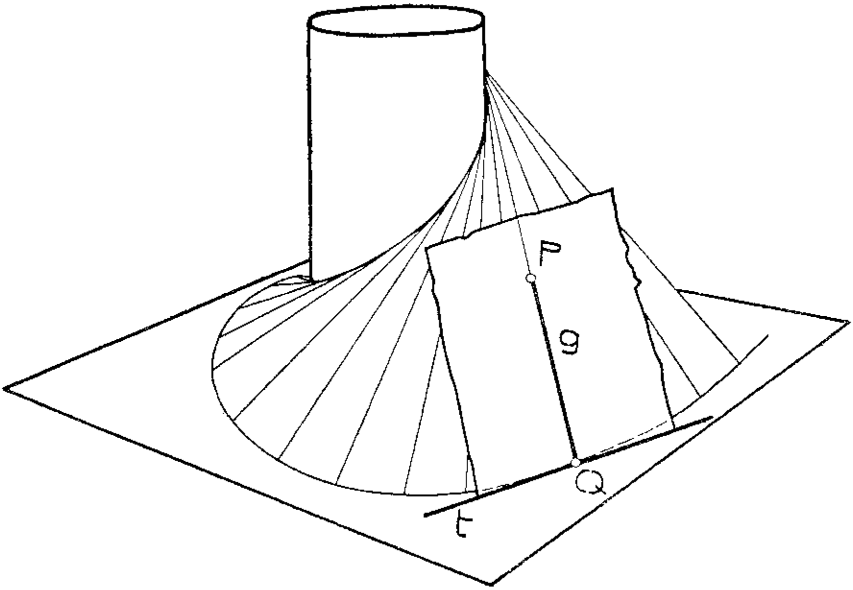


Fig. 403

triz no cambia de curvatura ni de longitud. Solamente cambia de forma, pasando de curva alabeada a curva plana y siendo su transformada un arco de circunferencia. En cuanto a las distintas generatrices, continúan durante ese movimiento de desarrollo siendo tangentes a la hélice directriz y tangentes a aquel arco de circunferencia una vez concluído el desarrollo.

Para el trazado del desarrollo debe determinarse en primer tér-

mino el radio del arco que ha de ser la transformada de la hélice. Ese radio, de acuerdo con lo expresado más arriba, será igual al radio de curvatura ϱ de la hélice.

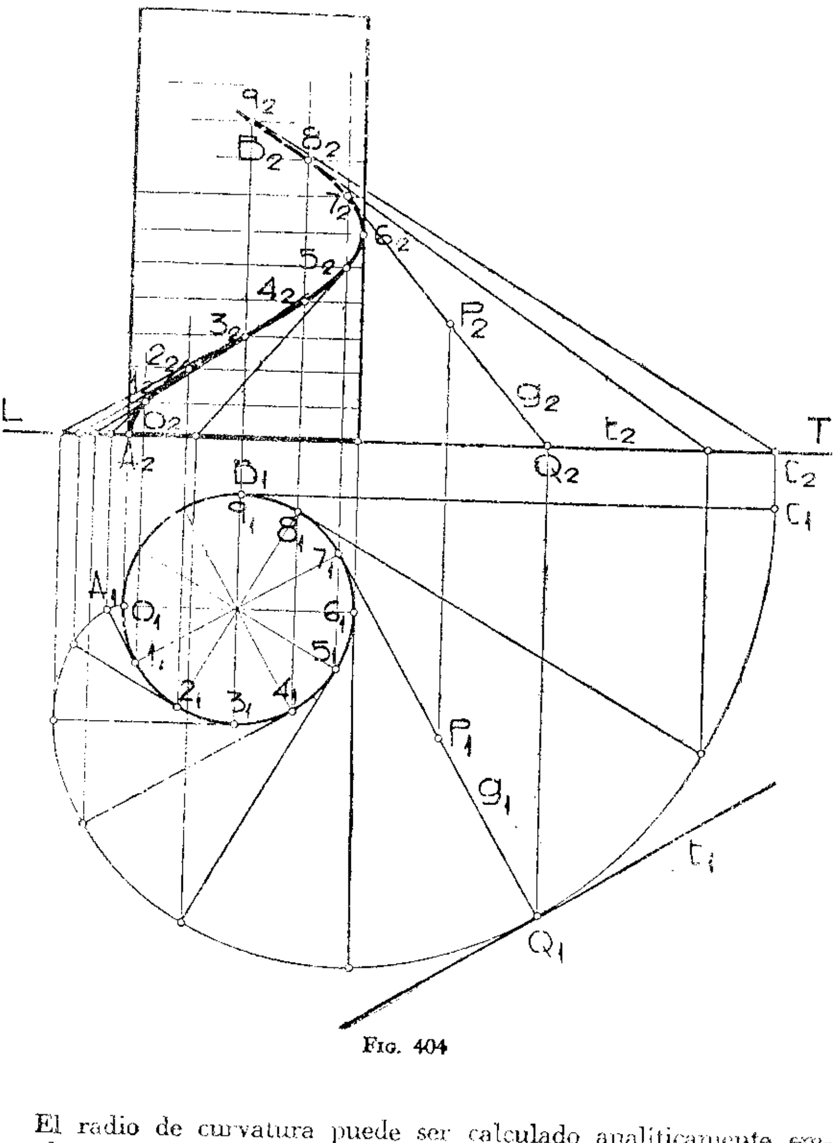


FIG. 404

El radio de curvatura puede ser calculado analíticamente empleando la conocida fórmula

$$\varrho = \frac{r}{\cos^2 \alpha},$$

siendo r el radio de la base de la superficie cilíndrica y α el ángulo que la tangente a la hélice forma con el plano π_1 (ángulo de pendiente).

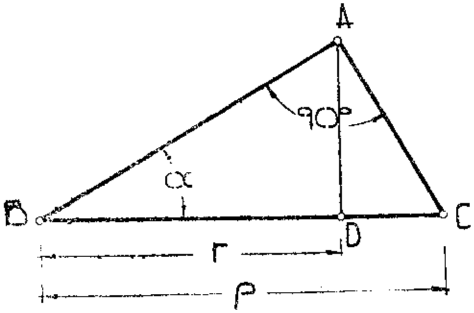


FIG. 405

Puede calcularse también gráficamente en la forma que indica la figura 405.

Obtenido ϱ se dibuja una circunferencia de centro O y radio ϱ y se determina sobre ella un arco de longitud igual a la hélice correspondiente a la porción de helicoide que se quiere desarrollar.

En la figura 406 se ha desarrollado el helicoide representado en la figura 404.

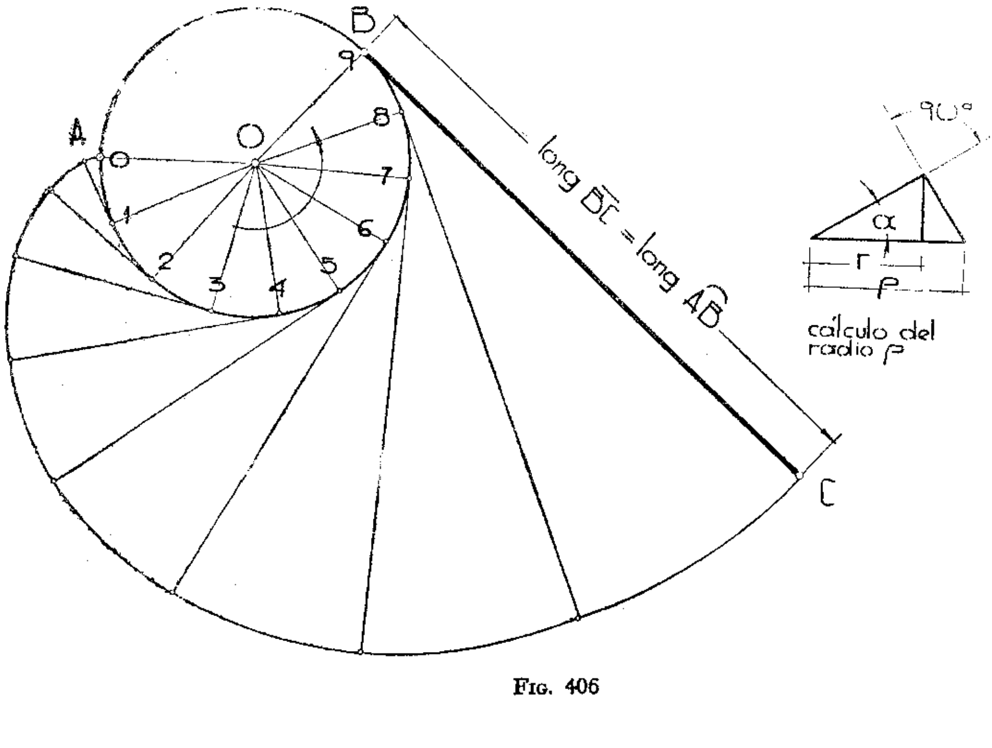


FIG. 406

La longitud del arco $\widehat{AB}$ es igual a la longitud de la parte de hélice directriz correspondiente. Esta longitud aparece en tamaño real en el segmento $\overline{B_2C_2}$ de la figura 404.

Dividido el arco en nueve partes iguales, debe trazarse la tangente por cada punto de división.

Se puede trazar primero la tangente $\overline{BC}$ en el punto B del arco. Su longitud es dada por $\overline{B_2C_2}$, que es también la longitud de la parte de hélice correspondiente y también, según acabamos de establecer, la longitud del arco $\widehat{AB}$.

Dividido entonces $\widehat{AB}$ en nueve partes iguales se trazan, a partir de 1, las otras tangentes, llevando sobre cada una de ellas longitudes iguales a $\frac{1}{9}\overline{BC}$, $\frac{2}{9}\overline{BC}$, etc.

Los extremos obtenidos permiten dibujar el desarrollo del helicoide dado.

6. — Entre los helicoides reglados hay uno particularmente importante por su aplicación en la construcción de filetes triangulares. Es el llamado *helicoide oblicuo.*

Su superficie es engendrada por una recta generatriz que se mueve apoyándose constantemente en una hélice cilíndrica circular y en el eje de esta misma hélice, formando, además, un ángulo invariable, no recto, con el eje mencionado.

Se comprende entonces que cada punto de la recta generatriz describe otra hélice de paso igual a la dada sobre otra superficie cilíndrica coaxial con la dada.

Para obtener la representación de este helicoide se representa primero la hélice directriz de la superficie (fig. 407) y se une el origen $A \equiv (A_1, A_2)$ de la curva con un punto $B \equiv (B_1, B_2)$ del eje. La recta AB constituye la posición inicial de la generatriz. Para obtener las posiciones sucesivas de AB se hace que gire alrededor del eje, de un ángulo correspondiente a 1, 2, 3, ..., divisiones iguales previamente establecidas, y, simultáneamente, que suba de 1, 2, 3, ..., divisiones iguales, también establecidas, sobre el eje. El lugar de todas las posiciones de la recta AB es el helicoide buscado.

En la figura se ha limitado el helicoide representando solamente la superficie comprendida entre el eje y la hélice directriz.

El helicoide oblicuo constituye una superficie no desarrollable. pues dos generatrices sucesivas no son coplanares. En efecto, ellas no son paralelas, pues, por ejemplo, P_2 es proyección vertical de dos puntos (P_1, P_2) y (Q_1, Q_2) de distinto alejamiento, y los puntos situados sobre la vertical por O_1 tienen todos cota distinta.

7. — El plano tangente al helicoide oblicuo en uno de sus puntos queda individualizado por la generatriz que pasa por el punto y por la tangente a la hélice que perteneciendo a la superficie pasa también por el punto.

Sea P el punto (fig. 408). La generatriz que pasa por él es $MP \equiv (M_1P_1, M_2P_2)$.

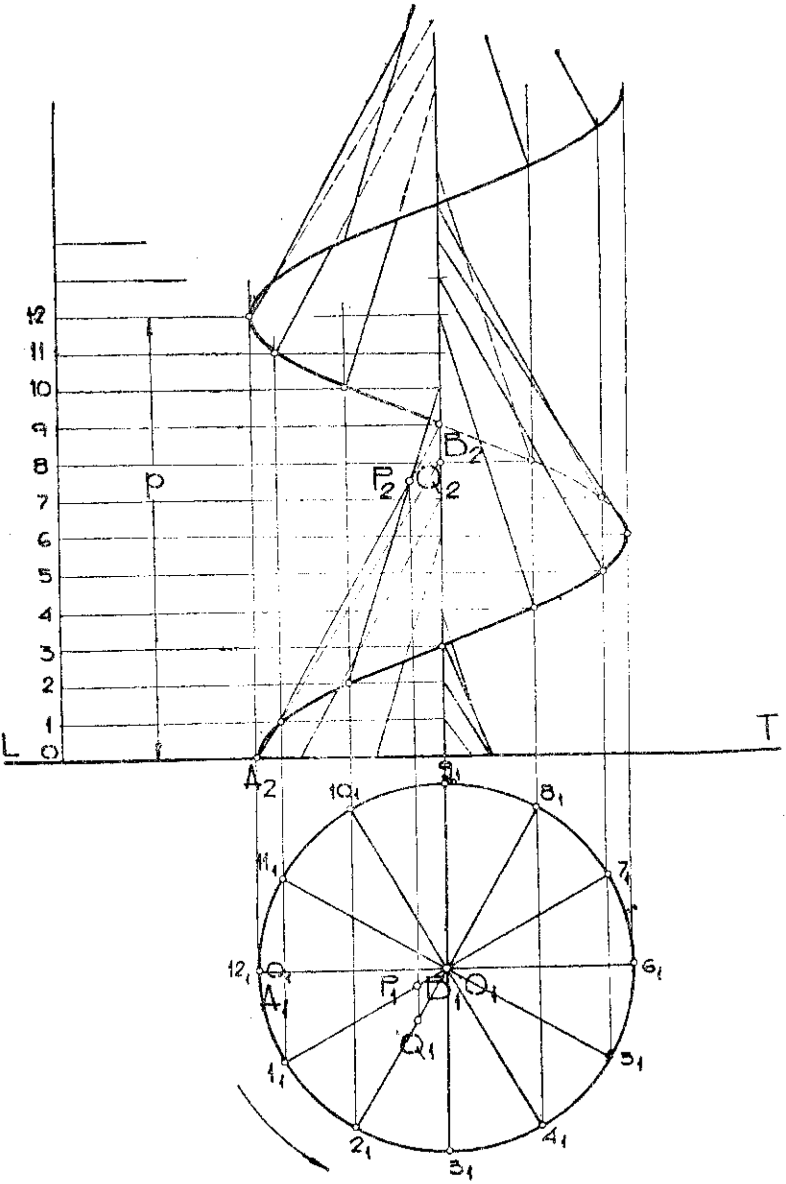

12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
L
0
p
T
B2
P2
Q2
A2
10₁
8₁
11₁
7₁
12₁
6₁
A₁
P₁
B₁
Q₁
1₁
5₁
2₁
4₁
3₁

FIG. 407

La hélice que pasa por P se proyecta horizontalmente según la circunferencia de radio $\overline{M_1P_1}$. La tangente por P a la hélice tiene como proyección horizontal la recta t_1 tangente a esa circunferencia; su traza horizontal H se determina (4, § 86) marcando sobre t_1 el punto H_1, tal que $\overline{P_1H_1}$ sea igual a la abscisa curvilínea del punto P.

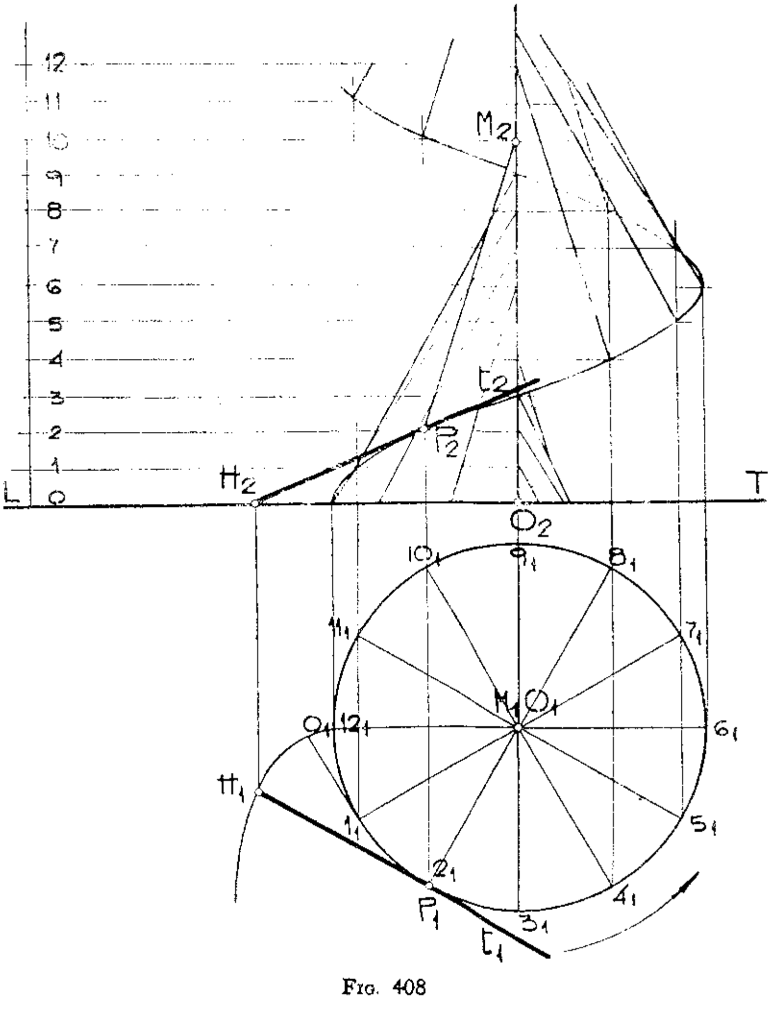


FIG. 408

Uniendo H_2 con P_2 se tiene la proyección vertical t_2 de la tangente a la hélice.

El plano tangente pedido queda así determinado mediante las rectas MP y t.

Si se quiere, pueden hallarse sus trazas.

8. — Si se corta el helicoide oblicuo mediante un plano horizontal, se obtiene una espiral de Arquímedes de fácil construcción. En efecto (fig. 409), M_2 da M_1, N_2 da N_1, etc.

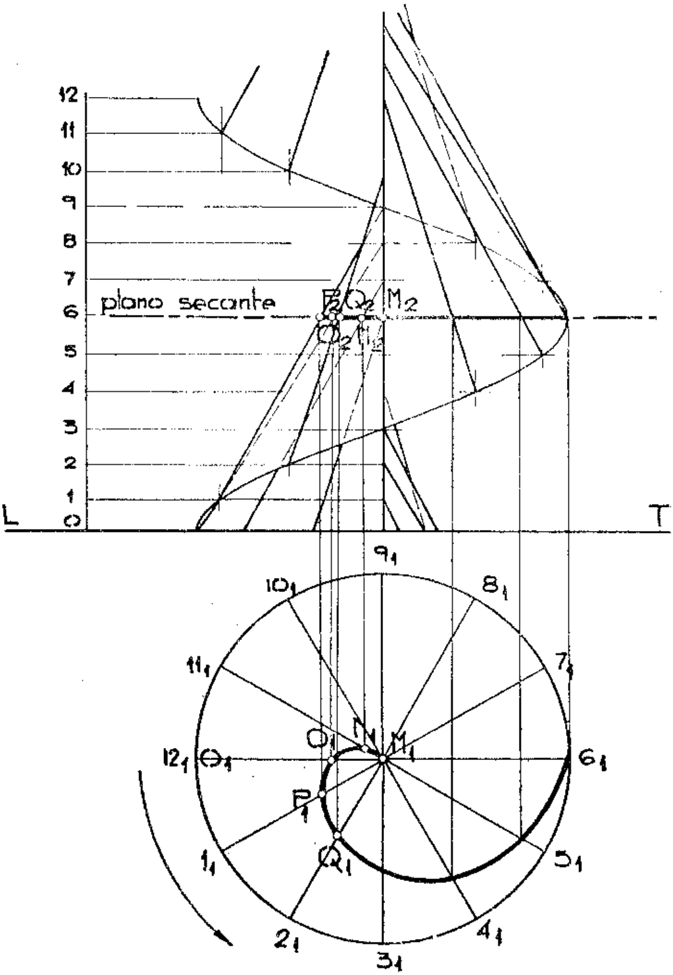


Fig. 409

9. — Una aplicación importante del helicoide oblicuo es el tornillo a filete triangular.

En general, un tornillo consta de una parte central maciza y cilíndrica, llamada *núcleo*, y de una parte periférica, el *filete*, de for

ma helicoidal, engendrada por el movimiento helicoidal de una figura plana adyacente a una de las generatrices del cilindro del núcleo alrededor del eje de este mismo cilindro.

En el caso del tornillo a filete triangular la figura plana que gira es un triángulo isósceles ABC (figura 410), contenido en un plano que pasa por el eje y cuya base $\overline{AC}$ pertenece a una de las generatrices del cilindro. El paso de las hélices descriptas es igual a la base $\overline{AC}$ del triángulo.

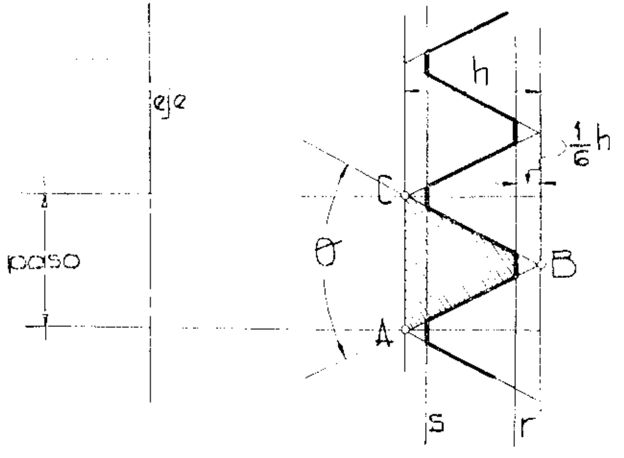


FIG. 410

El ángulo θ que corresponde al vértice B es constante para cada tipo de filete, variando entre 52° y 60°. En el sistema Whitworth, θ = 55°; en el sistema internacional, θ = 60°. En la práctica, para evitar la arista aguda determinada por la hélice que describe el vértice saliente B, se corta el triángulo generador mediante una recta r paralela a la base $\overline{AC}$ a una distancia que en el sistema Whitworth vale 1/6 de la altura h del triángulo generador.

Lo mismo se hace con las aristas entrantes que corresponden a las hélices descriptas por los vértices A y C.

La figura 411 da la representación de un tornillo de rosca triangular.

Fueron trazadas en primer término dos hélices sobre las superficies cilíndricas de radios $\overline{O_1A_1}$ y $\overline{O_1B_1}$; se trazó luego el contorno aparente sobre el plano vertical de las superficies helicoidales descriptas. En rigor, este contorno aparente hállase constituído por las envolventes de las proyecciones de las generatrices de las dos superficies helicoidales que limitan el filete; pero esas envolventes difieren tan poco de dos segmentos rectilíneos que en la práctica se procede a conducir por el vértice saliente del triángulo generador tangentes a la hélice descripta, tangentes que, por otra parte, difieren muy poco de los otros lados del triángulo.

Las proyecciones horizontales de las dos hélices son dos circunferencias concéntricas.

10. — Si en el helicoide considerado en 6 de este parágrafo las generatrices se vuelven perpendiculares al eje, se tiene el *helicoide recto,* superficie reglada también *no desarrollable.*

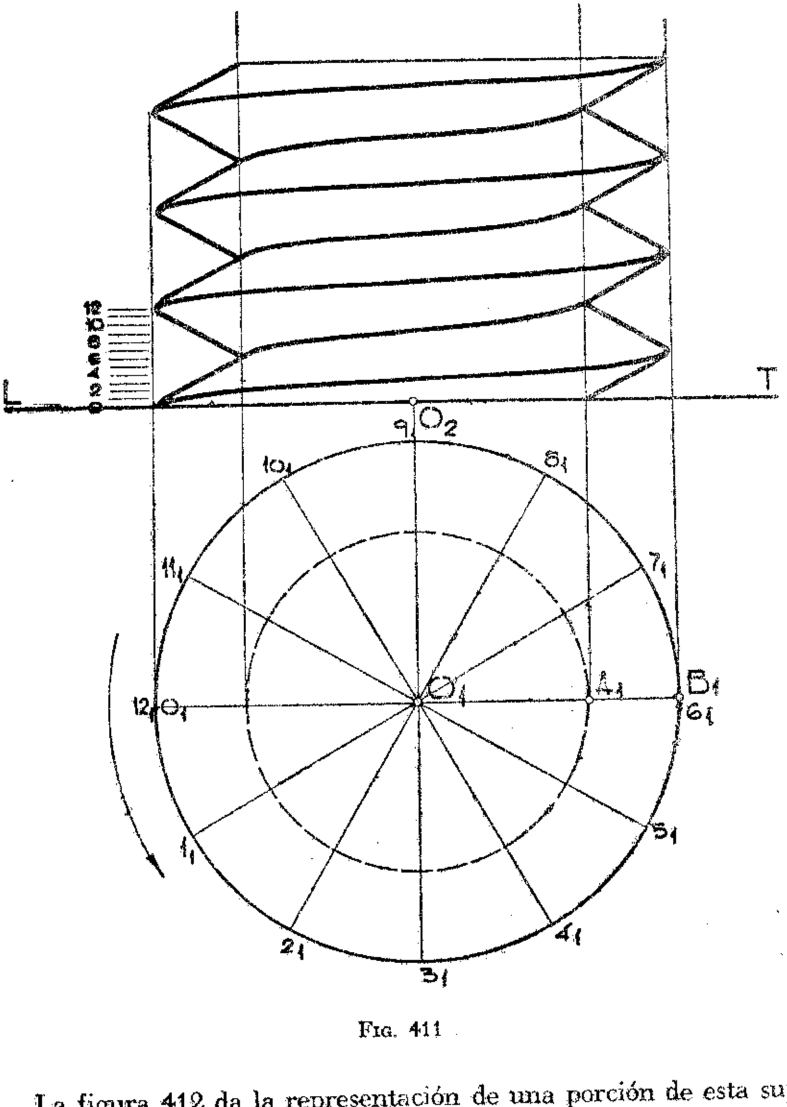


FIG. 411

La figura 412 da la representación de una porción de esta superficie, engendrada por un segmento $\overline{AB}$ de generatriz. Los puntos A y B describen dos hélices concéntricas y de igual paso.

La determinación del plano tangente a esta superficie en uno de sus puntos P se resuelve como en el caso general de los helicoides oblicuos.

Las rectas g y t son las que determinan el plano tangente por P a la superficie representada.

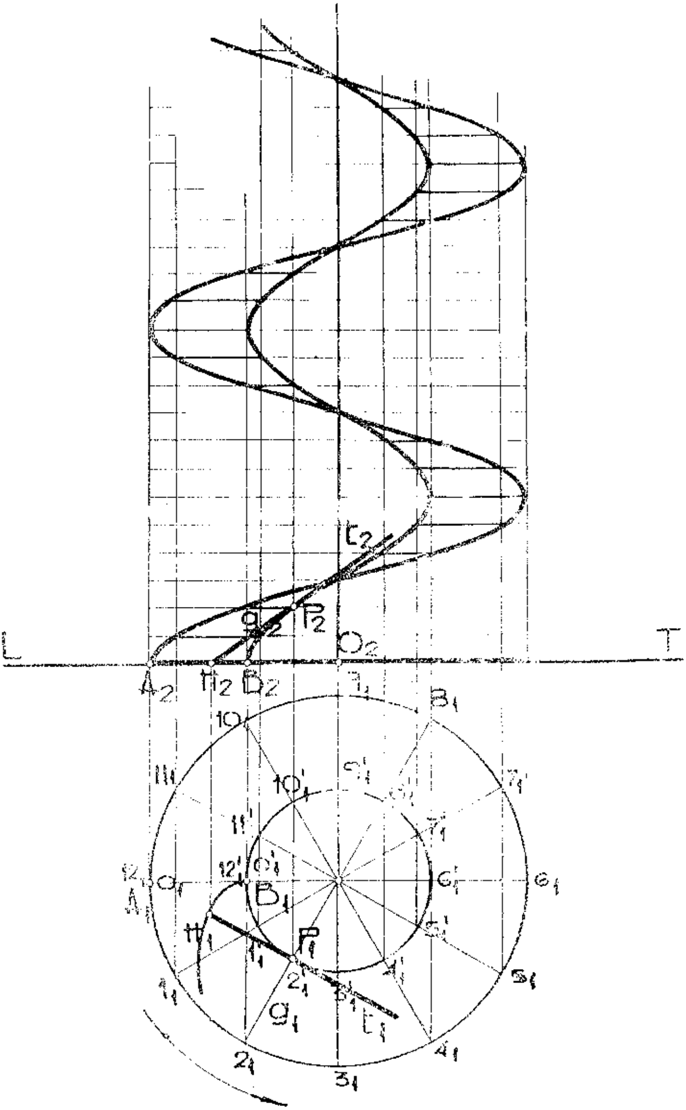


FIG. 412

11. — Esta superficie helicoidal es empleada frecuentemente en la práctica: tornillo de filete cuadrado, tornillo de Arquímedes, limón de escaleras, etc.

Nos referiremos al tornillo a filete cuadrado.

El es engendrado por un rectángulo, *ABCD* (fig. 413), contenido en un plano que pasa por el eje de un núcleo cilíndrico, con un lado $\overline{BC}$ dispuesto según una generatriz de la superficie de ese núcleo.

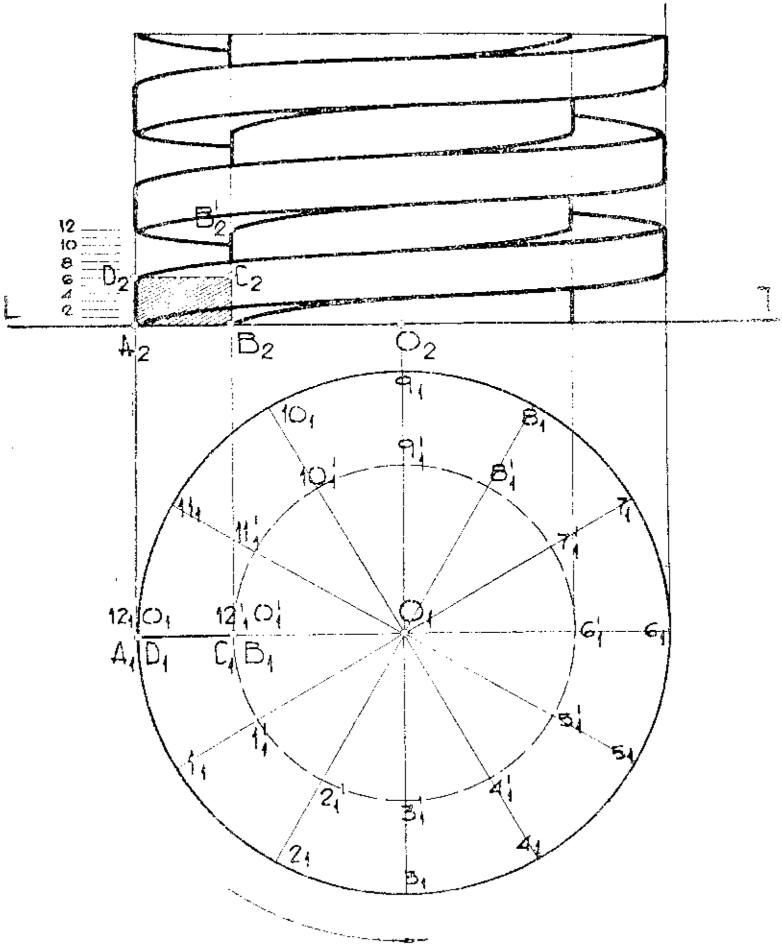


Fig. 413

Los dos vértices *B* y *C* del rectángulo describen sobre la superficie cilíndrica dos hélices iguales cuyo paso $\overline{B_2B_2'}$ debe ser, por lo menos, igual al doble de $\overline{B_2C_2}$, para permitir el pasaje de la parte saliente de la tuerca.

Los vértices *A* y *D* describen otras dos hélices de paso igual a las primeras, pero de radio $\overline{O_1A_1}$.

Otra aplicación del helicoide recto es dada por la figura 414

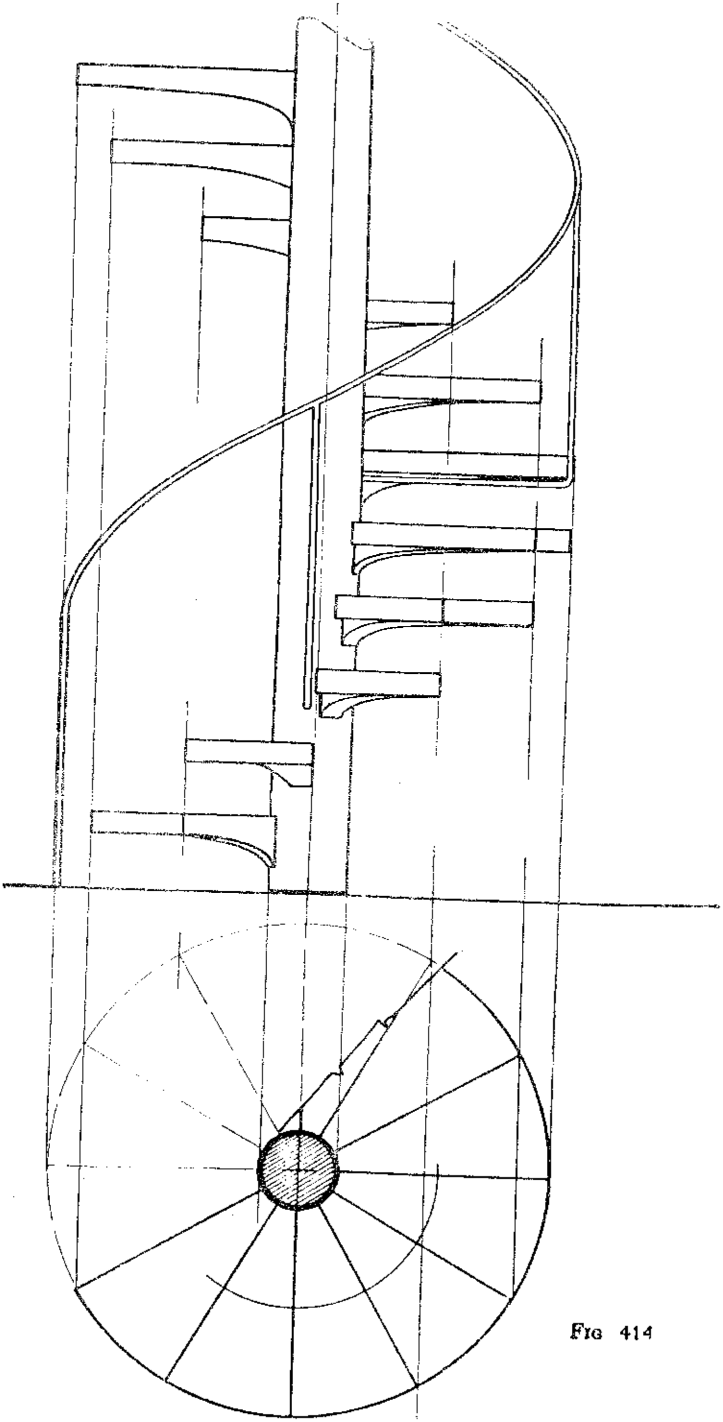


Fig 414

CAPÍTULO XX

INTERSECCION DE SUPERFICIES

§ 88. GENERALIDADES

1. — En distintos capítulos hemos considerado la intersección de un plano con una superficie poliédrica, cónica, helicoidal, etc. Nos referiremos ahora al problema general de la intersección de dos superficies cualesquiera. Este problema se presenta a menudo en dis-

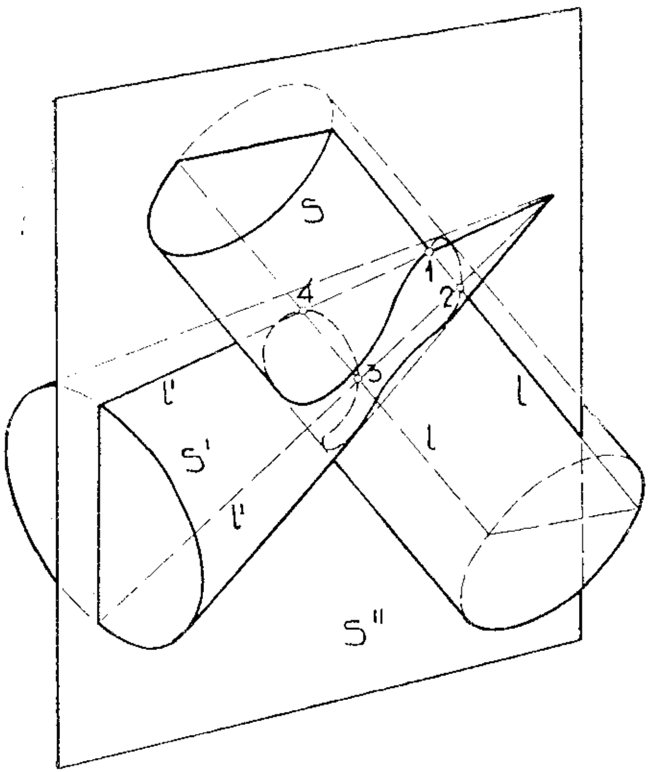


FIG. 415

tintas cuestiones prácticas; por ejemplo, cuando debe estudiarse la conexión de dos cañerías, o las faldas de un techo, o la unión de una caldera con su chimenea, o de un avión con su fuselaje, etc.

2. Dos superficies que se cortan lo hacen según una o más líneas espaciales, en general no planas. Para determinarlas se pueden cortar las dos superficies dadas S y S' mediante otra superficie auxiliar S'' convenientemente elegida. Las líneas de intersección l y l' de S'', con cada una de las superficies dadas, se encuentran generalmente en uno o más puntos 1, 2, 3, ..., que son puntos de la intersección buscada (fig. 415).

Un número suficiente de superficies auxiliares permite el trazado de la intersección buscada.

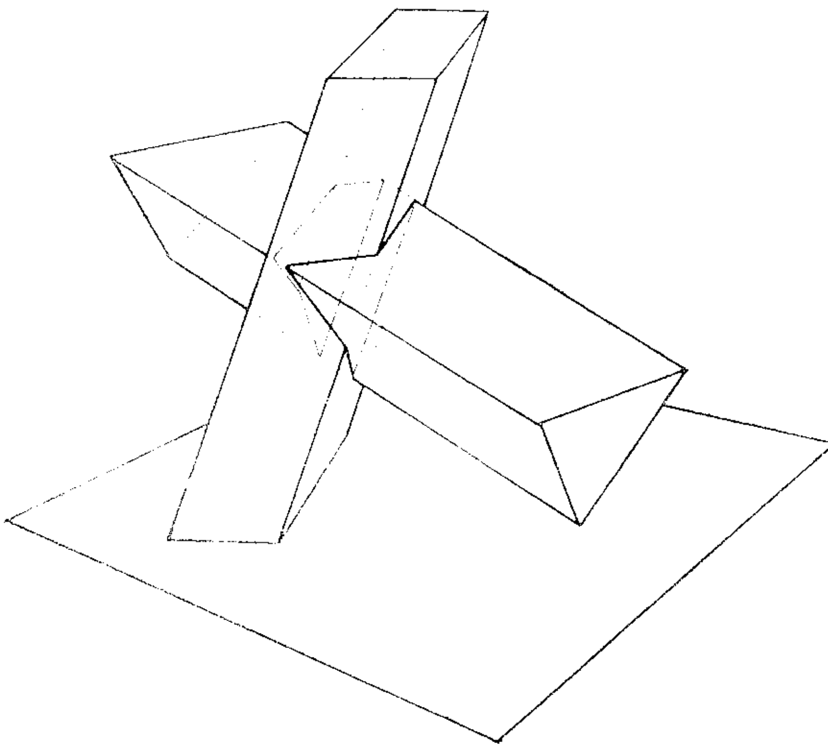


FIG. 416

Es éste el método de las *superficies secantes auxiliares*.

La superficie auxiliar más simple es el plano; el método es distinguido entonces como *método de los planos secantes*.

Estos pueden ser horizontales, o verticales, o de canto, debiendo tratarse, en general, de que las líneas según las cuales cortan las

superficies dadas sean rectas o circunferencias. Otras superficies se-
cantes auxiliares son las esféricas, que si bien empleadas en casos li-
mitados, dan soluciones muy sencillas. A veces se emplean también
superficies secantes cilíndricas.

3. — Dadas dos superficies cuya intersección quiere hallarse se
puede imaginar una línea cualquiera en una de ellas. La intersección

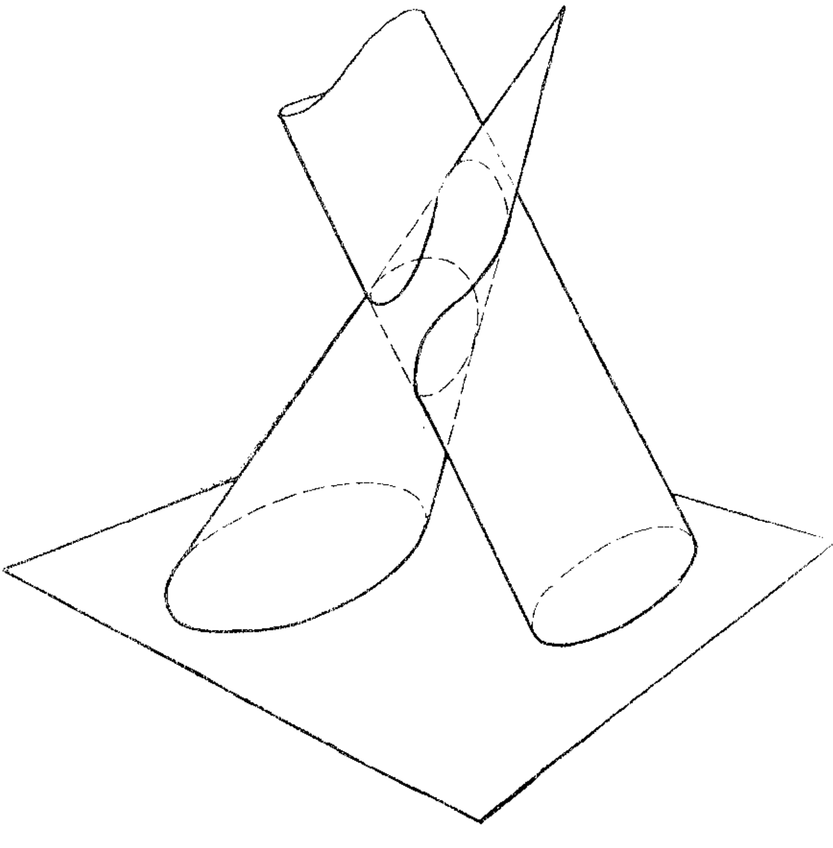


Fig. 417

de esta línea con la otra superficie es, evidentemente, un punto (o va-
rios) de la intersección de las dos superficies. El empleo de un número
suficiente de líneas pone a nuestro alcance otro método llamado *mé-
todo de las líneas individuales.* Es claro que las líneas a elegir deben

ser simples: aristas de superficies poliédricas, generatrices de superficies cónicas o cilíndricas, etc.

4. — Cuando dos superficies se cortan puede ocurrir que una de ellas pasa a través de la otra; puede imaginarse que la primera queda entera dentro de la segunda, mientras ésta, en cambio, es la cortada. Se dice entonces que hay *penetración* (fig. 416) y la intersección se

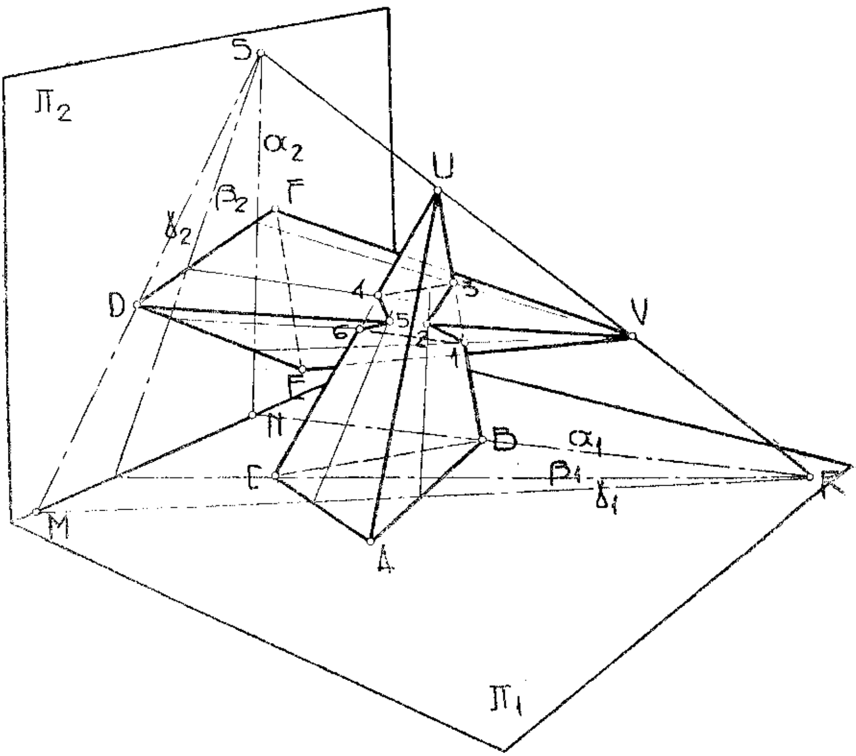


Fig. 418

compone de dos líneas separadas: la *curva de entrada* y la *curva de salida.*

La figura 417 muestra, en cambio, otro tipo de intersección de dos superficies. Una de éstas entra sólo parcialmente en la otra. Hay entonces *arranque* o *mordedura* y la intersección consta de una curva única.

§ 89. INTERSECCION DE DOS SUPERFICIES POLIEDRICAS

1. — La intersección de dos superficies poliédricas se compone de una o más líneas poligonales, en general alabeadas. Sus vértices son los puntos en que las aristas de una de las superficies encuentran las caras de la otra superficie; sus lados son las intersecciones de las caras de las dos superficies.

Para aplicar el método de las superficies secantes auxiliares consideremos las superficies de dos pirámides (fig. 418). Sus vértices son *U* y *V* y sus bases *ABC* y *DEF*, situadas en los planos π_1 y π_2, respectivamente.

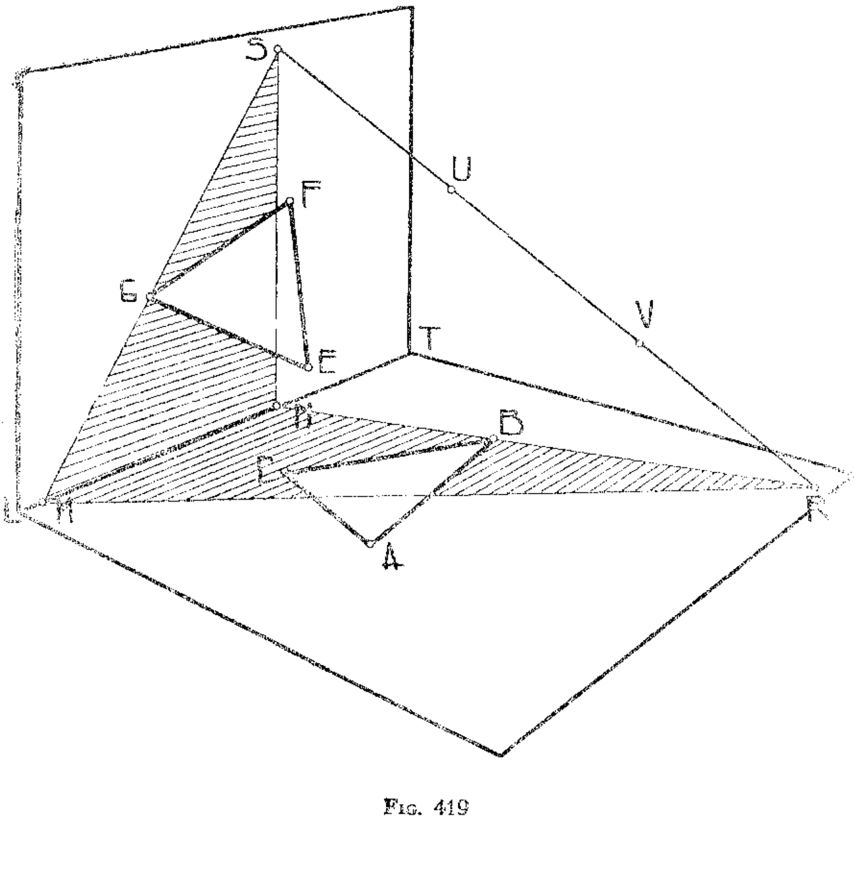


Fig. 419

Unamos los vértices *U* y *V*. Las trazas de la recta *UV* son *R* y *S*. Todo plano, α, por ejemplo, que pasa por *UV*, tendrá sus trazas α_1 y α_2 que pasan por *R* y *S*, respectivamente; y si corta las dos superficies dadas, lo hará según generatrices de las mismas.

Los puntos de encuentro, 1 y 3, de las generatrices de una de las

superficies, con las de la otra superficie, son, evidentemente, puntos de la intersección buscada.

Los puntos R y S, donde convergen las trazas de todos los planos secantes auxiliares, se llaman *puntos de convergencia.*

Un segundo plano, β, por ejemplo, que pasa también por UV y

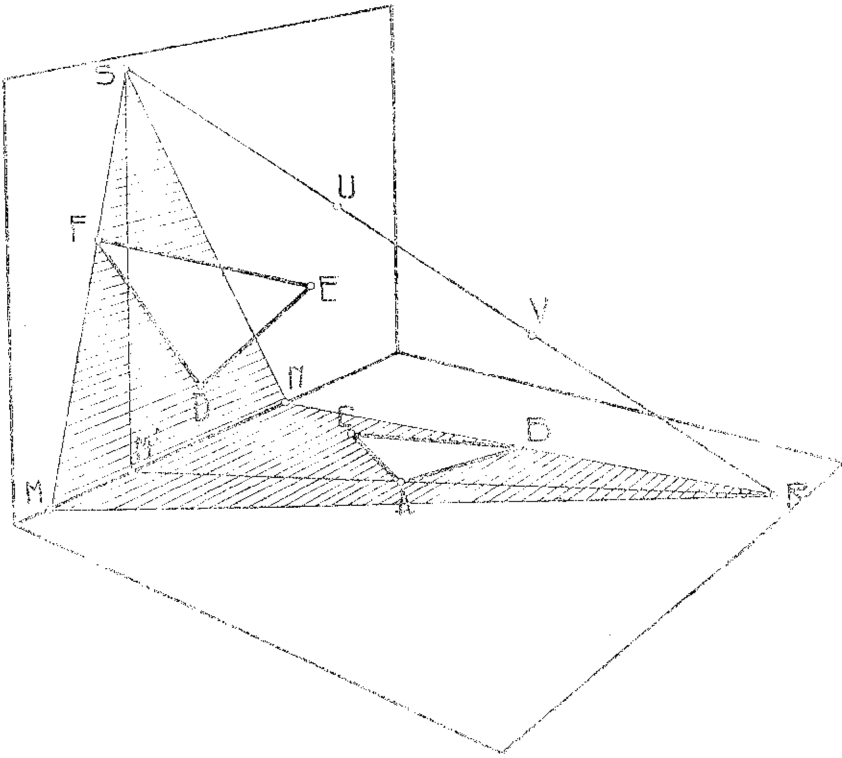


FIG. 120

corta las dos superficies, proporcionará otros puntos de la intersección, y así sucesivamente.

Cuando un plano auxiliar corta una de las superficies según una arista únicamente, se dice que es un *plano límite* para esa superficie. Así, el plano γ es límite para la superficie de base DEF y es útil. Las regiones útiles de los planos auxiliares están comprendidas entre las rectas SM y SN en el plano π_2 y RM y RN en el plano π_1.

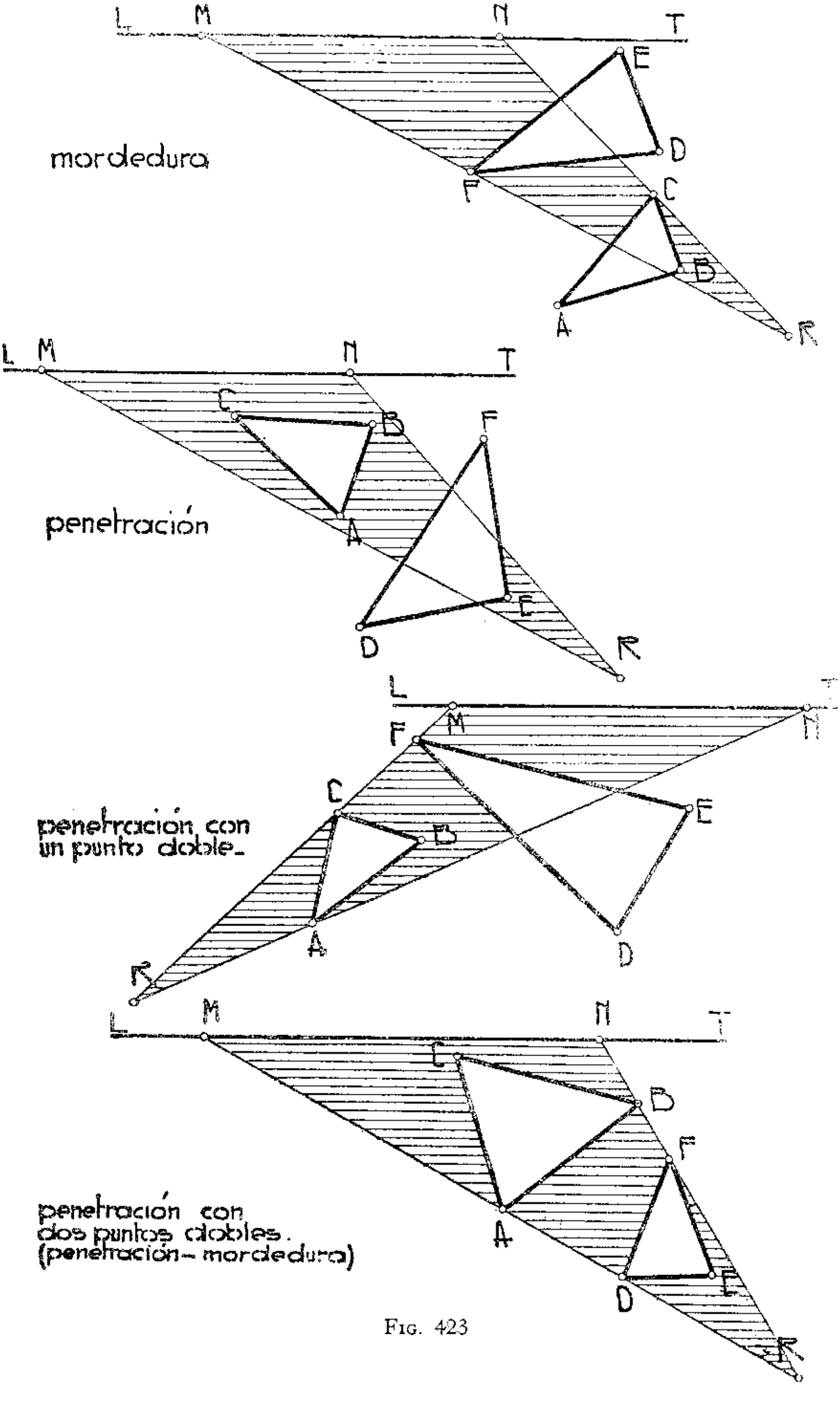

mordedura
penetración
penetración con
un punto doble.
penetración con
dos puntos dobles.
(penetración - mordedura)

FIG. 423

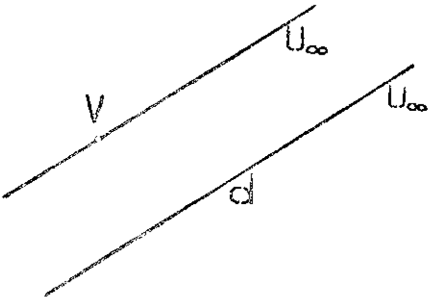


FIG. 424

aristas siguen la dirección *d* (fig. 424), el prisma puede ser asimilado a una pirámide cuyo vértice U ha sido lanzado al infinito en la dirección d. Entonces la recta UV será la paralela por V a la dirección d. Se procederá después como en el número anterior.

4. — Consideremos ahora las superficies de dos prismas (fig. 425).

Uno de los sólidos tiene como vértice el punto U en el infinito sobre una de sus aristas a; el otro tiene su vértice V en el infinito sobre una de sus aristas b. Los planos secantes auxiliares serán, pues, paralelos a las rectas a y b. Tomando entonces un punto arbitrario

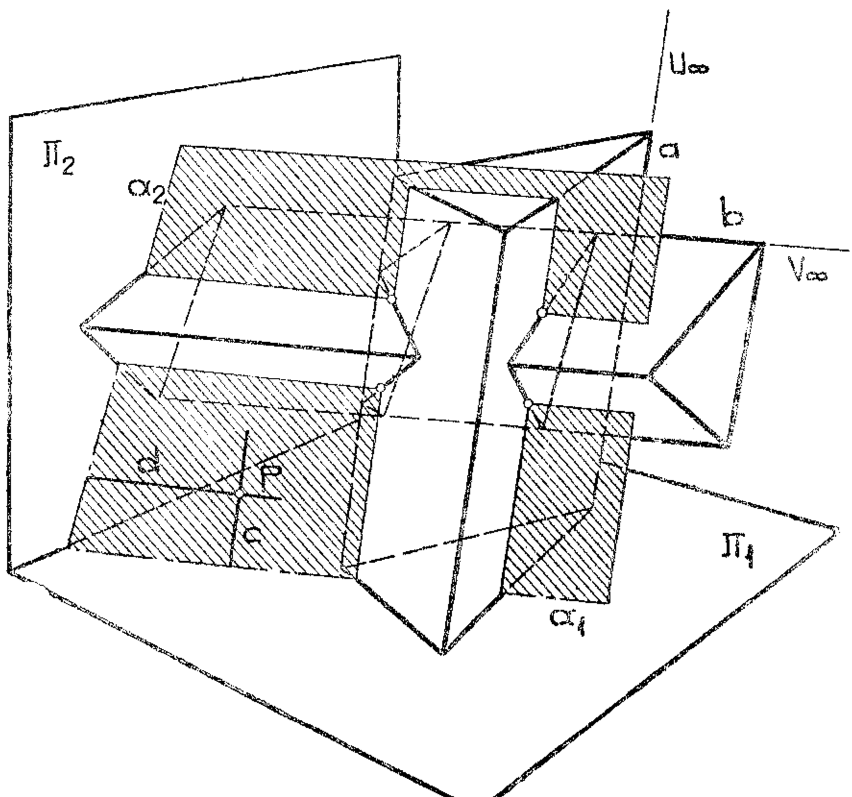


FIG. 425

P y trazando por él las paralelas c y d a las aristas a y b, respectivamente, queda definido un plano α paralelo a los planos secantes auxiliares. **Las trazas de cualquiera de éstos serán así paralelas a las trazas** α_1 y α_2 del plano α.

Se procede después como en 1.

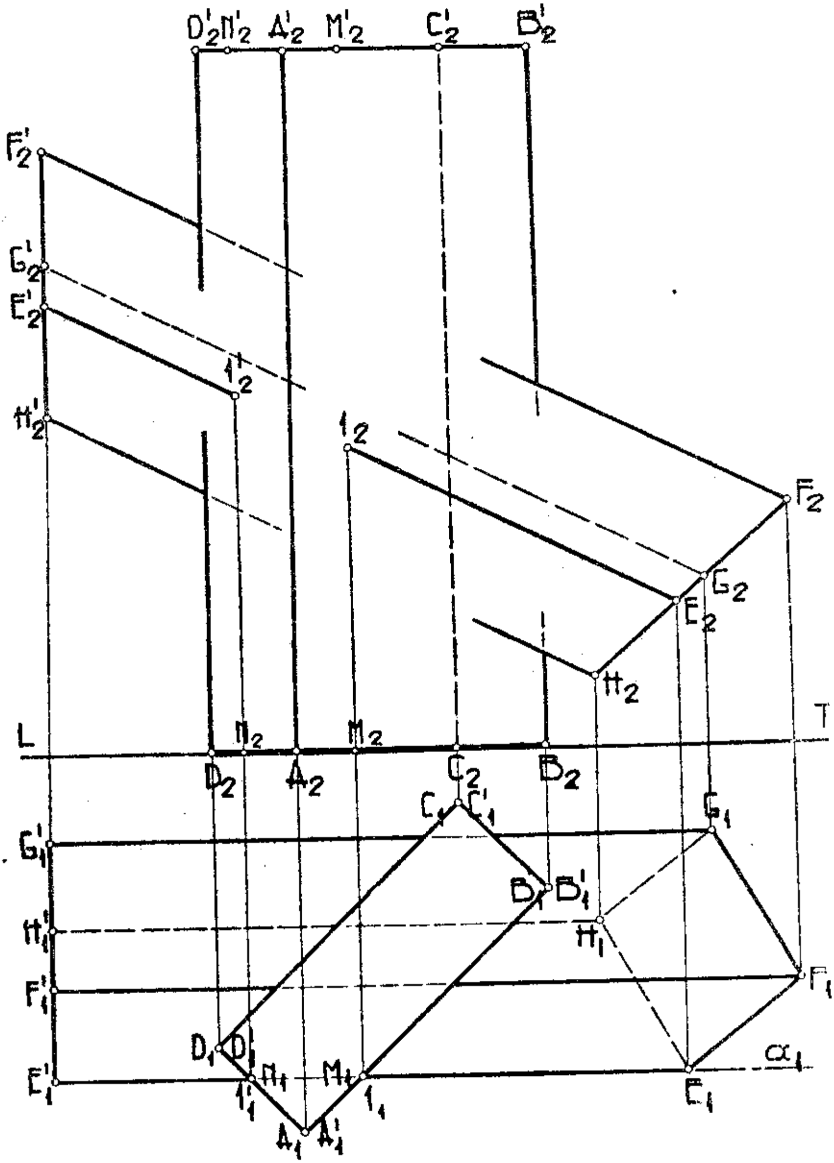


Fig. 426

5. — Para que los puntos proporcionados por los planos secantes auxiliares sean vértices de la intersección se utilizan únicamente aquellos planos útiles que pasan por una arista de una u otra de las superficies. Obtenidos los puntos de la intersección es necesario determinar correctamente el orden según el cual deben ser unidos.

6. — Consideremos, por ejemplo, el caso de dos superficies prismáticas (fig. 426), una vertical y otra oblicua.

Como planos secantes utilizaremos, de acuerdo con el procedimiento indicado en el número 4, planos paralelos a las aristas de ambas superficies. En este caso, planos paralelos al vertical de proyección. Uno de ellos, el que proyecta horizontalmente la arista $\overline{E'E}$, corta la superficie de base *ABCD* según los segmentos (generatrices) $\overline{MM'}$ y $\overline{NN'}$, y la superficie de base *EFGH* según la arista $\overline{EE'}$. Los puntos $(1_1, 1_2)$ y $(1'_2, 1'_2)$, en que $\overline{EE'}$ corta $\overline{MM'}$ y $\overline{NN'}$ son puntos de la intersección que se busca.

Para hallar otros puntos deben utilizarse otros planos auxiliares. Su representación es dada en la figura 427, habiéndose empleado en conjunto seis planos secantes. Los planos por E_1 y G_1 (planos límites) individualizaron cada uno dos puntos de la intersección; los otros determinan cuatro cada uno, pero fueron marcados solamente aquellos que, por pertenecer a una de las aristas, dan vértices de la intersección.

Obtenidos los puntos de la intersección, deben ser unidos. Notemos antes que por la disposición relativa de las bases se trata de un problema de penetración, y la intersección constará entonces de dos polígonos cerrados distintos, el de entrada y el de salida.

La proyección horizontal de la intersección es dada, evidentemente, por las dos porciones de traza horizontal del prisma vertical interceptadas por el contorno aparente horizontal del prisma oblicuo.

Para hallar la proyección vertical consideremos los distintos planos secantes como posiciones sucesivas de un plano móvil que, a partir de una posición inicial, se desplaza paralelamente a sí mismo. Ocurre entonces que, moviéndose el plano en forma continua, el primer par de generatrices es reemplazado continuamente por otro y el punto común a las dos generatrices irá trazando la línea de intersección de las dos superficies. Mientras tanto, y simultáneamente, los puntos en que cada una de aquellas generatrices encuentra la base respectiva se moverán sobre el contorno de esas mismas bases.

Sea entonces E'_1E_1 la posición inicial del plano secante, siendo $1 \equiv (1_1, 1_2)$ el punto de intersección inicial considerado. Como en esa posición el plano es límite para la superficie prismática oblicua, tendrá que desplazarse necesariamente hacia la línea de tierra. El punto E_1 irá entonces hacia H_1 y el punto 1_1 hacia B_1. Se detiene el movimiento del plano cada vez que uno de los puntos móviles E_1 o 1_1 coincida con un vértice de la base respectiva, o sea, cada vez que el plano llega a contener una arista. Esto ocurre en el instante en que el punto 1_2, común a las proyecciones verticales de las dos

generatrices, llega a otro vértice de la intersección. En nuestro caso el plano móvil se detiene en H_1, y en esta posición encontramos el segundo punto de la intersección, el punto $(2_1,\ 2_2)$.

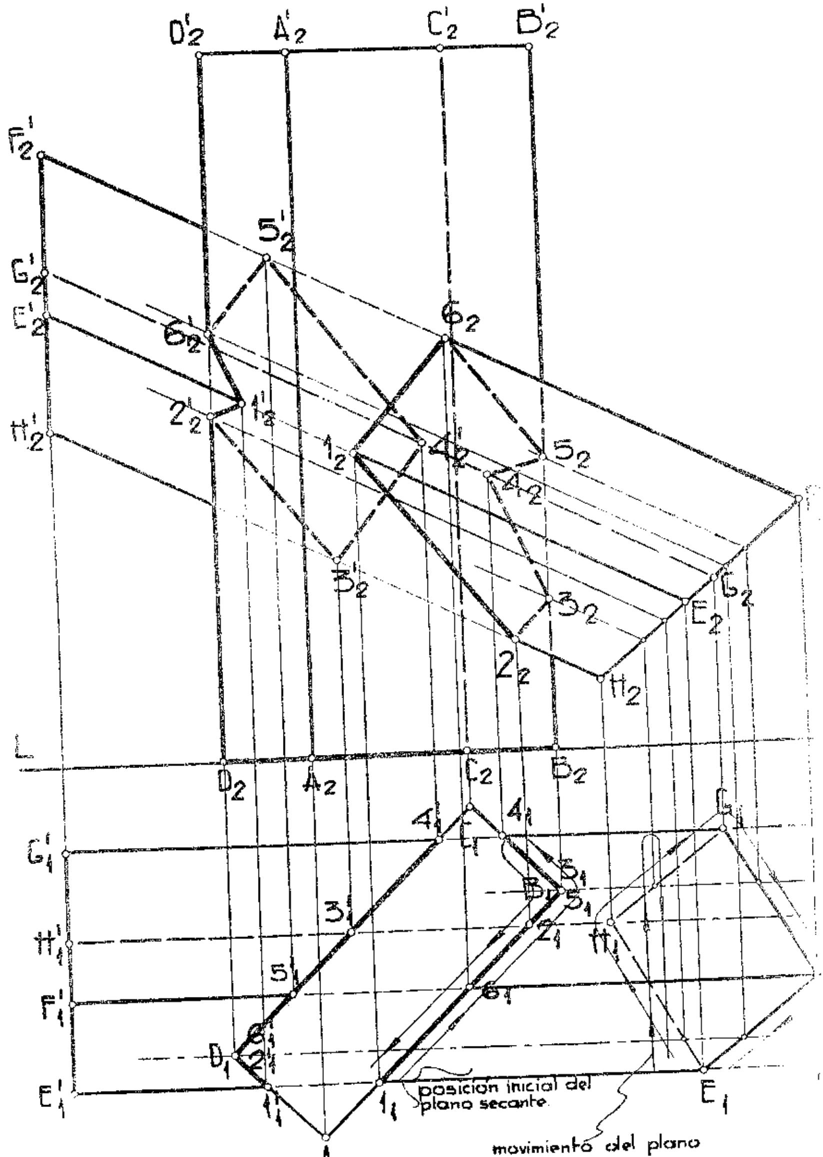


Fig. 427

Reanuda el plano su movimiento, el punto móvil de la base de la superficie oblicua sigue hacia G_1, el de la otra base se acerca a B_1 y, como aquí hay un vértice, el plano se detiene. Se marca entonces como $3 \equiv (3_1, 3_2)$ el correspondiente punto de intersección.

Reanudada la marcha se produce la próxima parada en G_1, marcándose primero el cuarto punto $(4_1, 4_2)$ de la intersección. Como en

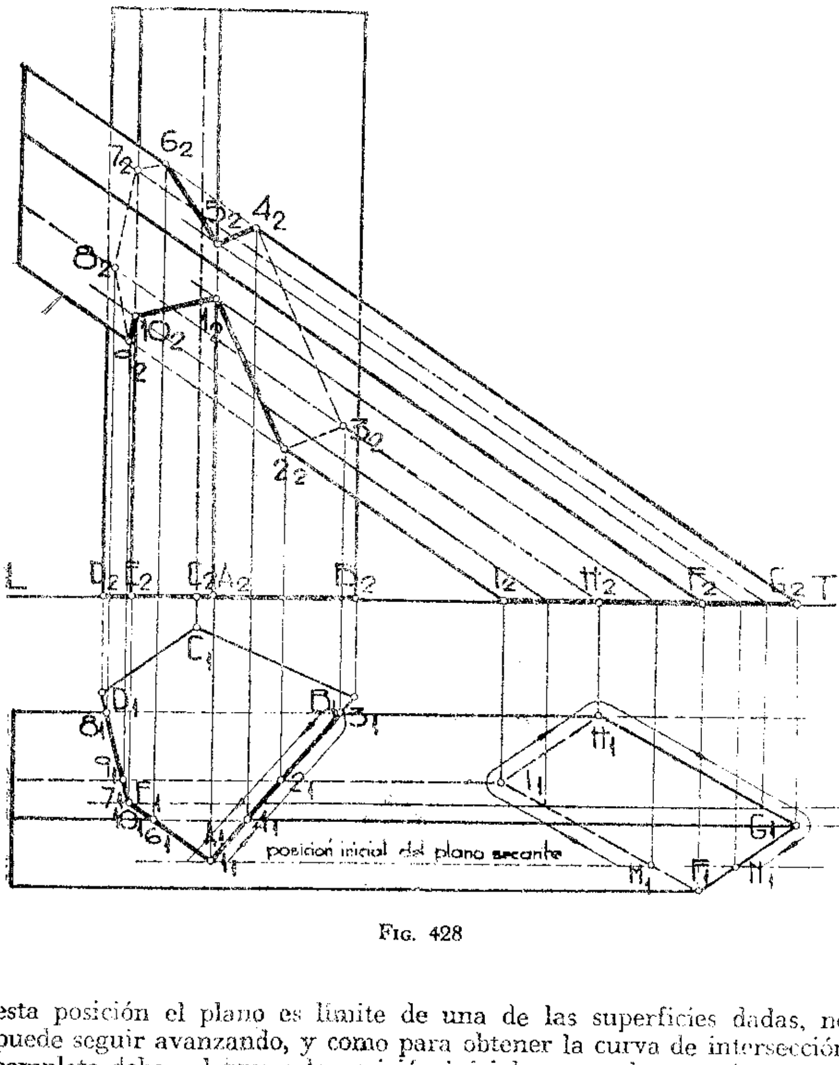


FIG. 428

esta posición el plano es límite de una de las superficies dadas, no puede seguir avanzando, y como para obtener la curva de intersección completa debe volverse a la posición inicial, no queda otra alternativa que el retroceso del plano. El punto móvil de la base $E_1F_1G_1H_1$ podría seguir dos caminos en este nuevo movimiento: el $G_1H_1E_1$ o el

$G_1F_1E_1$. Como no hay interés en el primero porque reproduciría los mismos puntos ya hallados de la intersección, sigue el camino $G_1F_1E_1$.

El otro punto móvil, el de la base $A_1B_1C_1D_1$, en cambio, no puede seguir contorneando su base porque su movimiento dejaría de ser continuo (para saltar de 4_1 a $4'_1$). Debe, entonces, volver por el mismo camino seguido hasta ese momento. De aquí la regla: *cuando el plano auxiliar se vuelve límite para una de las superficies, el móvil que describe la base de esta superficie continúa desplazándose en el mismo sentido, mientras que el otro móvil rehace su propio camino.*

Se llega de este modo al punto B_1, donde el plano se detiene y se marca el correspondiente punto $5 \equiv (5_1, 5_2)$ de la intersección.

La próxima parada es en F_1 y se marca el punto $6 \equiv (6_1, 6_2)$. Se vuelve por fin a E_1, punto de partida correspondiente al punto *1* de intersección.

Hemos conseguido así numerar ordenadamente los puntos de la línea de entrada de la penetración propuesta. Basta unirlos mediante segmentos, visibles si los dos puntos extremos son visibles, invisibles en caso contrario, para tener la proyección de la línea mencionada.

Para obtener la línea de salida *1'2'3'4'5'6'* se repite el mismo procedimiento, empezando con el punto $1' \equiv (1'_1, 1'_2)$ y haciendo que mientras E se desplaza, como antes, en el sentido $EHG\ldots$, $1'$ lo haga hacia D_1C_1, retrocediendo cuando el plano secante se hace límite de la superficie de base $EFGH$.

7. — En la figura 428 se tiene otro ejemplo parecido.

Pero la intersección se compone de un polígono único por tratarse de una mordedura.

Las flechas indican el recorrido de los puntos 1_1 y M_1 para la determinación de los puntos *1, 2, 3, 4* y *5* de la intersección.

Para los puntos *6, 7* y *8* el recorrido no ha sido indicado por razones de claridad en el dibujo.

8. — La figura 429 corresponde a la ensambladura de dos piezas de madera de sección cuadrada. La construcción es tan simple que omitimos su explicación detallada.

Hay un polígono de entrada y otro de salida. La porción de cada polígono situada detrás del plano de los ejes coincide en proyección vertical con la porción que está delante.

A la izquierda se ha desarrollado la parte de superficie prismática vertical, que se proyecta en el plano horizontal según la quebrada $B_1A_1D_1$.

A la derecha se ha desarrollado la parte de superficie prismática oblicua situada fuera de la intersección.

9. — La intersección de las superficies de dos pirámides no tiene, en verdad, una real importancia práctica. Mas para que el lector pueda compenetrarse en forma más o menos completa de cuanto concierne a la intersección de superficies poliédricas, consideraremos tam-

bién algunos problemas básicos de intersección de las superficies de dos pirámides (*).

Sean entonces las pirámides representadas en la figura 340. Una de base *ABC*, situada en el plano horizontal y vértice *U*; otra, de base *DEF*, también en el plano horizontal y vértice *V*.

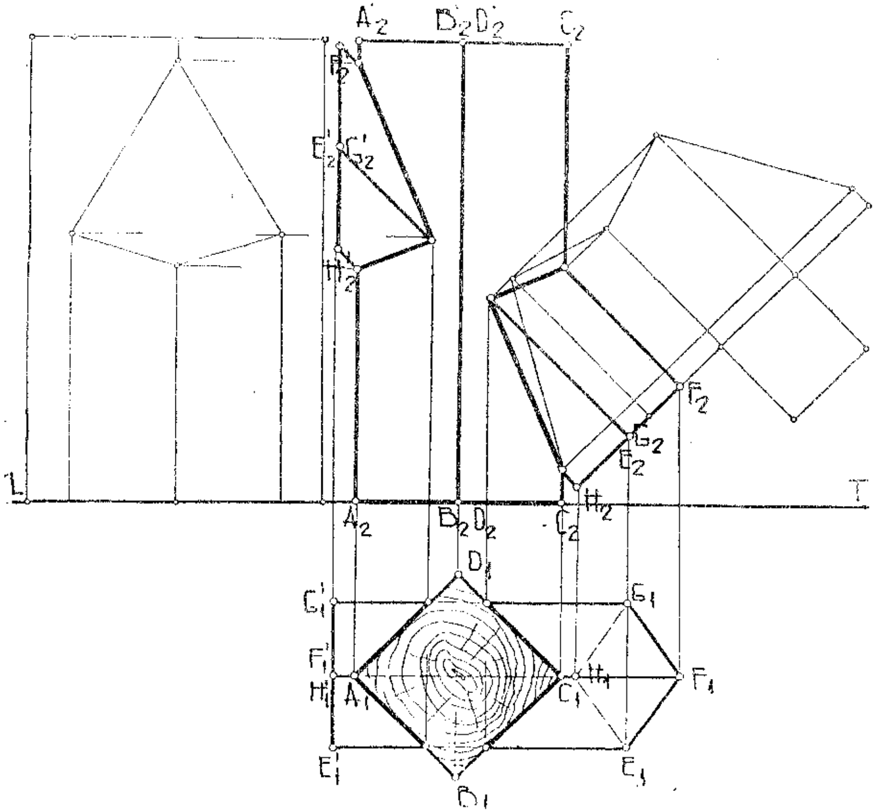


Fig. 429

Por la disposición relativa de las bases se ve que el problema es de penetración.

Los planos secantes auxiliares deben pasar (1 de este parágrafo) por la recta *UV*. Tracemos entonces esta recta y determinemos su

---

(*) Desde el punto de vista científico, el problema de la intersección de pirámides debe preceder al de la intersección de prismas, pues éstos no son sino casos particulares de aquéllos. Pero desde el punto de vista didáctico, ir de lo fácil a lo difícil, conviene a veces invertir el orden de algunos temas parciales de la asignatura que estamos estudiando.

traza horizontal (H_1, H_2). Las trazas horizontales de los planos secantes pasarán todas por H_1 y estarán comprendidas entre las posiciones límites H_1B_1 y H_1C_1 que determinan el ángulo θ indicado en la figura.

Uno cualquiera de los planos secantes, el de traza horizontal H_1C_1,

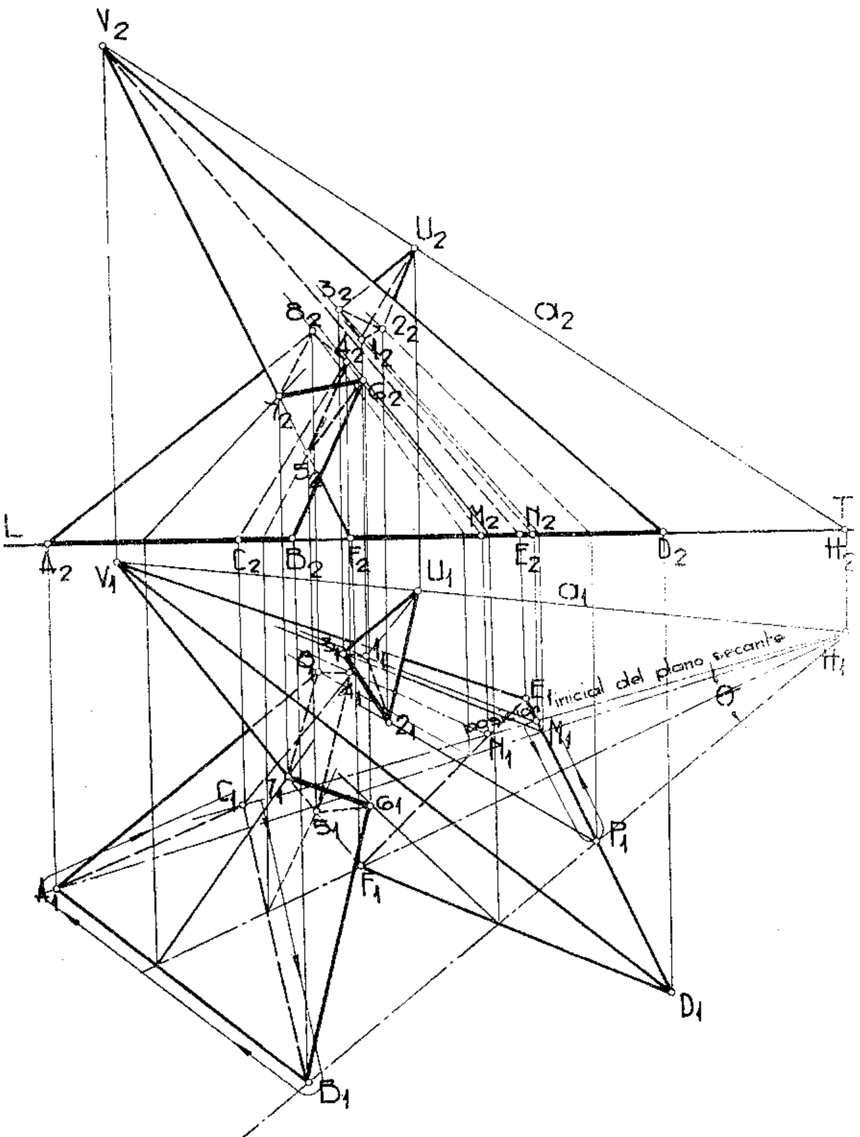


Fig. 430

por ejemplo, corta la superficie de base ABC según la arista CU y la de base DEF según las generatrices MV y NV.

Los puntos determinados son los marcados como $1 \equiv (1_1, 1_2)$ y $4 \equiv (4_1, 4_2)$.

Considerando otros planos secantes cuyas trazas horizontales pasen siempre por H_1 y estén dentro del ángulo θ se encuentran fácilmente otros puntos de la intersección. Algún plano secante proporcionará dos de esos puntos, algún otro proporcionará cuatro; en este último caso se marcarán solamente aquellos que pertenecen a aristas de una u otra superficie, es decir, aquellos que serán vértices de las líneas poligonales de la intersección.

Obtenidos los puntos, deben ser unidos en el orden exacto. Se procede entonces como en el caso de los prismas, con la diferencia de que el plano secante auxiliar, considerado móvil, en vez de desplazarse paralelamente a sí mismo, se desplaza girando alrededor de la recta UV, es decir, de modo que la traza horizontal gire alrededor de H_1.

Sea, pues, H_1C_1 la posición inicial de la traza horizontal del plano secante. Consideremos como punto inicial el 1, es decir, en proyección horizontal el 1_1. Los apoyos (trazas en los planos de las bases) de las correspondientes generatrices son C_1 en la base $A_1B_1C_1$ y M_1 en la $D_1E_1F_1$. Iniciado el movimiento de la traza H_1C_1, el punto M_1 se dirige hacia D_1; el punto C_1, sin salirse del plano, podría seguir dos caminos: el $C_1A_1B_1$ o el C_1B_1. Imaginemos que siga el segundo. En marcha plano y puntos, el primer vértice que se encuentra es el B_1; el plano se detiene y se marca con $(2_1, 2_2)$ el punto de intersección determinado.

La posición H_1B_1 es una posición límite del plano secante; para seguir su movimiento debe entonces retroceder, es decir, girar en sentido inverso. El punto móvil de la base $D_1E_1F_1$, que había llegado a P_1, debe rehacer su camino en sentido inverso. El punto móvil de $A_1B_1C_1$ puede, en cambio, sin interrumpir la continuidad de su recorrido, seguir hacia A_1 sin cambiar, así, de sentido. Siguiendo la marcha en estas condiciones se llega al vértice A_1. El plano se detiene y se marca con $(3_1, 3_2)$ el correspondiente punto de intersección.

Se reanuda la marcha y se llega a C_1, es decir, a la posición inicial. El punto de intersección es, pues, nuevamente el $(1_1, 1_2)$.

Una de las líneas de intersección, la de salida, puede ser trazada ya: es el triángulo *1-2-3*.

Para la línea de entrada se reinicia el procedimiento, empezando con el otro punto determinado por el plano secante en la posición inicial H_1C_1 de su traza horizontal, es decir, con el punto $4 \equiv (4_1, 4_2)$. Los puntos de apoyo sobre las bases de las generatrices correspondientes son C_1 y N_1.

Procediendo como se ha hecho más arriba se encuentra sin dificultad el polígono *4-5-6-7-8*.

En cuanto a la visibilidad, no olvidar que un segmento es visible cuando son visibles sus extremos.

10. — Para la intersección de las superficies de una pirámide y un prisma se procede en la forma indicada en el número 4 de este parágrafo, es decir, trazando, como primer paso, la recta por V (vértice

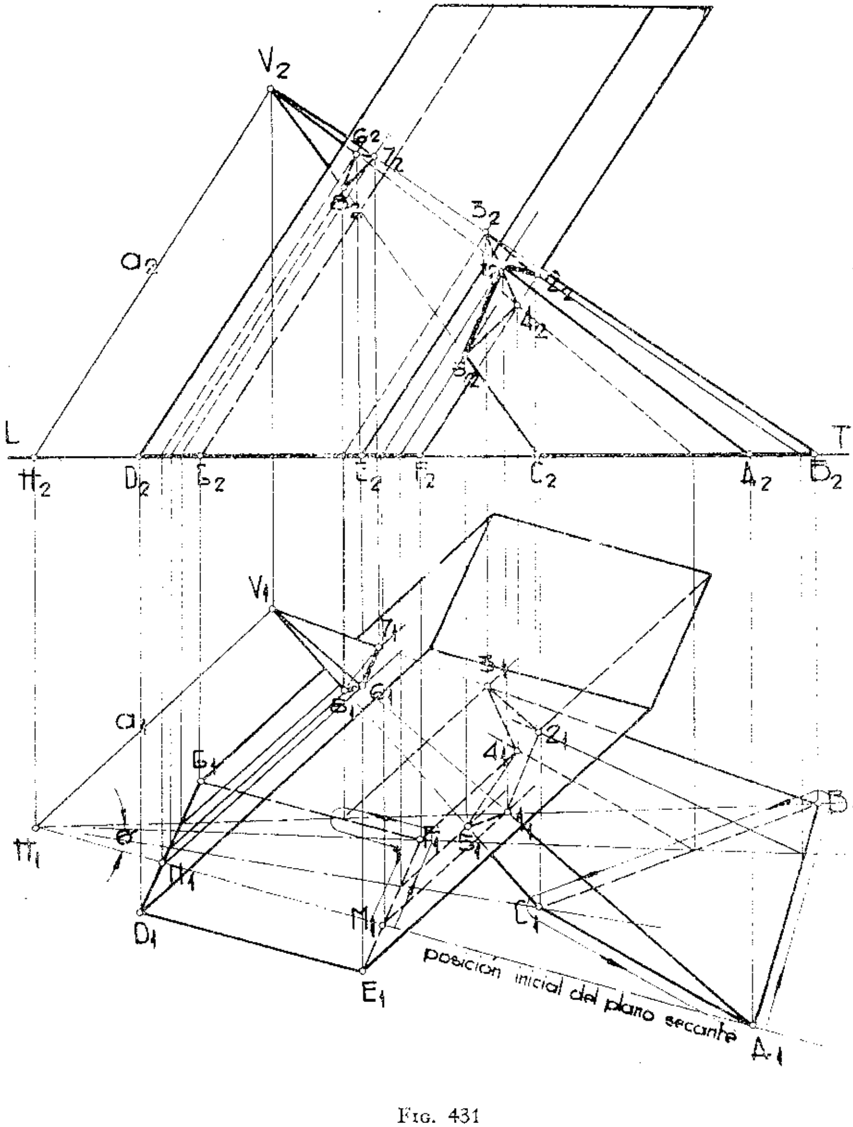


Fig. 431

de la pirámide) paralela a la dirección de las aristas del prisma y operando después en forma análoga a la de los números anteriores.

Trátese, entonces, de una pirámide de base ABC situada en el

plano π_1 y vértice V, y de un prisma de base $DEFG$ también situado en el plano π_1 (fig. 431).

Trazada por V la recta a paralela a las aristas del prisma se determina su traza (H_1, H_2) sobre el plano de las bases.

Los planos secantes auxiliares pasarán, naturalmente, por la recta a, y como las dos bases están en el mismo plano π_1, se utilizarán solamente sus trazas horizontales. Éstas pasan todas por H_1.

Supongamos que H_1A_1 es la posición inicial de la traza horizontal del plano secante. De los dos puntos de intersección determinados consideremos uno solo de ellos, al que llamaremos punto $1 \equiv (1_1, 1_2)$. Los apoyos móviles sobre el plano de las bases, de sus correspondientes generatrices, son A_1 y M_1.

Iniciado el movimiento del plano secante, A_1 puede seguir dos caminos, hacia C_1 o hacia B_1. Adoptemos el segundo. En cuanto a M_1, se dirigirá hacia E_1.

Sobre los dos recorridos citados el primer vértice que se encuentra es E_1, que proporciona el punto $2 \equiv (2_1, 2_2)$ de la intersección.

Y así se sigue con los puntos *3*, *4*, *5* y *1* nuevamente. Se completa así la línea de entrada de la penetración, ya que de penetración se trata.

Como se ve, la entrada está situada en dos caras de la superficie prismática.

Para la línea de salida se reinicia el movimiento con la misma posición inicial del plano secante, pero con el segundo punto. $6 \equiv (6_1, 6_2)$, que este plano determina. Es decir, sobre la base $A_1B_1C_1$ el punto de partida sigue siendo A_1 y sobre $D_1E_1F_1G_1$ el punto de partida es N_1.

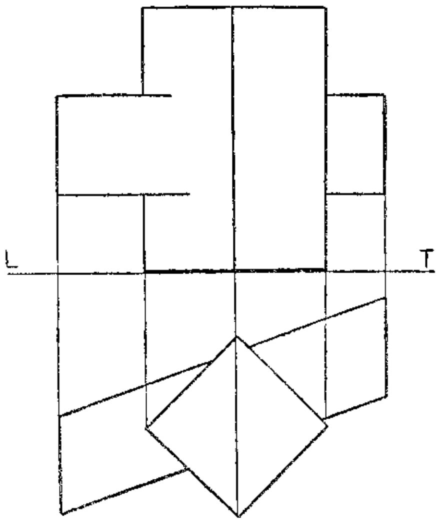
Por razones de claridad en el dibujo no se marcó el sentido de este segundo recorrido.

La línea de salida es el triángulo *6-7-8*, situado, naturalmente en una sola cara de la superficie prismática.

Como ejercicio, haga el lector el desarrollo de la superficie lateral del prisma, dibujando en él los dos polígonos de la intersección.

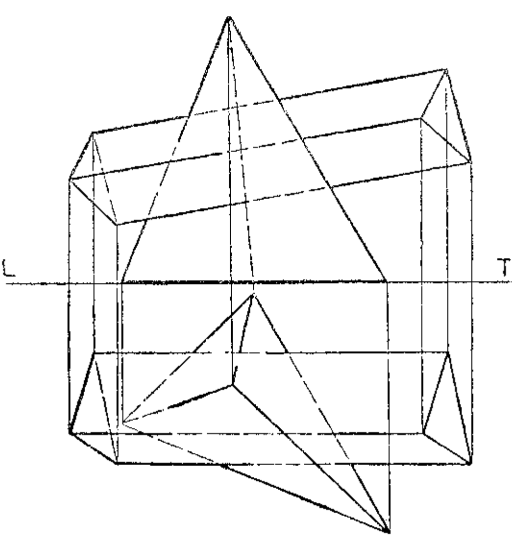
EJERCICIOS

116. Hallar la intersección de las superficies prismáticas de la figura.



EJERCICIO 116

117. Hallar la intersección de las superficies piramidal y prismática de la figur



EJERCICIO 117

§ 90. INTERSECCION DE SUPERFICIES CONICAS Y CILINDRICAS

7.—Las superficies cónicas pueden ser consideradas como límites de superficies piramidales cuando el número de caras tiende a infinito. Cuanto se ha establecido para hallar la intersección de las superficies

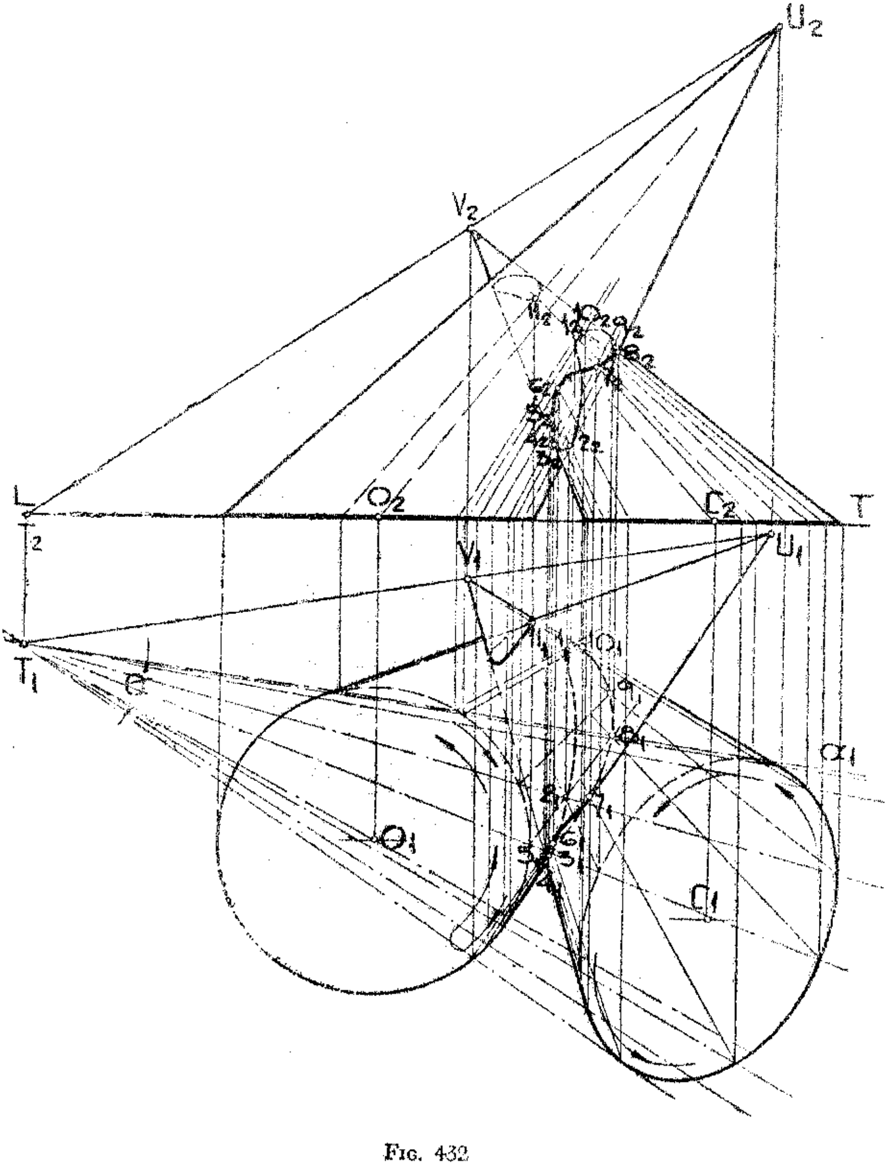


Fig. 432

de dos pirámides tiene así su aplicación en el caso de las superficies cónicas.

2. — Sean dos conos oblicuos cuyas bases pertenecen a un mismo plano. el horizontal, por ejemplo (fig. 432).

Uno es de base circular y vértice (U_1, U_2); otro, de base elíptica, tiene el vértice (V_1, V_2).

Queremos hallar la intersección de sus superficies.

Para que los planos auxiliares corten estas superficies según rectas (generatrices) deben contener la recta que une los dos vértices. Unimos entonces U y V mediante una recta y determinamos su traza T sobre el plano de las bases. Un plano secante auxiliar cualquiera, el α, por ejemplo, puede quedar individualizado mediante su traza sobre el plano de las bases y la recta UV común a todos los planos secantes. La traza pasa, naturalmente, por T_1 (1 de § 89), es decir, por el *punto de convergencia.* La traza vertical no resulta necesaria por cuanto ninguna de las bases está situada en ese plano.

Procediendo en forma semejante al problema de la intersección de superficies poliédricas, iniciaremos la determinación de puntos de las líneas de intersección, fijando arbitrariamente la posición de partida del plano secante, y nos detendremos allí donde conviene marcar un punto de las líneas buscadas. En la primera posición adoptada, la correspondiente a la traza α_1, la superficie de base circular es cortada según dos generatrices y la de base elíptica según una generatriz. De los dos puntos de intersección marcamos, para iniciar el movimiento, sólo el punto $1 \equiv (1_1, 1_2)$. La próxima posición del plano α es la que determina una generatriz del contorno aparente vertical de la superficie de vértice U. A esta posición corresponde el punto marcado como *2*.

La tercera posición de α es la que determina una generatriz del contorno aparente vertical de la superficie de vértice V, obteniéndose así el punto *3*.

Y así sucesivamente.

Las flechas indican el sentido de cada recorrido, debiendo notarse que las detenciones del plano α se efectuaron solamente allí donde una de las generatrices determinadas es del contorno aparente horizontal o vertical de una u otra superficie. Salvo las posiciones límites, que pueden no dar una generatriz del contorno aparente.

De cualquier modo, nada impide considerar otras paradas del plano secante móvil si resultase necesario o conveniente para obtener otros puntos intermedios de las líneas de intersección. La tangente a la línea de intersección en uno de sus puntos genéricos $P \equiv (P_1, P_2)$ aparece en la figura 433, que reproduce las mismas superficies dadas. Esa tangente es la recta de intersección de los planos tangentes en dicho punto a cada una de las superficies. Y estos planos son conocidos mediante las generatrices que pasan por el punto y las trazas sobre el plano de las bases, trazas que, como se sabe, son las tangentes a las bases en los puntos M y N, respectivamente. La intersección de

esas trazas da H_1, traza horizontal de la tangente. Uniendo H_1 con P_1 se tiene la proyección horizontal t_1 de la recta pedida.

Es fácil después marcar t_2.

3. — Como caso particular consideremos la intersección de dos superficies cónicas circulares. Las bases están en el mismo plano horizontal (fig. 434).

Tratándose de un caso tan especial nos apartaremos un tanto del procedimiento seguido en el número anterior. Consideremos varios

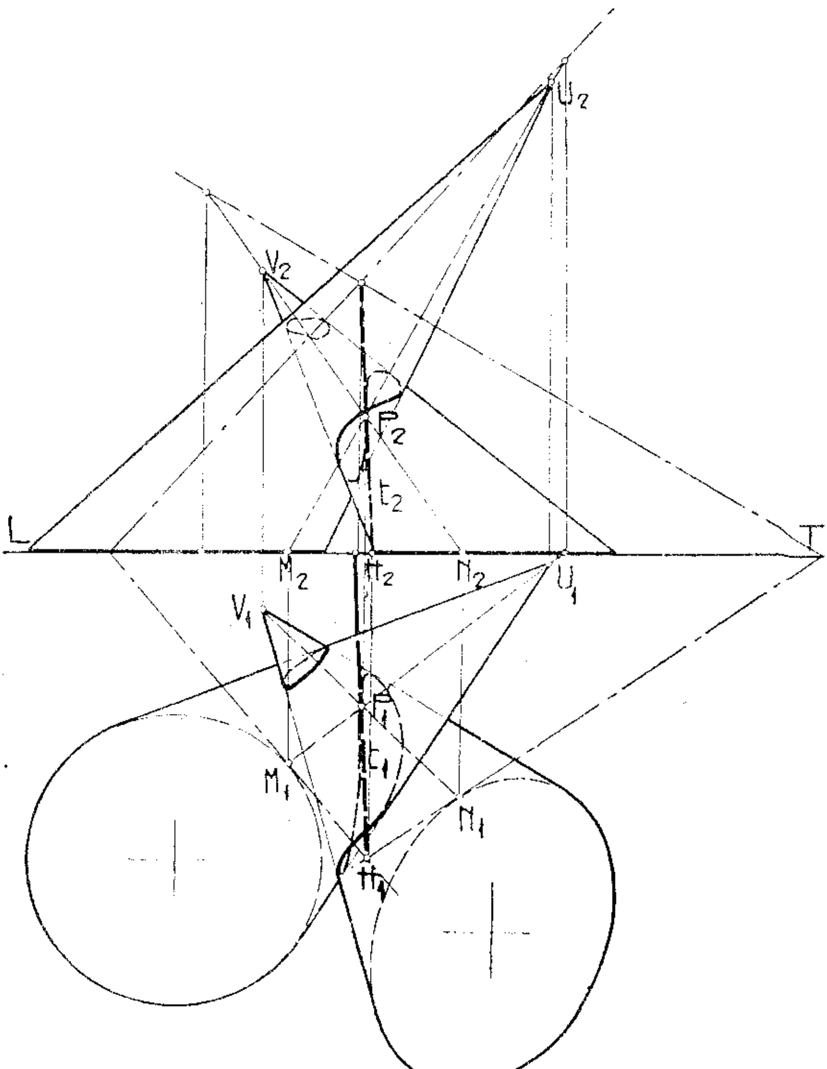


Fig. 433

planos auxiliares horizontales. Las secciones producidas en cada superficie son circunferencias, y entonces los puntos comunes a dos circunferencias de un mismo plano son puntos de la intersección.

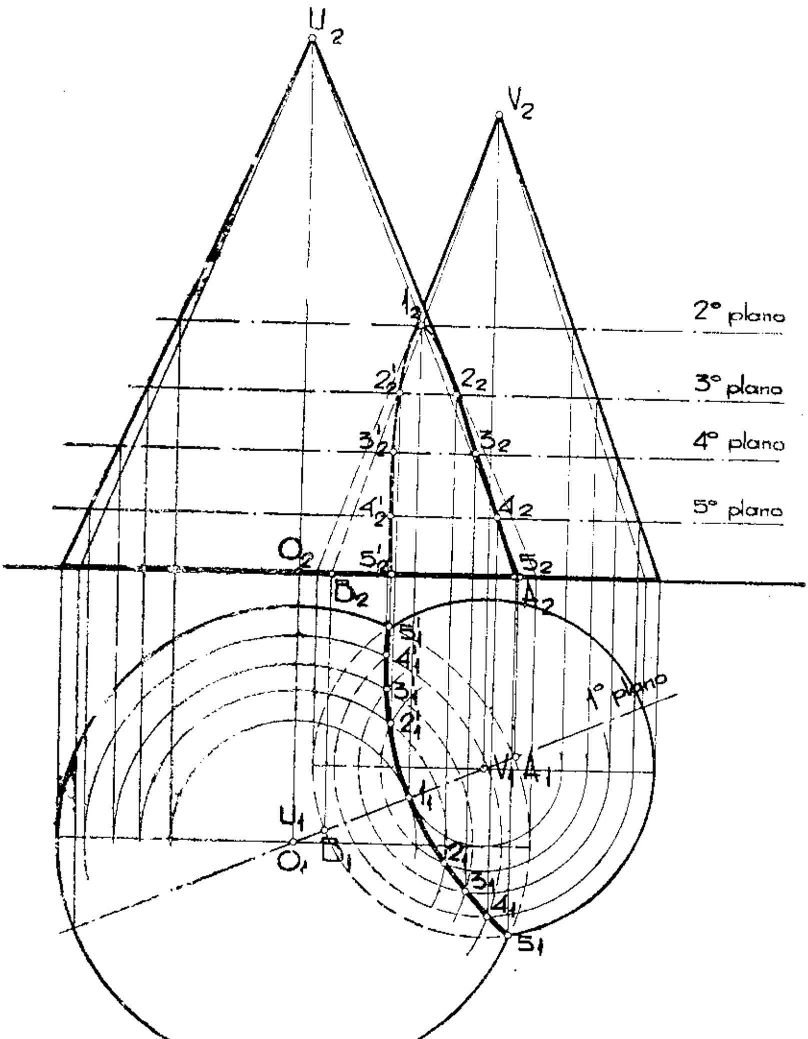


Fig. 434

Para obtener el punto *1* puede procederse por tanteo hasta que las dos circunferencias producidas por el plano secante sean tangentes o, si se quiere, en forma más rápida, utilizar como plano secante el

plano vertical que pasa por los d[illegible] I y [illegible]. La intersección de las generatrices $\overline{A_2U_2}$ y $\overline{B_2V_2}$ da el punto *1*. Las otras dos generatrices se cortan fuera de las superficies consideradas.

El uso de planos secantes que determinan circunferencias en las superficies dadas resulta ventajoso cuando éstas dan secciones circulares paralelas.

4. — En la figura 435 hemos considerado dos superficies cilíndricas oblicuas cuyas bases están en un mismo plano horizontal.

En forma análoga al caso de dos superficies prismáticas (4 de § 89), los planos secantes auxiliares serán paralelos a las generatrices de ambas superficies. Como primer paso se elige entonces un punto arbitrario P cerca de las superficies y se conducen por él las paralelas m y n a las generatrices de las dos superficies. Queda así definido un plano α paralelo a los auxiliares. Las trazas de éstos serán entonces paralelas a las trazas α_1 y α_2 del plano α. Como en este caso las bases de ambas superficies están en el mismo plano, el horizontal de proyección, basta considerar solamente las trazas horizontales de los planos auxiliares. Uno de éstos, el β, por ejemplo, corta la superficie cilíndrica circular según las generatrices AA' y BB', y la cilíndrica elíptica según la generatriz CC'. Los puntos comunes a estas generatrices son puntos de la intersección.

La visibilidad de cada punto se determina previamente por la visibilidad de las generatrices que lo determinan. Así, las generatrices AA' y CC', que son independientemente visibles en proyección horizontal, dan un punto *10* visible en proyección horizontal e invisible en proyección vertical porque sobre este plano AA' es invisible.

El otro punto determinado, el *1*, es, en cambio, invisible sobre ambos planos de proyección. Los planos secantes β y γ constituyen los planos límites útiles, tangente cada uno a una de las superficies, secante de la otra; conviene que sean los primeros dibujados porque indican en seguida la naturaleza, mordedura en este caso, de la intersección.

Los planos secantes que cortan una de las superficies según una generatriz del contorno aparente horizontal o vertical darán puntos situados sobre el respectivo contorno, y en ellos la curva de intersección es tangente a la correspondiente generatriz. Estos planos son ocho en general. Obtenidos los puntos de intersección es necesario fijar el orden según el cual deben ser unidos. Se procede entonces como en el caso de las superficies prismáticas.

Partiendo de la posición inicial β del plano secante, hemos movido éste paralelamente a sí mismo, considerando el punto *1* como primer punto de intersección. El punto C_1 ha recorrido entonces la base a la cual pertenece según lo indica la flecha, mientras el punto B_1 hacía otro tanto sobre su respectiva base. Las paradas del plano móvil se efectuaron al llegar a las posiciones de los planos secantes que dieron puntos de la intersección.

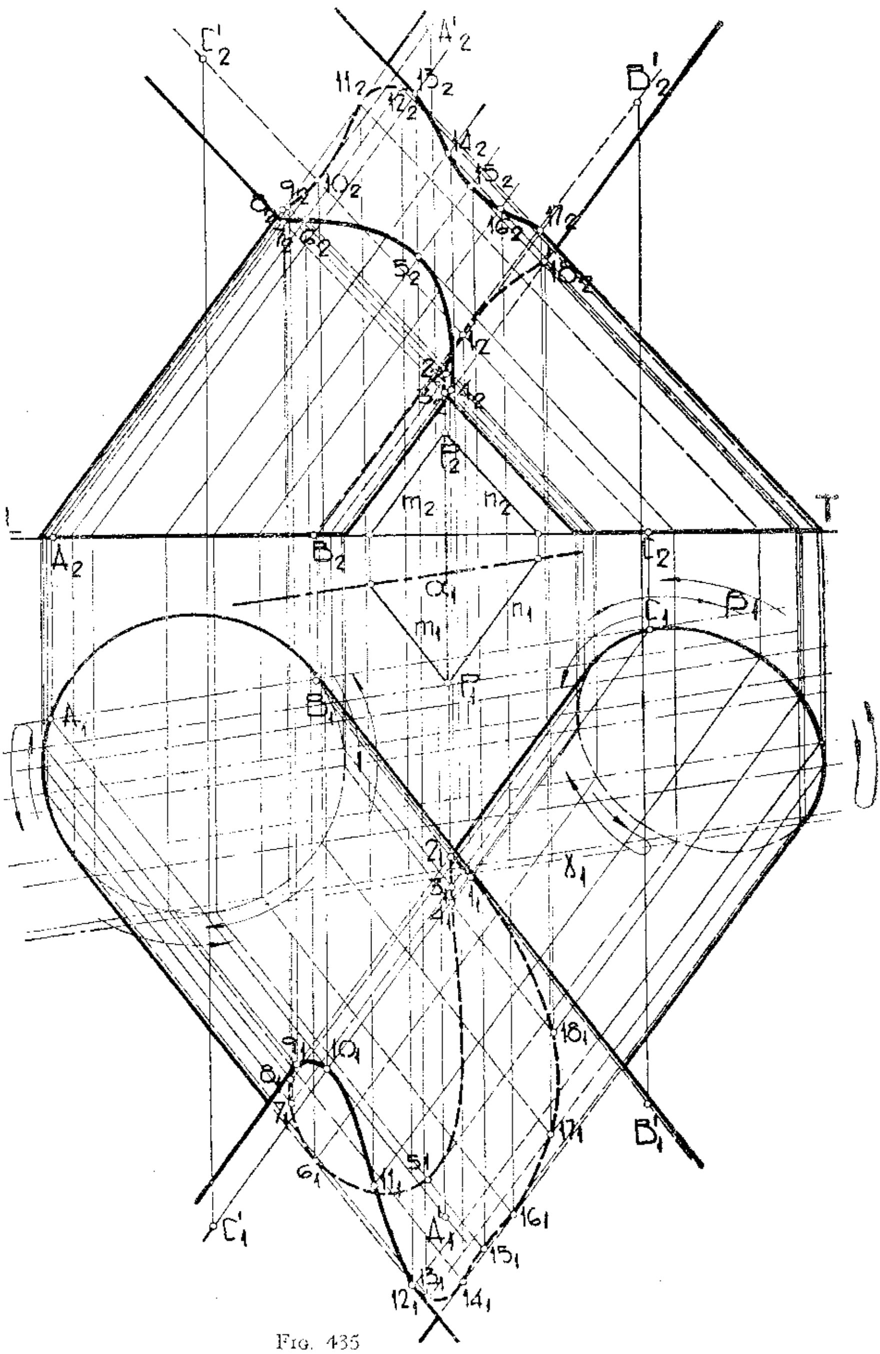


FIG. 435

Como caso particular, si las dos bases fuesen circulares, podrían emplearse, como en 2 de este parágrafo, planos secantes horizontales, que producirían secciones circulares.

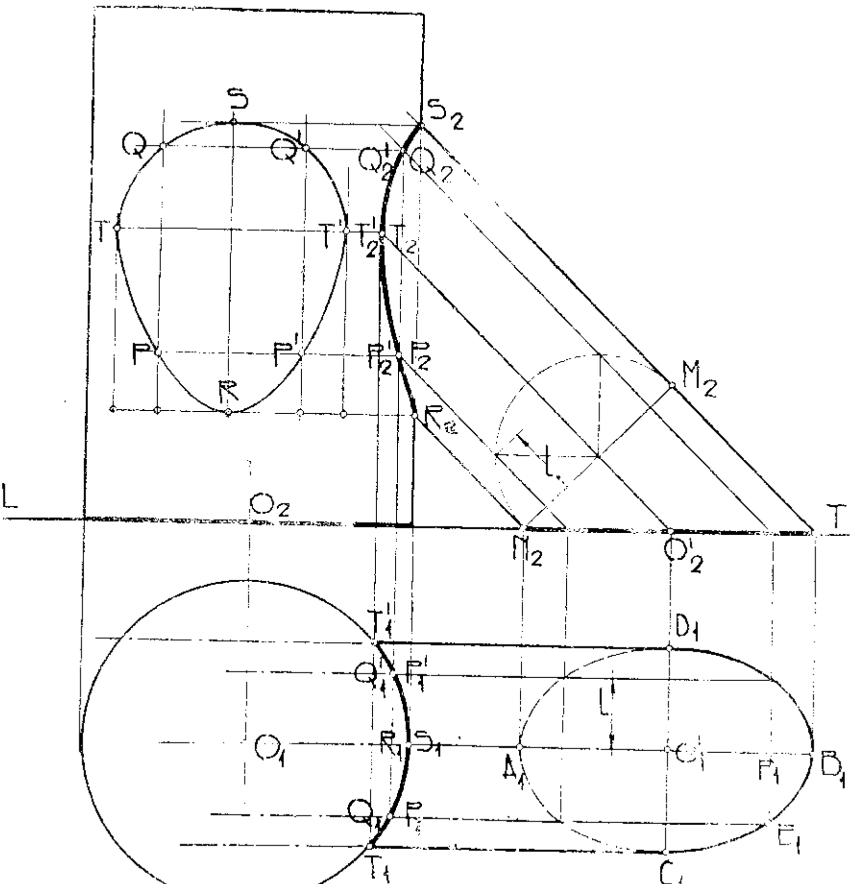


FIG. 436

5. — Consideremos ahora, como ejercicio práctico, la unión de dos tubos de una cañería. Los tubos son circulares (cilindros de revolución) y sus ejes, situados en un plano de frente, son concurrentes según un ángulo de 45° (fig. 436).

Dibujada la traza elíptica del cilindro oblicuo se consideraron planos secantes paralelos al plano π_2. Se dibujó entonces fácilmente la curva de unión de los dos tubos.

A un costado se ha desarrollado parcialmente la superficie lateral del cilindro vertical.

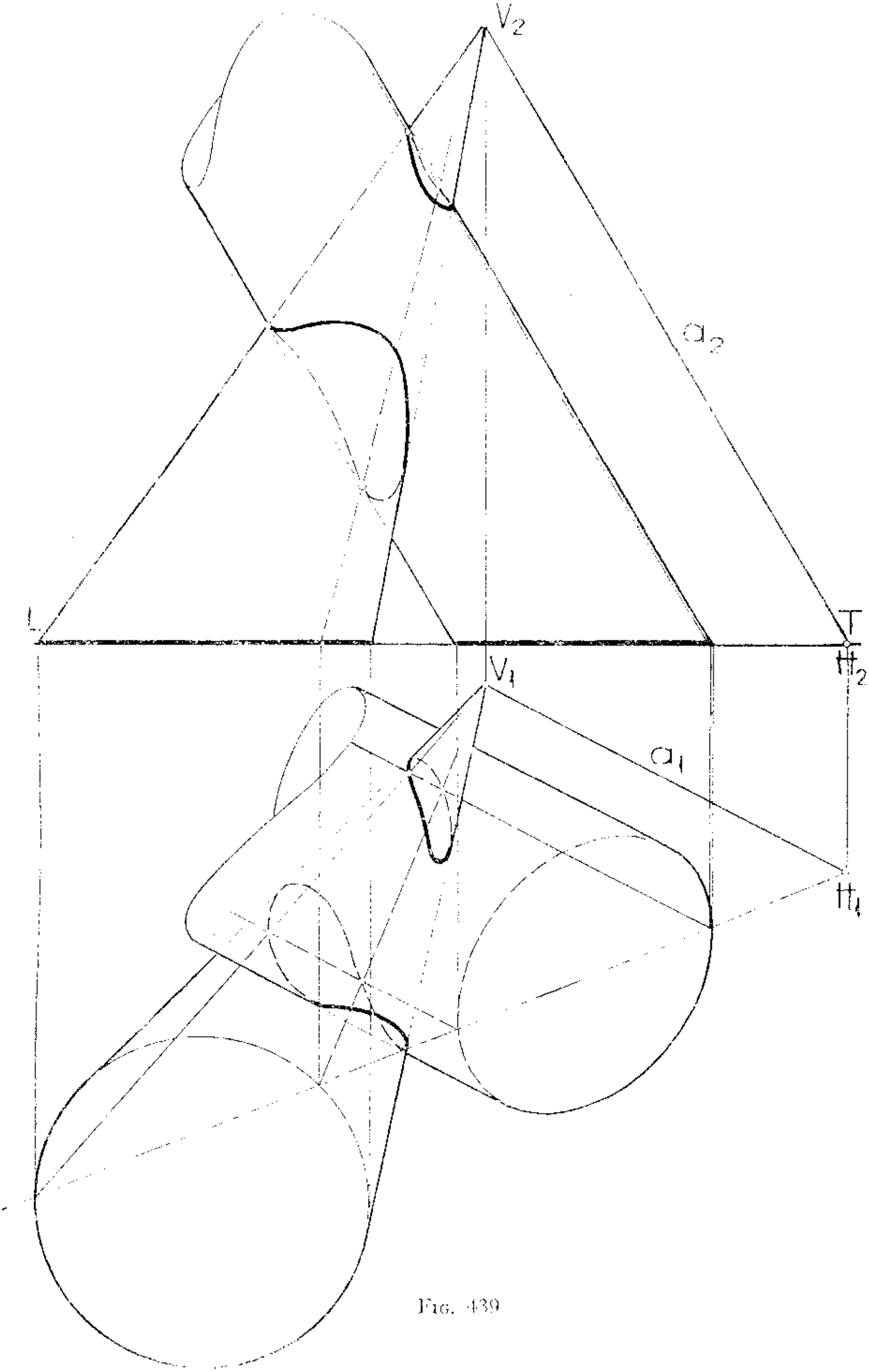
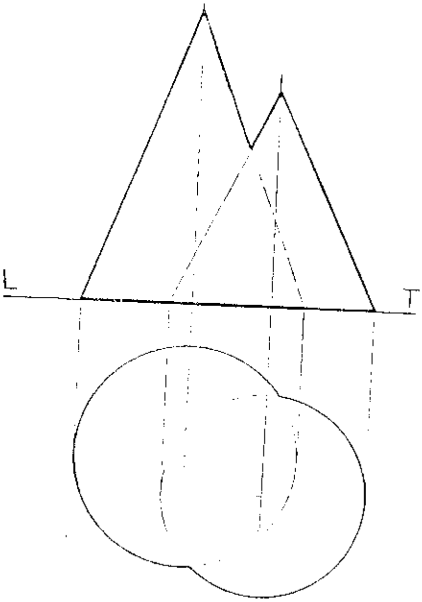


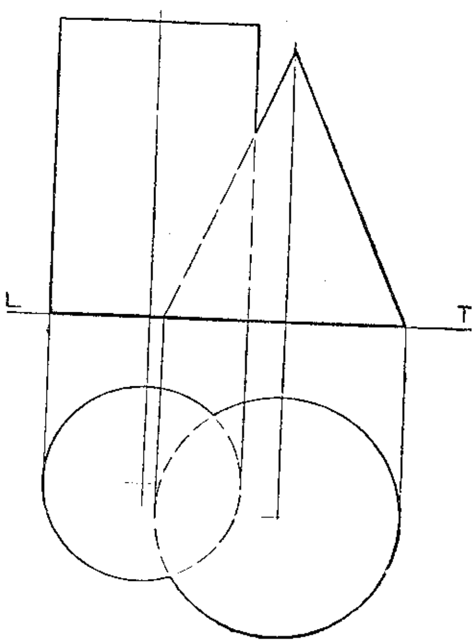
FIG. 439

EJERCICIOS



EJERCICIO 118

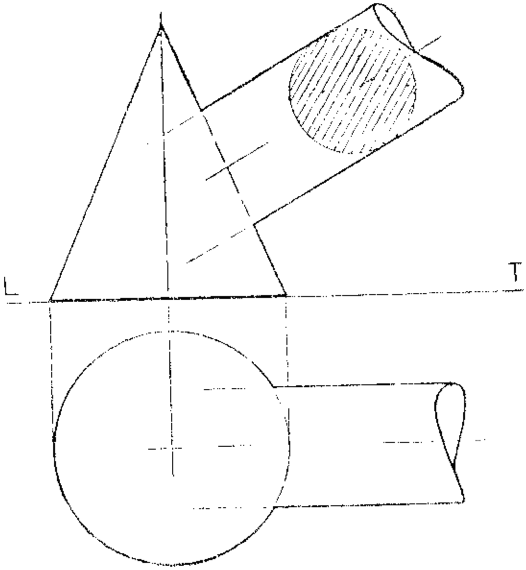
118. Hallar la intersección de las superficies cónicas siguientes.



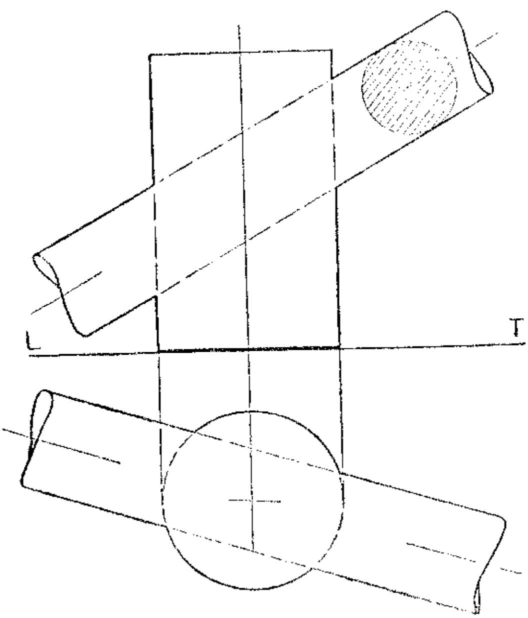
119. Hallar la intersección de las superficies cónica y cilíndrica siguientes.

EJERCICIO 119

120. Hallar la intersección de las superficies cónica y cilíndrica siguientes.



Ejercicio 120



121. Hallar la intersección de las superficies cilíndricas siguientes.

Ejercicio 121

§ 91. INTERSECCION DE SUPERFICIES POLIEDRICAS CON SUPERFICIES CURVAS

1. — La intersección de una superficie poliédrica con una superficie curva se obtiene determinando la sección plana de la superficie curva con cada una de las caras de la superficie poliédrica. Debe tenerse en cuenta que la intersección buscada no comprende, de cada curva sección, más que la parte que pertenece realmente a la cara correspondiente, excluyéndose entonces las partes de curva situadas en el plano ilimitado de esa cara.

Para evitar errores es importante determinar el punto en que cada arista de la superficie poliédrica corta la superficie curva.

2. — Determinemos, por ejemplo, la intersección de las superficies de una esfera y de un prisma recto exagonal (figura 440).

El plano de cada cara corta la superficie esférica según una circunferencia. Esta aparece en verdadera magnitud sobre el plano vertical cuando la cara es paralela a ese plano. La sec-

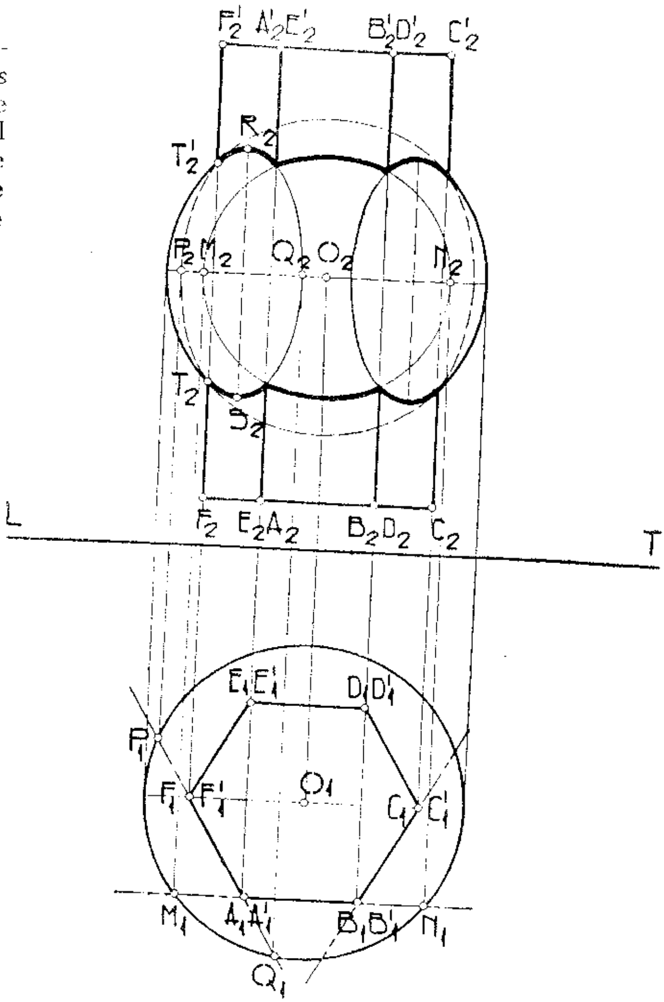


FIG. 440

ción producida por el plano que contiene la cara $ABB'A'$, por ejemplo, es la circunferencia de diámetro $\overline{M_2N_2} = \overline{M_1N_1}$.

La circunferencia producida por el plano que contiene la cara $FAA'F'$ tiene como diámetro $\overline{P_1Q_1}$. En proyección vertical aparece según una elipse. Su eje menor es $\overline{P_2Q_2}$, obtenido mediante líneas de referencia por P_1 y Q_1. Su eje mayor es $\overline{R_2S_2} = \overline{P_1Q_1}$.

Y así para otros planos.

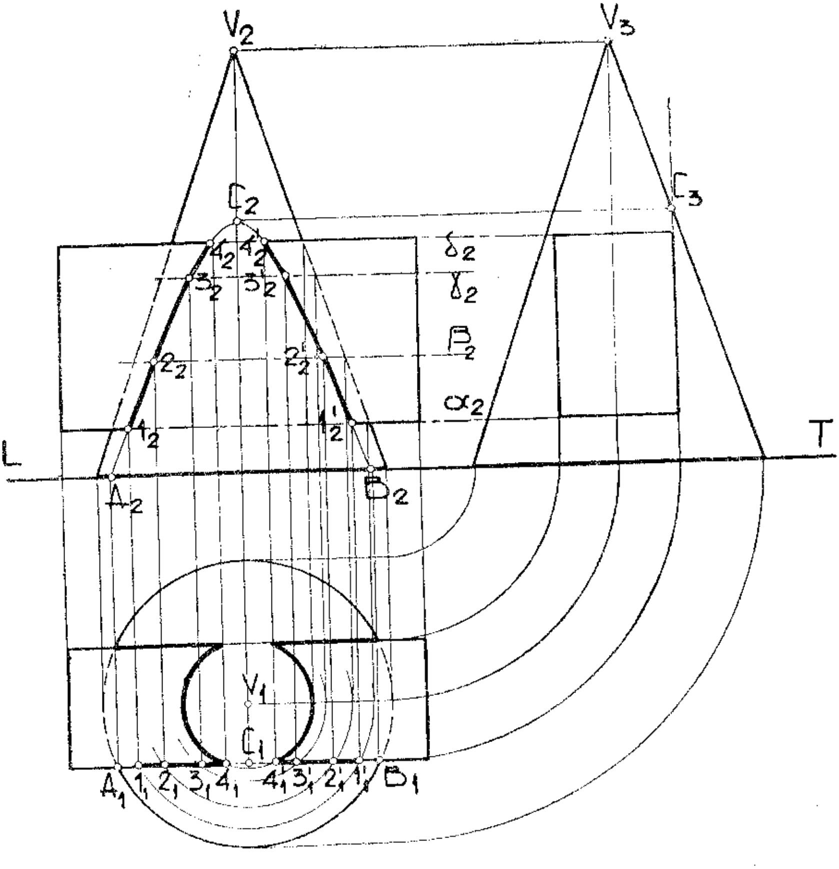


Fig. 441

Conviene para cada elipse determinar los puntos pertenecientes al contorno aparente vertical. Los puntos del contorno aparente vertical se proyectan horizontalmente sobre el diámetro paralelo a LT. El punto F_1, intersección de ese diámetro con la traza P_1Q_1 del plano secante que contiene la cara $FAA'F'$, es entonces la proyección hori

zontal de los puntos en que la elipse correspondiente toca el contorno aparente vertical de la superficie esférica.

Sus proyecciones verticales son T_2 y T'_2.

En este problema hay penetración, pues todas las aristas de la superficie prismática cortan la superficie esférica.

3.—En la figura 441 hemos hallado la intersección de una superficie cónica y una prismática.

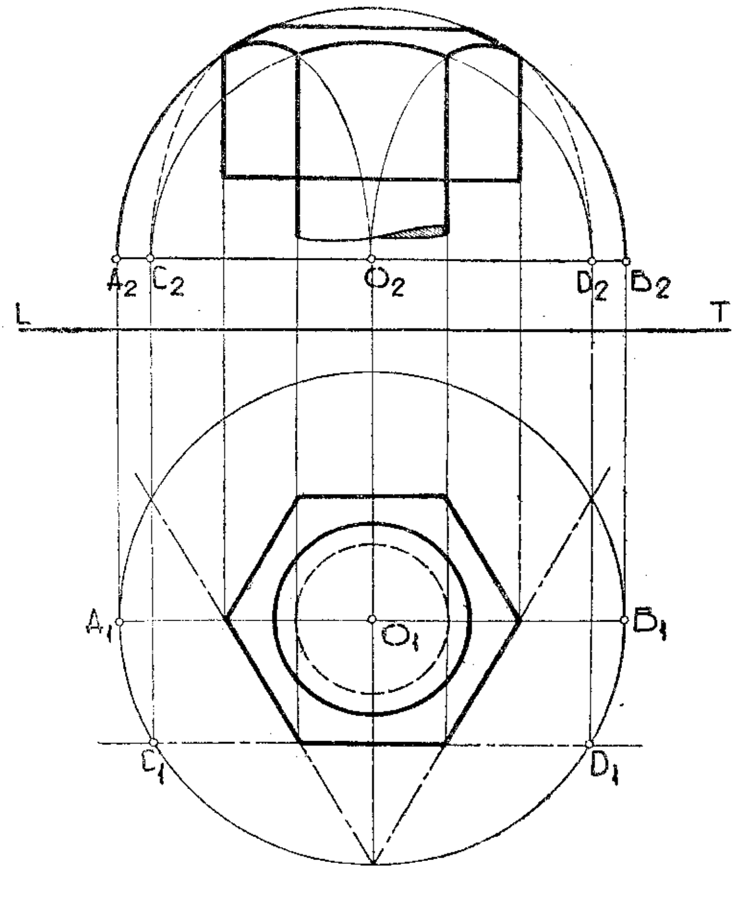


Fig. 442

Las caras de frente de la superficie prismática, paralelas al eje de la superficie cónica, determinan como secciones arcos de hipérbolas. Para encontrar el vértice de la hipérbola se ha recurrido a un plano

de perfil. Puntos cualesquiera de la sección fueron obtenidos mediante planos secantes horizontales.

4. — Las intersecciones de 2 y 3 tienen aplicación, en mecánica, en el dibujo de las caras de las tuercas de tornillos y en el de cabezas de pernos.

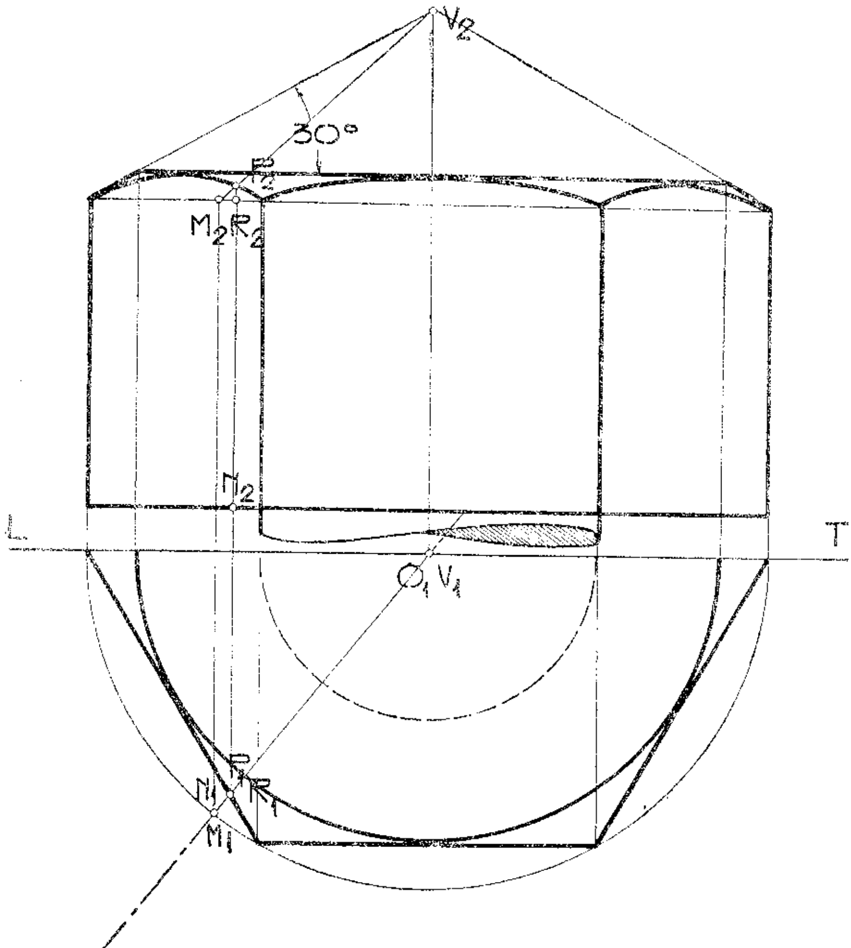


Fig. 443

En la tuerca a chaflán esférico o en la cabeza exagonal de bulón, representada en la figura 442, el chaflán es una porción de superficie esférica. Las caras de frente de la tuerca o de la cabeza de bulón cortan la superficie esférica de centro (O_1, O_2) y radio $\overline{O_1A}$, según

circunferencias de diámetro C_2D_2 que, como sabemos, se proyectan verticalmente en tamaño real.

Las caras laterales, situadas en planos verticales oblicuos con respecto al plano vertical, determinan elipses en la forma indicada en el número 2 de este parágrafo. Marcadas las porciones útiles de las secciones planas halladas, resulta el trazado pedido.

5. — La figura 443 da la representación de una cabeza de bulón exagonal a chaflán cónico. Consta de un prisma exagonal con la base superior cónica. El ángulo que forman las generatrices del contorno aparente del cono es 100° en el sistema métrico decimal y 120° en el sistema inglés.

Las caras del prisma cortan la superficie cónica según hipérbolas que pueden determinarse por puntos.

La parte superior plana de la cabeza del bulón corta el cono según un círculo.

En la práctica se sustituyen los arcos de hipérbolas por arcos de circunferencias.

Así se ha hecho en la figura 444, en la cual todos los elementos necesarios para el trazado del bulón son deducidos del diámetro exterior d de los filetes.

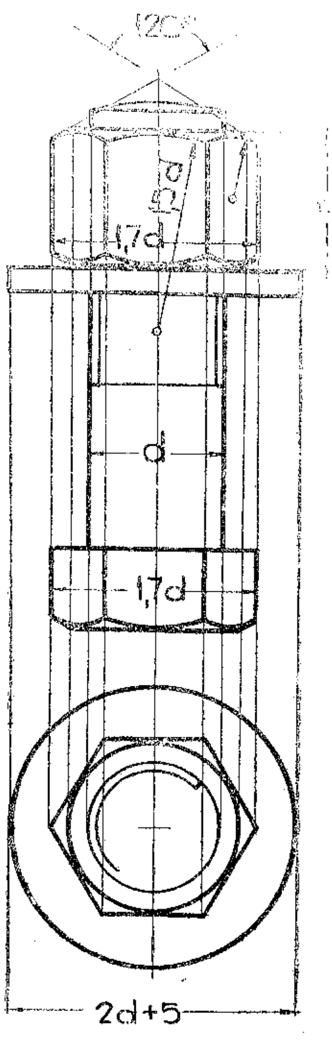
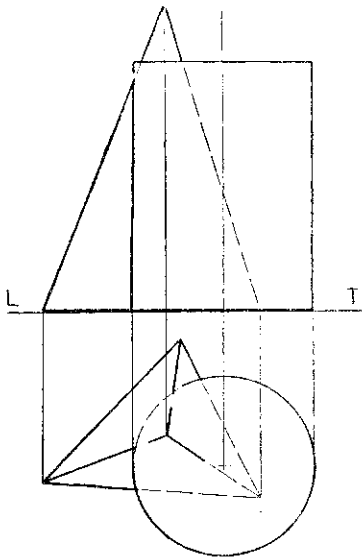


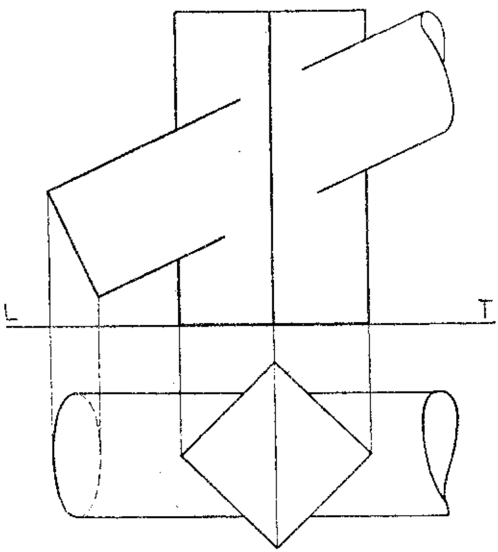
FIG. 444

EJERCICIOS

122. Hallar la intersección de las superficies de la pirámide y del cilindro indicados en la figura.

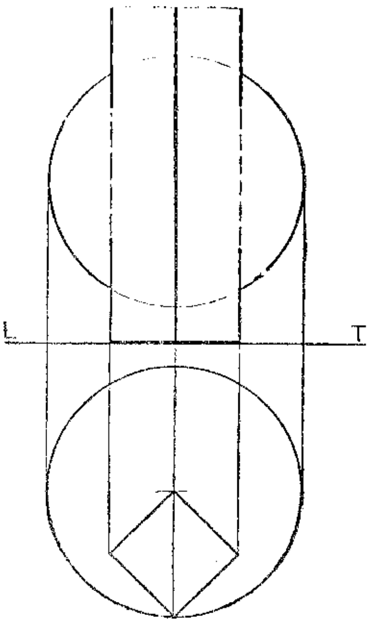


EJERCICIO 122



123. Hallar la intersección de las superficies de un prisma y de un cilindro.

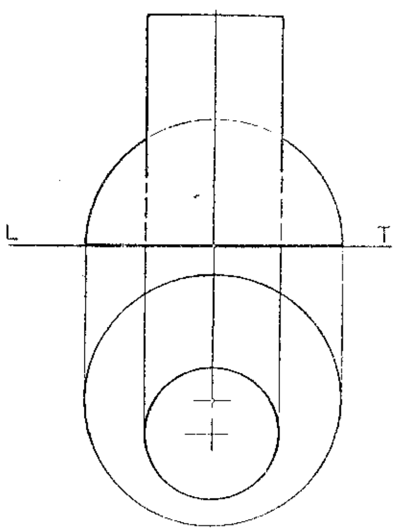
EJERCICIO 123



EJERCICIO 124

124. Determinar la intersección de las superficies esférica y prismática dadas en la figura.

125. Determinar la intersección de las superficies esférica y cilíndrica indicadas en la figura.



EJERCICIO 125

§ 92. INTERSECCION DE SUPERFICIES DE REVOLUCION

1. — Entre las superficies cónicas y cilíndricas consideradas en el parágrafo 90 algunas eran de revolución. Para hallar su intersección no fué necesario recurrir a métodos distintos de los establecidos para las superficies cónicas y cilíndricas en general, salvo en algún caso muy sencillo, para simplificar la construcción.

Nos ocuparemos ahora del problema de la intersección de dos superficies cualesquiera de revolución en aquellos casos de solución simple e interesante, es decir, precisando más las cosas, en aquellos casos en que los ejes de las dos superficies son coincidentes, o si no son coincidentes, que estén en un mismo plano.

Pueden establecerse así tres casos: 1º ejes paralelos; 2º ejes concurrentes; 3º ejes coincidentes.

2. — Si los ejes son paralelos, utilizaremos como superficies secantes auxiliares planos perpendiculares a los ejes. Las secciones producidas son circunferencias que sabemos determinar. Los eventuales puntos comunes a cada par de circunferencias son puntos de la intersección.

3. — Trátese, por ejemplo, de encontrar la intersección de una superficie esférica y una cilíndrica (fig. 445).

Como cualquiera de los diámetros de la superficie esférica puede ser considerado como eje, basta, en este problema, que los planos secantes auxiliares sean perpendiculares al eje de la superficie cilíndrica. Las secciones producidas en ésta se proyectan horizontalmente sobre la base; las producidas en la superficie esférica se proyectan, en cambio, según circunferencias de centro O_1. Los puntos comunes a estas circunferencias y a la base del cilindro son puntos de la intersección.

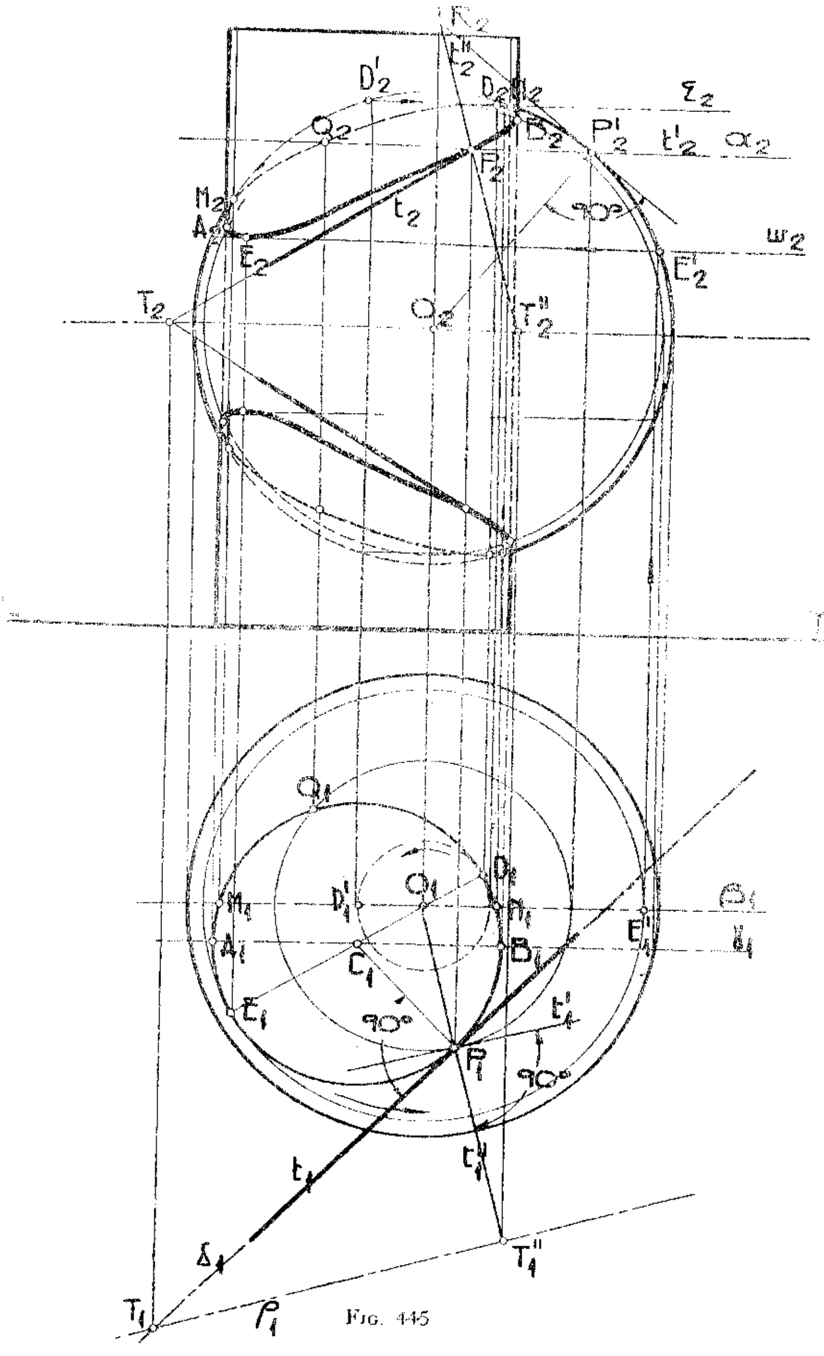
Así, el plano α, dado por su única traza α_2, permite hallar, en la forma indicada, el punto (P_1, P_2) de la intersección en la porción visible de la curva, y el (Q_1, Q_2), en la invisible.

En vez de seguir hallando puntos cualesquiera conviene siempre hallar los llamados puntos notables de la curva de intersección.

En primer lugar aquellos situados sobre el contorno aparente vertical de la superficie esférica. Para esto, en vez de recurrir a un plano secante perpendicular al eje del cilindro, se recurre con ventaja al plano que contiene el meridiano principal de la superficie esférica.

Su única traza es β_1 y corta la superficie cilíndrica según las generatrices que se proyectan sobre el plano π_1 en los puntos M_1 y N_1, y la superficie esférica según el meridiano principal. Los puntos M_2 y N_2, en que aquellas generatrices cortan este meridiano, son los puntos buscados.

En segundo lugar determínanse los puntos de la intersección pertenecientes al contorno aparente vertical de la superficie cilíndrica. También aquí, si se quiere, puede usarse un plano paralelo al vertical de proyección: el que proyecta sobre π_1 el diámetro $\overline{A_1B_1}$, paralelo a



D'2
D2
M2
Σ2
Q2
B2
P'2
t'2
α2
P2
M2
A2
t2
90°
ω2
E2
E'2
T2
O2
T''2
T
Q1
O1
D'1
O1
M1
M1
E'1
A1
C1
B1
E1
t'1
90°
P1
90°
t1
t''1
Δ1
T''1
T1
ρ1

FIG. 445

LT, de la base del cilindro. Su única traza es γ_1, que permite hallar sin dificultad los puntos A_2 y B_2.

En tercer lugar se individualizarán los puntos en los cuales la tangente a la curva es horizontal. Corresponden a los situados sobre el diámetro $E_1C_1O_1D_1$. La circunferencia con centro en O_1 y radio $\overline{O_1E_1}$ permite hallar la única traza ω_2 del plano secante auxiliar. Una línea de referencia por E_1 proporciona uno de los puntos, E_2, buscados. Del mismo modo, la circunferencia con centro en O_1 y radio $\overline{O_1D_1}$ determina la traza ε_2 de otro plano secante, gracias al cual se fija el otro punto, D_2, buscado.

Con la proyección P_2 de un punto genérico P, con M_2 y N_2 sobre el meridiano principal de la superficie esférica (en éstos, meridiano y curva de intersección son tangentes), con A_2 y B_2 sobre el contorno aparente de la superficie cilíndrica, y con E_2 y D_2, en los cuales la tangente a la intersección es horizontal, se puede trazar perfectamente la proyección vertical de la línea de salida de la intersección.

Por simetría puede construirse la curva de entrada.

Conviene completar el problema hallando la tangente a la intersección en uno de sus puntos $P \equiv (P_1, P_2)$.

La recta tangente es la intersección de los planos tangentes en ese punto a la superficie esférica y a la cilíndrica.

La traza horizontal δ_1 del plano tangente a la superficie cilíndrica coincide con la tangente t_1 a la traza de la superficie sobre el plano de proyección horizontal. El plano tangente a la superficie esférica puede ser determinado mediante las tangentes en P al paralelo y al meridiano que pasan por este punto. La tangente al paralelo es la horizontal (t'_2, t'_2).

La tangente al meridiano puede ser determinada siguiendo cualquiera de los procedimientos establecidos en § 83. Sigamos el que se basa en la afinidad entre dos meridianos de una misma superficie de revolución. Se sabe que las tangentes en puntos correspondientes son también afines. Se traza entonces la tangente por P'_2 y se une P_2 con el punto R_2 en que aquélla corta el eje O_1O_2 de afinidad. La recta t''_2 obtenida es la proyección vertical de la tangente al meridiano que pasa por P. Su proyección horizontal es t''_1. Para hallar las trazas de la recta t'' se puede proceder como se ha procedido siempre, pero, por razones de espacio en el dibujo, consideremos un nuevo plano horizontal de proyección, el horizontal que pasa por O_2. La traza horizontal será entonces (T''_1, T''_2). Por T''_1 debe pasar la traza horizontal del plano tangente a la superficie esférica, y como por contener la recta horizontal t' debe ser paralela a t'_1, se traza por T''_1 la paralela ϱ_1 a t'_1. Se tiene así la traza del plano tangente a la superficie esférica. El punto T_1, intersección de ϱ_1 y δ_1, es entonces la proyección horizontal de la traza horizontal de la tangente a la curva de intersección. Su proyección vertical es T_2. Uniendo T_2 con P_2 se tiene la tangente pedida $TP \equiv (T_1P_1, T_2P_2)$.

4. — Si dos superficies de revolución tienen sus ejes coincidentes se cortan según uno o varios paralelos comunes. La figura 446 representa dos superficies de revolución dadas por su único eje (e_1, e_2) y sus meridianos principales respectivos (m_1, m_2) y (m'_1, m'_2). La intersección de las dos superficies es el paralelo común de radio $\overline{O_2A_2}$, proyectado horizontalmente en tamaño real y verticalmente según su diámetro $\overline{A_2B_2}$.

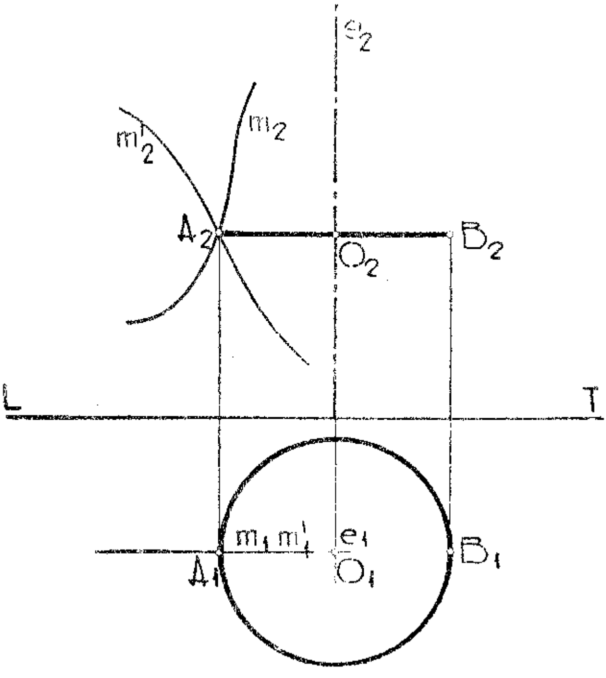


FIG. 446

La figura 447 hace ver dos aplicaciones sencillas de esta importante propiedad.

5. — Cuando debe hallarse la intersección de dos superficies cualesquiera de revolución, cuyos ejes se cortan, puede escogerse como plano vertical de proyección uno paralelo al plano de los dos ejes y como plano horizontal uno perpendicular al de los ejes.

En este caso el uso de planos secantes auxiliares no resulta conveniente, pues no es posible conseguir que un mismo plano corte las dos superficies dadas según circunferencias. Se recurre entonces a una serie de superficies esféricas auxiliares concéntricas. De acuerdo con lo establecido en el número anterior, si una superficie esférica tiene su

centro en el eje de otra superficie de revolución, la intersección es una circunferencia. Si entonces se toma como centro el punto común a los dos ejes, la superficie esférica considerada cortará según una circunferencia cada una de las superficies de revolución dadas. Los eventuales puntos comunes a las dos circunferencias son puntos de la intersección buscada.

Este método es práctico solamente cuando los dos ejes son paralelos a uno de los planos de proyección, porque sólo entonces las circunferencias aludidas se proyectan sobre ese plano según segmentos de recta.

Supongamos entonces dos elipsoides (fig. 448). El eje del uno, vertical; el eje del otro, oblicuo con respecto al plano horizontal, es paralelo al plano vertical. Los dos ejes se encuentran en (E_1, E_2). Una superficie esférica auxiliar, la de radio $\overline{E_2A_2}$, por ejemplo, corta la superficie de eje vertical según la circunferencia que se proyecta sobre π_2 como segmento $\overline{A_2B_2}$; y la otra superficie, según la circunferencia que se proyecta como segmento $\overline{C_2D_2}$ también sobre el plano π_2. El

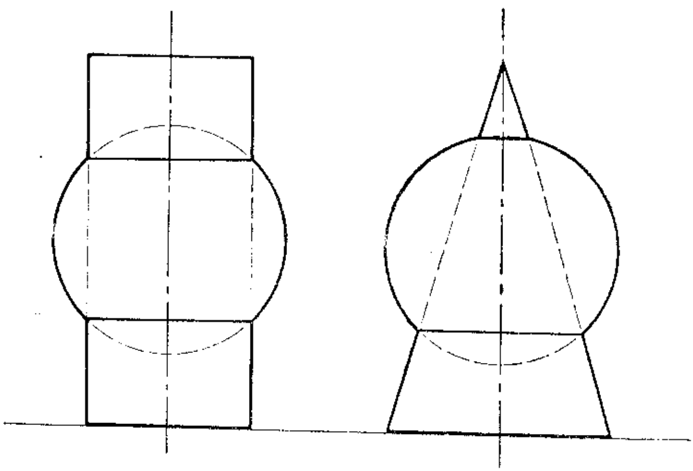


Fig. 447

punto M_2 común a esos segmentos es la proyección vertical de un punto de la intersección.

Como M_2 está en el paralelo proyectado horizontalmente según la circunferencia de centro E_1 y radio $\overline{A_1E_1}$, una línea de referencia permite determinar M_1. El punto hallado es, pues, (M_1, M_2).

La misma superficie esférica individualiza un segundo punto de intersección, el (M'_1, M_2), invisible en proyección vertical.

Y así para otros puntos.

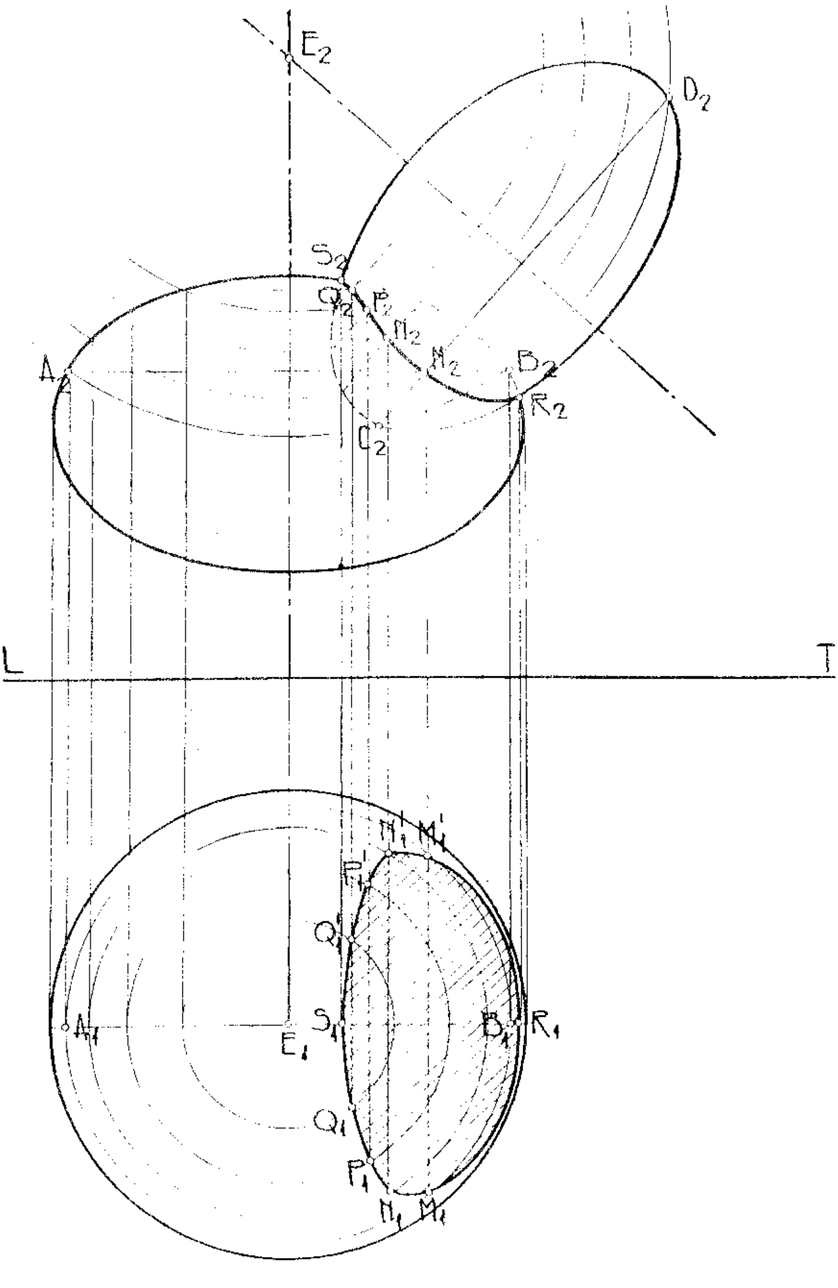

E2
D2
S2
Q2
P2
N2
M2
B2
A2
R2
C2
L
T
M1'
M1'
P1'
Q1'
A1
E1
S1
B1
R1
Q1
P1
N1
M1

FIG. 448

En proyección horizontal no se ha representado, por innecesario y por razones de claridad, el contorno aparente de la superficie de revolución a eje oblicuo.

6. — Como caso particular consideremos la intersección de una superficie cónica y otra cilíndrica, ambas de revolución, siendo sus ejes concurrentes y perpendiculares (fig. 449).

Es el caso de una chimenea troncocónica de una caldera. El punto O es el centro de las superficies esféricas auxiliares.

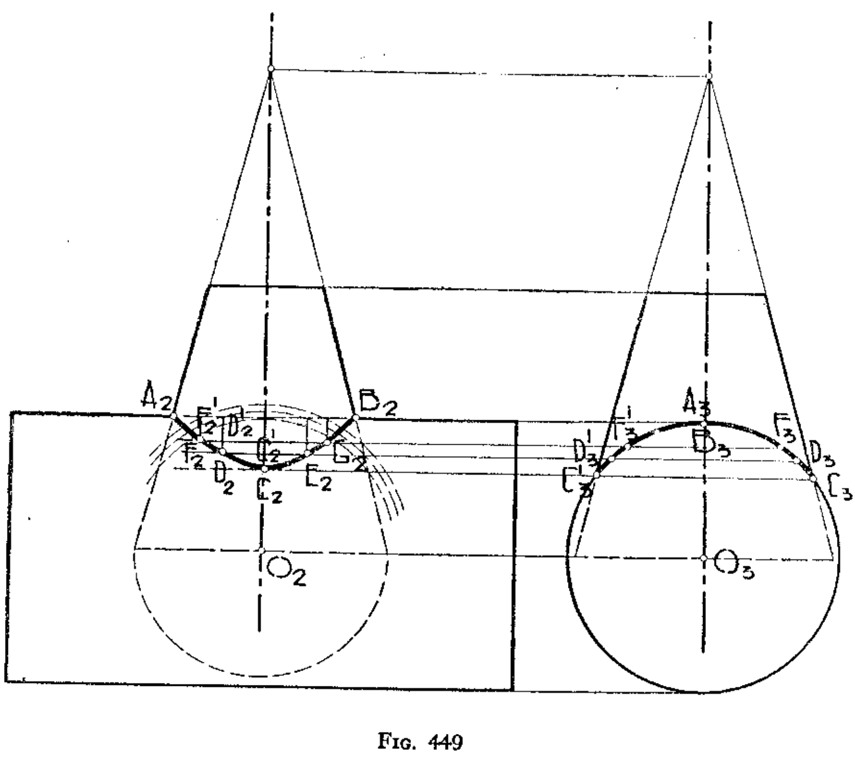


FIG. 449

En vez de la proyección horizontal se ha marcado esta vez el perfil de las superficies. La proyección sobre el plano de perfil es el arco $\widehat{C'_3A_3C_3}$ común a las dos superficies.

Los puntos A_2 y B_2 comunes a los dos contornos aparentes verticales son, evidentemente, puntos de la intersección.

La superficie esférica tangente a la superficie cilíndrica da los puntos más bajos C y C'.

§ 93. APLICACIONES

1. La intersección de superficies tiene frecuente aplicación en importantes problemas prácticos. Mostraremos algunos.

Refiriéndonos a la mecánica, la figura 450 hace ver la unión de piezas cilíndricas de diámetros distintos.

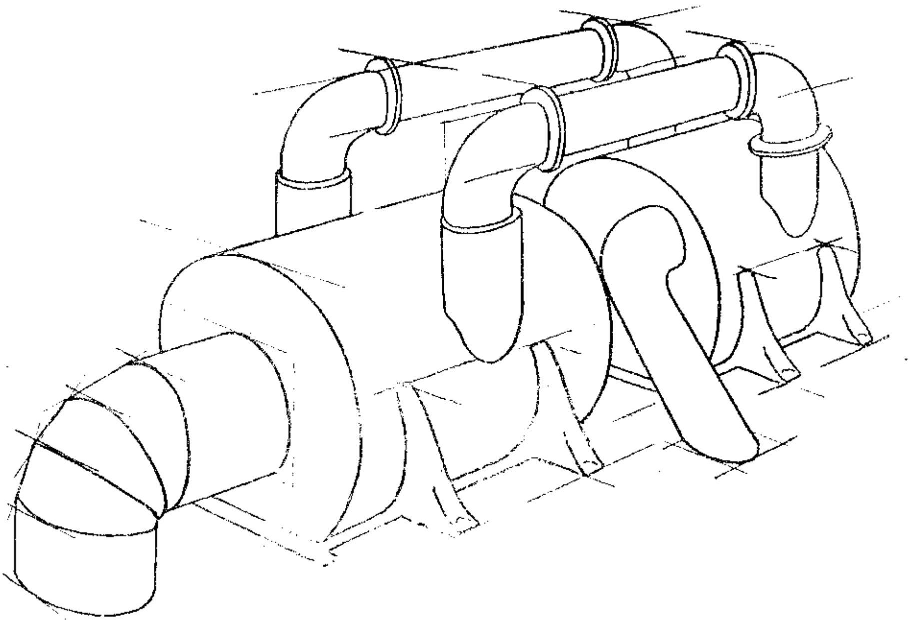


Fig. 450

La figura 451 da el detalle de un codo de caños cilíndricos, como los utilizados, por ejemplo, en instalaciones de calefacción y ventila ción. En estas instalaciones se hace r lo mayor posible, pudiendo llegar hasta 1,5 veces el diámetro del cilindro para disminuir la resistencia al paso del flúido. El ángulo del codo es en la figura $\theta = 90°$, pu diendo, naturalmente, ser distinto.

El codo consta de cuatro cilindros que se cortan sucesivamente. Las secciones son planas (elipses).

Las figuras de la derecha muestran cómo de una chapa única o de un cilindro único pueden obtenerse los cuatro trozos necesarios para el codo.

2. — Refiriéndonos a la construcción, la figura 452 muestra una bóveda de arista constituída, como se sabe, por la intersección de dos bóvedas de superficies semicilíndricas.

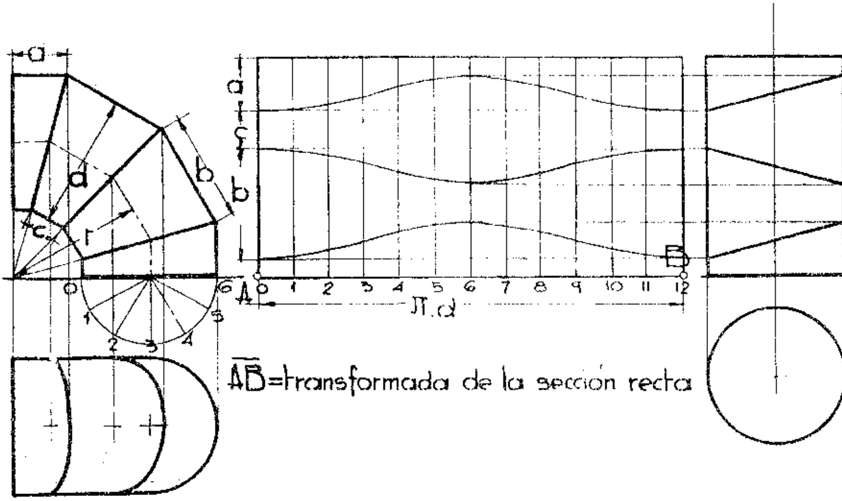

a
d
b
c
r
a
c
b
0 1 2 3 4 5 6
A
B
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
π.d
AB=transformada de la sección recta

FIG. 451

